

УДК 519.63:533.6.011

Исследование математических моделей системы измерения давления в газожидкостных средах

Тамарова Ю.А.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: Рассматриваются математические модели системы измерения давления в газожидкостных средах, включающие в себя трубопровод и датчик давления. На основе таких моделей исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Движение рабочей среды описывается как линейной, так и нелинейной моделью механики жидкости и газа. Для исследования рассматриваемых моделей предложен численно-аналитический метод решения на основе метода Галеркина. С помощью разработанных программ в системе Mathematica 12.0 проведен численный эксперимент, позволяющий провести сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей системы измерения давления.

Ключевые слова: система измерения давления, датчик давления, трубопровод, камера сгорания, динамика, дифференциальные уравнения, метод Галеркина.

1. Нелинейная модель системы измерения давления

Математическое описание нелинейной модели механической системы измерения давления рабочей среды в камере сгорания двигателя, представленной в работах [1, 2], содержит следующие уравнения и условия:

— нелинейное уравнение, описывающее движение сжимаемой рабочей среды (в модели идеального газа) в трубопроводе

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x \Phi_{xt} + \Phi_x^2 \Phi_{xx} = \left[a_0^2 - (\chi - 1) \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right] \Phi_{xx}, \quad x \in (0, l_*), \quad (1)$$

— условие, задающее закон изменения давления рабочей среды в камере сгорания (на входе в трубопровод при $x = 0$)

$$P(0, t) = P_0 + P_*(t), \quad (2)$$

— условие непротекания на поверхности поршня, положение которого в каждый момент времени определяется формулой $x = l + w(t)$

$$\Phi_x(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \quad l_* = l + w(t), \quad (3)$$

— уравнение, описывающее движение поршня

$$m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma w(t) = P(l_*(t), t) - P_0 - \bar{P}(t). \quad (4)$$

Давление в потоке определяется формулой Лагранжа-Коши

$$P(x, t) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}}. \quad (5)$$

В (1)-(4) индексы x, t снизу обозначают частные производные по x, t ; точка сверху обозначает производную по t ; $\Phi(x, t)$ – потенциал скорости; $w(t)$ – отклонение поршня от положения равновесия $x = l$; $P(x, t)$ – давление в рабочей газожидкостной среде; P_0 – давление в состоянии покоя; P_* – избыточное давление; $\bar{P}$ – внешнее воздействие (например, давление окружающей среды); a_0 – скорость звука, соответствующая состоянию покоя рабочей среды ($a_0^2 = \frac{\chi P_0}{\rho_0}$, ρ_0 – плотность рабочей среды в состоянии покоя); χ – коэффициент Пуассона; m – масса упругого элемента; α, γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи.

Задачу (1)-(5) необходимо дополнить начальными условиями.

С учетом условия (5) условие (2) запишется в виде

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right)_{x=0} = \psi(t) \equiv \frac{a_0^2}{\chi - 1} \left[1 - \left(1 + \frac{P_*(t)}{P_0} \right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} \right]. \quad (6)$$

После перехода к функциям $u = \Phi_x, v = \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2$ уравнения, соответствующие рассматриваемой математической модели, примут вид [1, 2]

$$v_t + uv_x - [a_0^2 - (\chi - 1)v] u_x = 0, \quad (7)$$

$$v_x - u_t - uu_x = 0, \quad (8)$$

$$v(0, t) = \psi(t), \quad (9)$$

$$u(l_*, t) = \dot{w}(t), \quad l_* = l + w(t), \quad (10)$$

$$m\ddot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} v(l_*, t) \right]^{\frac{\chi}{\chi-1}} - P_0 - \bar{P}(t). \quad (11)$$

С учетом (9), (10), функции $u(x, t), v(x, t)$ ищутся в виде отрезков степенных рядов

$$u(x, t) = \dot{w}(t) + \sum_{n=1}^N u_n(t)(l_* - x)^n, \quad (12)$$

$$v(x, t) = \psi(t) + \sum_{k=1}^N v_k(t)x^k. \quad (13)$$

Согласно методу Галеркина, подставляя (12), (13) в (7), (8) и записывая условия ортогональности полученных невязок к поверочным функциям $\{\theta_n(x)\}$, образующим на $[0, l_*]$ полную систему функций, получим $2N$ уравнений для $(2N+1)$ функции $w(t), u_1(t), \dots, u_N(t), v_1(t), \dots, v_N(t)$. К полученным уравнениям следует добавить уравнение (11). В силу граничных условий (9), (10) в качестве поверочных функций $\theta_n(x)$ выбраны функции

$$\theta_n(x) = x^n(l_* - x), \quad n = 1 \div \infty. \quad (14)$$

Задача решалась при $N = 4$. После подстановки (12), (13) в (7), (8), умножим полученные невязки на $x(l_* - x), x^2(l_* - x), x^3(l_* - x), x^4(l_* - x)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до l_* . Тогда получим восемь нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)$.

Добавим уравнение (11), которое в этом случае будет иметь вид

$$m\ddot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + v_1(t)l_* + v_2(t)l_*^2 + v_3(t)l_*^3 + v_4(t)l_*^4) \right]^{\frac{\chi}{\chi-1}} - P_0 - \bar{P}(t).$$

Также следует задать начальные условия для функций $w(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, $u_4(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$, $v_4(t)$.

Таким образом, будем иметь задачу Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для численного эксперимента.

2. Линейная модель системы измерения давления

Линейная математическая модель, соответствующая рассматриваемой механической системе, для функций $\Phi(x, t)$, $w(t)$, имеет вид

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), \quad (15)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = P_*(t), \quad (16)$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{w}(t), \quad (17)$$

$$m\ddot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w = -\rho_0 \Phi_t(l, t) - \bar{P}. \quad (18)$$

Потенциал скорости $\Phi(x, t)$ представим в виде отрезка ряда по полной на отрезке $[0, l]$ системе функций $g_m(x) = \sin \nu_m x$, удовлетворяющих однородным граничным условиям $g_m(0) = 0$, $g'_m(l) = 0$, соответствующим условиям (16), (17)

$$\Phi(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{m=1}^M \psi_m(t) \sin \nu_m x, \quad \nu_m = \frac{(2m-1)\pi}{2l}. \quad (19)$$

Удовлетворяя условиям (16), (17), находим

$$\dot{a} = -\frac{1}{\rho_0} P_*(t), \quad \dot{b} = \dot{w}(t). \quad (20)$$

После подстановки (19), (20) в (15), (18) получим

$$\sum_{m=1}^M \left[\ddot{\psi}_m(t) + a_0^2 \nu_m^2 \psi_m(t) \right] \sin \nu_m x = \frac{1}{\rho_0} \dot{P}_*(t) - \ddot{w}(t)x, \quad (21)$$

$$P_*(t) - \rho_0 \sum_{m=1}^M \dot{\psi}_m(t) \sin \nu_m l - \rho_0 l \ddot{w}(t) = m\ddot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w + \bar{P}. \quad (22)$$

Записывая условия ортогональности невязки уравнения (21) к базисным функциям $\{\sin \nu_k x\}_{k=\overline{1, M}}$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\psi}_k(t) + a_0^2 \nu_k^2 \psi_k(t) = \frac{2}{l \rho_0 \nu_k} \dot{P}_*(t) - 2 \ddot{w}(t) \frac{\sin \nu_k l}{l \nu_k^2}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (23)$$

Продифференцируем уравнение (22)

$$\dot{P}_*(t) - \rho_0 l \sum_{m=1}^M \ddot{\psi}_m(t) \sin \nu_m l - \rho_0 l \ddot{w}(t) = m\ddot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma\dot{w}. \quad (24)$$

Также следует задать начальные условия для функций $w(t)$, $\psi_k(t)$, $k = \overline{1, M}$.

Таким образом, система обыкновенных дифференциальных уравнений (23), (24) для функций $w(t)$, $\psi_k(t)$, $k = \overline{1, M}$ представляет собой задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента.

3. Численный эксперимент

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда – воздух ($\rho_0 = 1.225$). Другие параметры механической системы: $P_0 = 101325$, $\overline{P} = 0$, $m = 0.01$, $a_0 = 332$, $\chi = 1.5$, $l = 3$, $\alpha = 10^9$ (все значения приведены в системе СИ).

Для линейной модели (15)-(18) численный эксперимент проводился при $M = 10$. Начальные условия заданы в виде: $\psi_k(0) = 0$, $k = \overline{1, 10}$, $w(0) = w'(0) = w''(0) = 0$.

Для нелинейной модели (7)-(11) (при $N = 4$) численный эксперимент проводился при начальных условиях $w(0) = w'(0) = u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = u_4(0) = v_1(0) = 0 = v_2(0) = v_3(0) = v_4(0) = 0$.

На рис. 1, 2 представлены результаты численных расчетов при различном задании параметра γ и избыточного давления $P_*(t)$ ($w(t)$ – в метрах, $P_*(t)$ – в атмосферах). Черной сплошной линией показано отклонение $w(t)$, полученное в линейной модели, а пунктирной линией – в нелинейной модели.

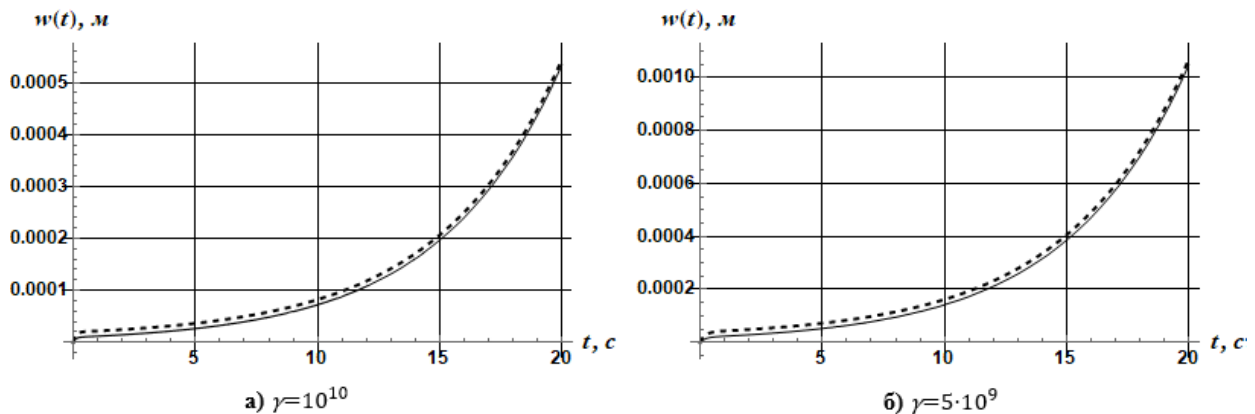


Рис. 1. Результаты численного эксперимента при $P_*(t) = 10^5 \cdot e^{0.2t}$.

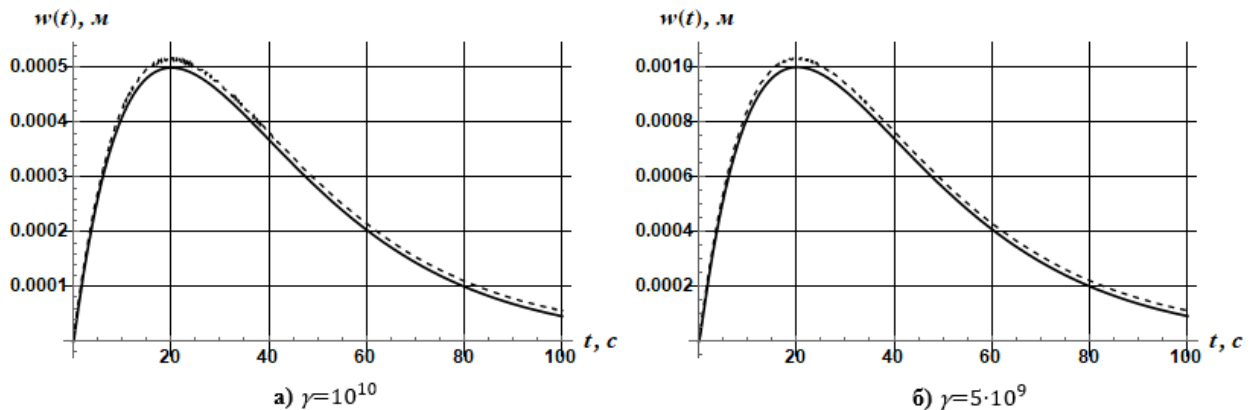


Рис. 2. Результаты численного эксперимента при $P_*(t) = 2.5 \cdot 10^5 \cdot t \cdot e^{(1-0.05t)}$.

Графики на рис. 1 соответствует запуску двигателя, на рис. 2 – запуску и оста-

новке двигателя.

Из рис. 1, 2 видно, что при использовании линейной модели, в отличие от нелинейной, величина перемещения поршня изменяется с наложением колебательного процесса.

Литература

1. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Нелинейная математическая модель систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал СВМО. 2023. Т. 25, № 4. С. 313-325.
2. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Исследование нелинейной математической модели механической системы «трубопровод-датчик давления» // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 24-37.
3. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем: монография. Ульяновск: УлГТУ, 2018. 200 с.
4. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод - датчик давления» // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2024. № 2. С. 1-15. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08.
5. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the "pipeline - pressure sensor" system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1353. P. 1-6.
6. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modelling of the mechanical system "pipeline - pressure sensor" // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2172. Art. 030006.
7. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2021. Vol. 255, no. 5. P. 587-594.

MSC 49K20, 76N15

Research of mathematical models of pressure measurement system in gas-liquid environments

Yu.A. Tamarova

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The mathematical models of the pressure measurement system in gas-liquid environments containing a pipeline and a pressure sensor are considered. Based on such models, the joint dynamics of the sensitive element of the pressure sensor and the working medium in the pipeline are investigated. The motion of the working medium is described by both a linear and a nonlinear model of fluid and gas mechanics. To study the models under consideration, a numerical-analytical solution method based on the Galerkin method is proposed. Using the developed programs in the Mathematica 12.0 system, a numerical experiment was conducted, allowing a comparative analysis of the linear and nonlinear models of the pressure measurement system.

Keywords: pressure measurement system, pressure sensor, pipeline, combustion chamber, dynamics, differential equations, Galerkin method.

References

1. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Nonlinear mathematical model of pressure measurement systems in gas-liquid media // Journal of SVMO. 2023. Vol. 25, no. 4. P. 313-325. (Original Russian version)
2. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Study of nonlinear mathematical model of mechanical system "pipeline-pressure sensor" // University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. 2024. No. 1. P. 24-37. (Original Russian version)
3. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Study of dynamics of deformable elements of some aero-hydroelastic systems: monograph. Ulyanovsk: UlSTU, 2018. 200 p. (Original Russian version)
4. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Mathematical modeling of aeroelastic system "pipeline - pressure sensor" dynamics // PNRPU Mechanics Bulletin. 2024. No. 2. P. 1-15. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08. (Original Russian version)
5. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the "pipeline - pressure sensor" system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1353. Art. 012001. P. 1-6.
6. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modelling of the mechanical system "pipeline - pressure sensor" // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2172. Art. 030006. P. 1-8.
7. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2021. Vol. 255, no. 5. P. 587-594.