

УДК 519.63:539.3

Численное исследование зависимости прогиба чувствительного элемента датчика давления от параметров системы

Тамарова Ю.А.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: Рассматривается механическая система «трубопровод – датчик давления» с прямоугольной формой сечения трубопровода. С помощью программного комплекса исследуется зависимость деформации чувствительного элемента датчика давления от параметров механической системы измерения, а именно, толщины элемента, приложенного усилия, коэффициента Пуассона. Приведены графики зависимостей деформации чувствительного элемента датчика.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, упругий элемент, камера сгорания, деформация, динамика.

1. Постановка задачи

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей модели системы измерения давления в камере сгорания двигателя для трубопровода с сечением S прямоугольной формы [1, 2], содержит следующие уравнения и условия:

– уравнение, описывающее движение рабочей среды (в модели идеального газа) в трубопроводе

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (1)$$

– условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента

$$\varphi_y(x, 0, z, t) = \varphi_y(x, a, z, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad z \in (0, b), \quad (2)$$

$$\varphi_z(x, y, 0, t) = \varphi_z(x, y, b, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a), \quad (3)$$

$$\varphi_x(l, y, z, t) = w_t(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (4)$$

– условие, определяющее закон изменения давления на входе в трубопровод

$$-\rho_0 \varphi_t(0, y, z, t) = P(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (5)$$

– уравнение, описывающее динамику упругого элемента

$$\begin{aligned} L(w(y, z, t)) &\equiv m w_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta (\Delta^2 w)_t + \alpha w_t + \gamma w = \\ &= P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, y, z, t) - P_*, \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } \Delta w = w_{yy} + w_{zz}, \quad \Delta^2 w = w_{yyyy} + 2w_{yyzz} + w_{zzzz}.$$

В (1)-(6) $\varphi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе; $w(y, z, t)$ – деформация упругого элемента (прямоугольной пластины), расположенного в конце трубопровода $x = l$; $P(y, z, t)$ – заданный закон изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод

(на выходе из камеры сгорания) $x = 0$; ρ_0, P_0, a_0 – плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; P_* – внешнее воздействие на упругий элемент; $m = \rho_{pl} h_{pl}$ – погонная масса упругого элемента с плотностью ρ_{pl} и толщиной h_{pl} ; $D = \frac{E h_{pl}^3}{12(1 - \nu^2)}$ – изгибная жесткость упругого элемента (E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона); N – сжимающее (растягивающее) элемент усилие; β – коэффициент внутреннего демпфирования; α, γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи; индексы x, y, z, t снизу обозначают частные производные по координатам x, y, z и времени t .

Задача (1)-(6) должна быть дополнена начальными условиями для функций $\varphi(x, y, z, t)$, $w(y, z, t)$, а также граничными условиями для $w(y, z, t)$, соответствующими типу закрепления упругого элемента.

В работе [2] с помощью введения интегральных характеристик основных динамических величин решение задачи (1)-(6) сведено к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего функцию $\theta(t)$ (характеризует деформацию упругого элемента датчика) с функцией $G(t)$ (характеризует закон изменения давления рабочей среды в двигателе)

$$m_0 \left[\ddot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \alpha_0 \left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \gamma_0 \left[\theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] - \rho_0 a_0 w_0 \left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = 2 [G(t) + (P_0 - P_*)S]. \quad (7)$$

В (7)

$$\begin{aligned} G(t) &= \iint_C P(y, z, t) dS, \quad C = \{(y, z) : 0 \leq y \leq a; 0 \leq z \leq b\}, \quad dS = dydz, \\ w(y, z, t) &= \theta(t)g(y, z), \quad m_0 = m \iint_C g(y, z) dS, \\ \alpha_0 &= \alpha \iint_C g(y, z) dS + \beta \iint_C \Delta^2 g(y, z) dS, \\ \gamma_0 &= D \iint_C \Delta^2 g(y, z) dS + N \iint_C \Delta g(y, z) dS + \gamma \iint_C g(y, z) dS, \quad w_0 = \iint_C g(y, z) dS. \end{aligned}$$

Функция $g(y, z)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим жесткому заземлению:

$$g(a, z) = g_y(a, z) = g(y, b) = g_z(y, b) = 0. \quad (8)$$

Введем малый параметр ε , равный отношению длины l (может достигать нескольких метров) к скорости звука a_0 . Тогда из дифференциального уравнения (7) с отклоняющимся аргументом получим приближенное уравнение, которое связывает между собой функции $\theta(t)$ и $G(t)$

$$\begin{aligned} (m_0 + \rho_0 w_0 l) \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\left(m_0 + \frac{1}{3} \rho_0 w_0 l \right) \theta^{(4)}(t) + \alpha_0 \ddot{\theta}(t) + \gamma_0 \dot{\theta}(t) \right] + \\ + O(\varepsilon^4) = G(t) + (P_0 - P_*)S \end{aligned} \quad (9)$$

и является основой для численного эксперимента.

2. Численный эксперимент

Численный эксперимент проводился на основе программного комплекса для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления» [3] с целью исследования зависимости величины деформации упругого элемента датчика от толщины пластины h_{pl} , от растягивающего усилия N , от коэффициента Пуассона ν .

Рассматривается механическая система с параметрами: $P_0 = 101325$, $P_* = 0$, $a_0 = 343$, $l = 3$, $P(y, z, t) = 6 \cdot 10^6 - 5.4 \cdot 10^5 \cdot t^2$, $\alpha = 0.3$, $\gamma = 0.2$, $\beta = 0.1$. Рабочая среда – воздух ($\rho_0 = 1.225$). Пластина размером $a = b = 0.01$ и толщиной h_{pl} изготовлена из стали: $E = 2 \cdot 10^{11}$, $\rho_{pl} = 7850$, $\nu = 0.28$. Все значения приведены в системе СИ.

Начальные условия для решения уравнения (9) заданы в виде: $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = 0$. Также задана функция $g(y, z) = (y - a)^2 \cdot (z - b)^2$, которая удовлетворяет граничным условиям (8). На рис. 1 представлены результаты расчета при $h_{pl} = 0.0005$, $N = 0$ и $\nu = 0.28$.

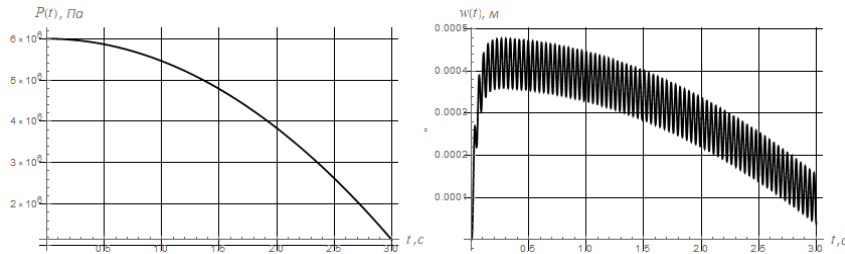


Рис. 1. Графики закона изменения давления и деформации упругого элемента

В табл. 1 и на рис. 2 представлены результаты численного эксперимента при $N = 0$, $\nu = 0.28$ и различном задании толщины пластины h_{pl} . Для каждого значения толщины пластины h_{pl} указано наибольшее значение деформации упругого элемента w .

Таблица 1: Зависимость деформации упругого элемента от толщины пластины

h_{pl} , м	w , м	h_{pl} , м	w , м	h_{pl} , м	w , м	h_{pl} , м	w , м	h_{pl} , м	w , м
0.00050	0.00050	0.00065	0.00025	0.00080	0.00015	0.00095	0.00010	0.00110	0.00007
0.00055	0.00037	0.00070	0.00021	0.00085	0.00013	0.00100	0.00009	0.00115	0.00006
0.00060	0.00030	0.00075	0.00018	0.00090	0.00012	0.00105	0.00008	0.00120	0.00005

В табл. 2 и на рис. 3 представлены результаты численного эксперимента при $h_{pl} = 0.0005$, $\nu = 0.28$ и различном задании растягивающего усилия N .

В табл. 3 и на рис. 4 представлены результаты численного эксперимента при $h_{pl} = 0.0005$, $N = 0$ и различном задании коэффициента Пуассона ν .

Проведенный эксперимент позволяет сделать следующие выводы: функции зависимости деформации упругого элемента датчика от толщины пластины h_{pl} и от растягивающего усилия N имеют гиперболический характер – с увеличением данных величин отклонение пластины понижается; с увеличением коэффициента Пуассона происходит уменьшение деформации упругого элемента датчика.

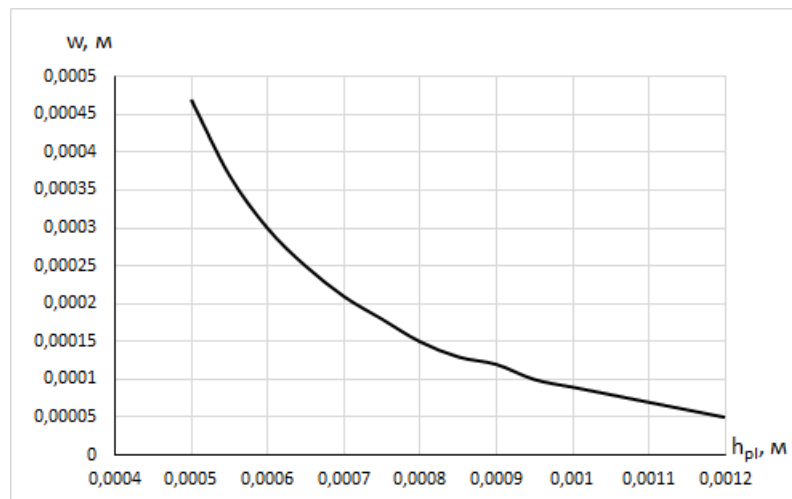


Рис. 2. График зависимости деформации упругого элемента от толщины пластины

Таблица 2: Зависимость деформации упругого элемента от растягивающего усилия

$N, \text{Н}$	$w, \text{м} \times 10^{-3}$	$N, \text{Н}$	$w, \text{м} \times 10^{-3}$	$N, \text{Н}$	$w, \text{м} \times 10^{-3}$
0	0.47	10^5	0.23	$5 \cdot 10^5$	0.088
10^4	0.42	$2 \cdot 10^5$	0.16	$7.5 \cdot 10^5$	0.065
$5 \cdot 10^4$	0.29	$3 \cdot 10^5$	0.13	10^6	0.050
$7.5 \cdot 10^4$	0.25	$4 \cdot 10^5$	0.10	$2 \cdot 10^6$	0.027

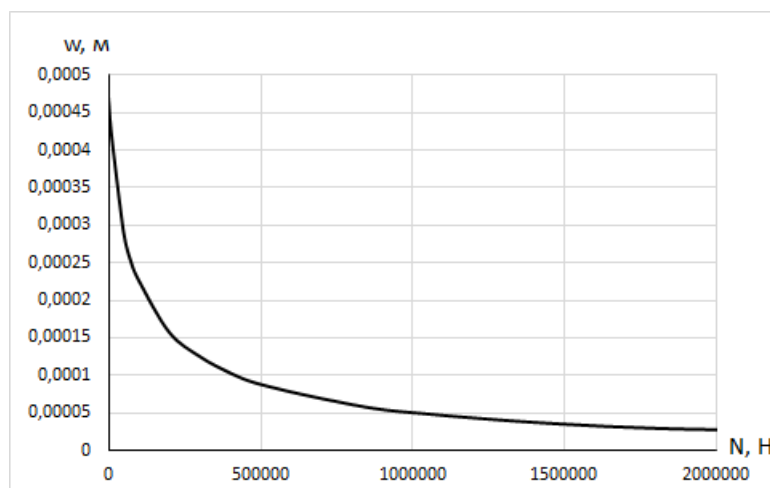


Рис. 3. График зависимости деформации упругого элемента от растягивающего усилия

Литература

1. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 3. С. 352-367.

Таблица 3: Зависимость деформации упругого элемента от коэффициента Пуассона

ν	$w, \text{ м} \times 10^{-3}$	ν	$w, \text{ м} \times 10^{-3}$	ν	$w, \text{ м} \times 10^{-3}$
0.25	0.482	0.28	0.475	0.31	0.467
0.26	0.479	0.29	0.472	0.32	0.464
0.27	0.477	0.30	0.469	0.33	0.461

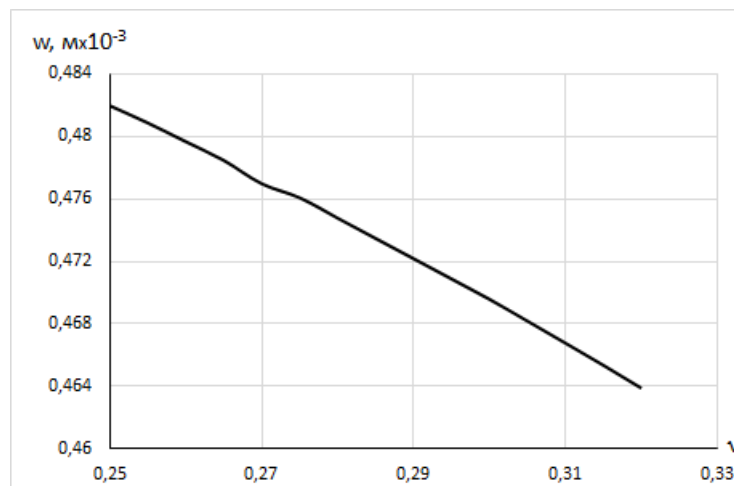


Рис. 4. График зависимости деформации упругого элемента от коэффициента Пуассона

- Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод - датчик давления» // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2024. № 2. С. 1-15. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08.
- Тамарова Ю. А., Вельмисов П. А., Анкилов А. В. Комплекс программ для математического моделирования механической системы «трубопровод - датчик давления»: свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2022615319. Заявка № 2022615014 от 28.03.2022; зарегистрировано 30.03.2022.

MSC 34K99, 65K05

Numerical study of the dependence of the deflection of the sensor element of the pressure sensor on the system parameters

Yu.A. Tamarova

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The mechanical system «pipeline – pressure sensor» with a rectangular cross-section of the pipeline is considered. Using the software package, the dependence of the deformation of the sensitive element of the pressure sensor on the parameters of the mechanical measurement system, namely, the thickness of the element, the applied force, the Poisson ratio, is investigated. Graphs of the dependences of the deformation of the sensitive element of the sensor are given.

Keywords: aerohydroelasticity, elastic element, combustion chamber, deformation, dynamics.

References

1. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Matematicheskoe modelirovanie sistem izmereniya davleniya v gaz-zhidkostnykh sredakh [Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2020. Vol. 22, no. 3. Pp. 352-367. (in Russian)
2. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki aerouprugoy sistemy "truboprovod - datchik davleniya" [Mathematical modeling of aeroelastic system "pipeline - pressure sensor" dynamics] // Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]. 2024. No. 2. Pp. 1-15. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08. (in Russian)
3. Tamarova Yu. A., Velmisov P. A., Ankilov A. V. Kompleks programm dlya matematicheskogo modelirovaniya mekhanicheskoy sistemy "truboprovod - datchik davleniya" [Software package for mathematical modeling of mechanical system "pipeline - pressure sensor"]: certificate of software registration No. 2022615319. Application No. 2022615014 dated 28.03.2022; registered 30.03.2022. (in Russian)