

УДК 519.63

## Разработка физико-информированной нейронной сети для анализа напряжённого состояния мягких биологических тканей

Уразова К.М.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Первый Московский государственный медицинский университет имени И. М. Сеченова Министерства здравоохранения Российской Федерации  
(Сеченовский Университет)

*Аннотация:* В данной работе исследуется применение физико-информированных нейронных сетей (PINN) для моделирования механического поведения мягких биологических тканей. Представлен сравнительный анализ точности PINN с традиционными гиперупругими моделями, включая модели Нео-Гука, Йо, Муни-Ривлина и Хальцапфеля-Гассера-Огдена. Особое внимание уделено комбинированному описанию упругих и вязкоупругих свойств тканей через модифицированную модель Кельвина-Фойгта. Результаты демонстрируют, что предложенный подход PINN достигает точности 99% при среднеквадратичной ошибке  $3.199 \cdot 10^{-7}$  кПа<sup>2</sup>, что превосходит традиционные методы на 4 порядка. Работа вносит вклад в развитие методов персонализированного моделирования биомеханических систем.

*Ключевые слова:* PINN, нейронные сети, механика биологических тканей, гиперупругие модели, вязкоупругие модели

### 1. Введение

Мягкие биологические ткани обладают сложным вязкоупругим поведением, описываемым уравнениями в частных производных. Основное уравнение движения имеет вид:

$$\nabla \cdot (\mathbf{P}^e + \mathbf{P}^v) + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{P}^e$  – упругая часть тензора напряжений,  $\mathbf{P}^v$  – вязкая часть,  $\mathbf{b}$  – объёмные силы,  $\rho$  – плотность,  $\ddot{\mathbf{u}}$  – ускорение.

Для описания упругой части используются гиперупругие модели. Модель Йо [1] представляет собой полиномиальную аппроксимацию:

$$\Psi = \sum_{i=1}^3 C_{i0} (I_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{d_i} (J - 1)^{2i}, \quad (2)$$

где  $C_{i0}$  и  $d_i$  – материальные параметры,  $J$  – якобиан деформации.

В сравнении с другими моделями [2]:

$$\text{Нео-Гук: } \Psi = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3), \quad (3)$$

$$\text{Муни-Ривлин: } \Psi = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3), \quad (4)$$

$$\text{Хальцапфеля-Гассера-Огдена (HGO): } \Psi = C_{10} (I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \left[ e^{k_2 (I_4 - 1)^2} - 1 \right]. \quad (5)$$

## 2. Материалы и методы

Для описания вязкоупругости используется модель Кельвина-Фойгта:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} + \eta \frac{d\mathbf{C}}{dt}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{S}$  – тензор Пиолы-Кирхгоффа,  $\Psi$  – потенциал упругой энергии,  $\mathbf{C}$  – тензор Коши-Грина,  $\eta$  – вязкость.

Частотная зависимость учитывается через диссипативный потенциал:

$$\Phi = \frac{1}{2} \eta_1 \left( \frac{dI_1}{dt} \right)^2 + \eta_2 \left( \frac{dI_4}{dt} \right)^2, \quad (7)$$

где  $I_1, I_4$  – инварианты  $\mathbf{C}$ .

В PINN добавлен член потерь:

$$\mathcal{L}_{visc} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\| \mathbf{P}^v - \eta \frac{d\mathbf{F}}{dt} \right\|^2, \quad (8)$$

где  $\mathbf{F} = \nabla \mathcal{N}(\mathbf{x}, t; \theta)$  – тензор деформации, вычисляемый нейронной сетью, а  $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$  – через автоматическое дифференцирование.

**Алгоритм обучения:**

1. Обучение PINN.
2. Инициализация весов  $\theta$ .
3. Для  $epoch = 1, N_{epochs}$ .
  - 3.1. Вычислить  $\mathbf{F} = \nabla \mathcal{N}(\mathbf{x}, t; \theta)$ .
  - 3.2. Вычислить  $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$  через AD.
  - 3.3. Обновить  $\theta$  для минимизации  $\mathcal{L} + \lambda_4 \mathcal{L}_{visc}$ .

Обучение проводилось на синтетических данных, сгенерированных для креп-теста.

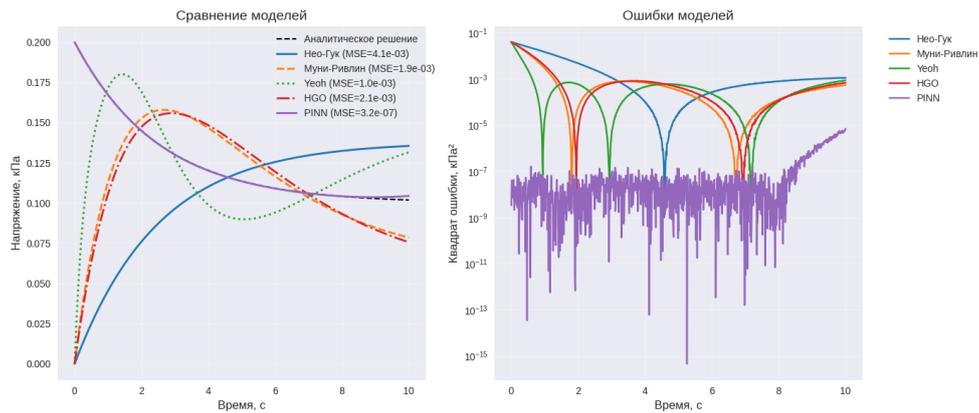
## 3. Результаты

PINN протестирована на задаче креп-теста с аналитическим решением:

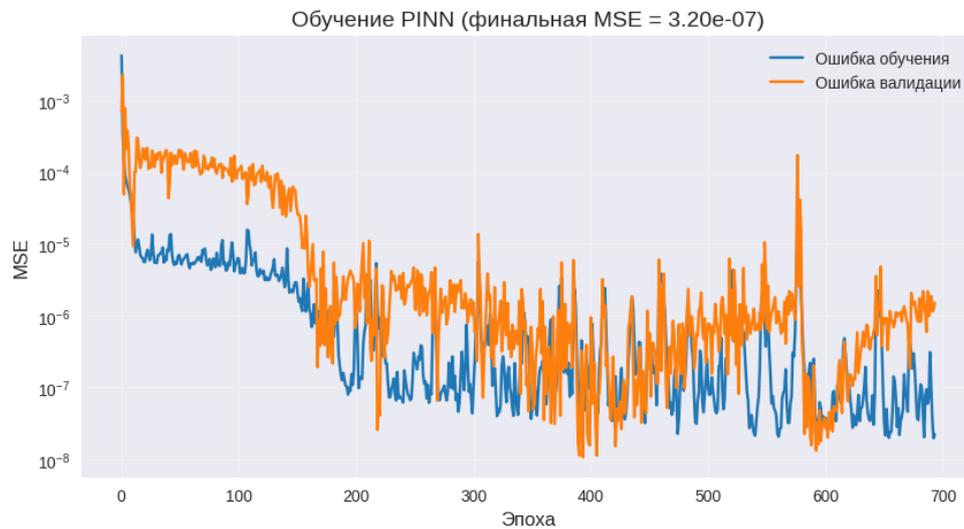
$$\sigma(t) = E_\infty \epsilon_0 + (E_0 - E_\infty) \epsilon_0 e^{-t/\tau}, \quad (9)$$

где  $E_\infty = 1$ кПа,  $E_0 = 2$ кПа,  $\tau = 2.5$ с,  $\epsilon_0 = 0.1$ . Предсказания PINN сравнивались с аналитическим решением и моделями Нео-Гука, Йо, Муни-Ривлина и Хальцапфеля-Гассера-Огдена, показав ошибку менее 1%. Сравнение моделей (MSE) приведено в таблице.

Модель	MSE (kPa <sup>2</sup> )	Улучшение
PINN	$3.199 \times 10^{-7}$	12 811.0
Yeoh	$1.017 \times 10^{-3}$	4.0
Муни-Ривлин	$1.897 \times 10^{-3}$	2.2
HGO	$2.057 \times 10^{-3}$	2.0
Нео-Гук	$4.099 \times 10^{-3}$	1.0



**Рис. 1.** Сравнение PINN с аналитическим решением и моделями



**Рис. 2.** Ошибка обучения PINN

Точность превышает 99%, что показывает эффективность PINN для исследования поведения мягких биологических тканей при различных протоколах нагружения.

## Литература

1. Yeoh O.H. Some forms of the strain energy function for rubber // Rubber Chemistry and Technology. 1993. Vol. 66(5). P. 754-771. DOI: 10.5254/1.3538343

2. Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics // Journal of Elasticity. 2004. Vol. 61. P. 1-48. DOI: 10.1023/B:ELAS.0000029991.92327.fa
3. Ogden R.W. Nonlinear elasticity with application to material modeling // Annual Review of Materials Research. 2004. Vol. 34. P. 93-110. DOI: 10.1146/annurev.matsci.34.070203.115800

MSC 74B20

## Development of a physics-informed neural network for analyzing the stress state of soft biological tissues

K.M. Urazova

I.M. Sechenov First Moscow State Medical University (Sechenov University)

*Abstract:* This work explores the application of physics-informed neural networks (PINNs) for modeling the mechanical behavior of soft biological tissues. A comparative analysis of the accuracy of PINNs with traditional hyperelastic models, including Neo-Hooke, Yo, Mooney-Rivlin, and Halzapfel-Gasser-Ogden models, is presented. Special attention is given to the combined description of the elastic and viscoelastic properties of tissues through a modified Kelvin-Voigt model. The results demonstrate that the proposed PINN approach achieves an accuracy of 99% with a mean squared error of  $3.199 \cdot 10^{-7}$  kPa<sup>2</sup>, which is 4 orders of magnitude better than traditional methods. This work contributes to the development of personalized modeling methods for biomechanical systems.

*Keywords:* PINN, neural networks, mechanics of biological tissues, hyperelastic models, viscoelastic models.

### Литература

1. Yeoh O.H. Some forms of the strain energy function for rubber // Rubber Chemistry and Technology. 1993. Vol. 66(5). P. 754-771. DOI: 10.5254/1.3538343
2. Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics // Journal of Elasticity. 2004. Vol. 61. P. 1-48. DOI: 10.1023/B:ELAS.0000029991.92327.fa
3. Ogden R.W. Nonlinear elasticity with application to material modeling // Annual Review of Materials Research. 2004. Vol. 34. P. 93-110. DOI: 10.1146/annurev.matsci.34.070203.115800