

УДК 519.63

Многомерный оператор градиента высокого порядка в гидродинамике сглаженных частиц*

Стояновская О.П.

Институт гидродинамики им.М.А.Лаврентьева СО РАН

Аннотация: В работе проведено обобщение дискретного оператора дифференцирования для гидродинамики сглаженных частиц, который в одномерном случае в паре с ядрами высокого порядка образует Т-устойчивый метод, на пространство любой размерности. В вычислительных экспериментах показано, что проектируемый четвертый порядок аппроксимации градиента достигается на практике.

Ключевые слова: гидродинамика сглаженных частиц, Т-устойчивость, ядра высокого порядка, полиномы Вендланда

Гидродинамика сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) представляет собой метод аппроксимации уравнений в частных производных на подвижных нерегулярно расположенных в пространстве узлах [1]. Эта аппроксимация выполняется с использованием гладкой финитной функции – ядра, носитель которого охватывает несколько частиц. Классические ядра представляют собой положительные монотонно убывающие функции радиального базиса, и как правило, являются полиномами. Для SPH известна проблема неустойчивости коротких волн (tensile instability). Это вид счетной неустойчивости, которая определяется способом пространственной аппроксимации (видом дискретных дифференциальных операторов и формой ядра) и реализуется при любом, в том числе точном интегрировании по времени [2]. Необходимое условие отсутствия такой неустойчивости в SPH формулируется в терминах знакоопределенности интегрального преобразования от ядра. Конкретный вид этого преобразования определяется формой дискретного дифференциального оператора (может быть преобразованием Фурье от самого ядра или от выражений, зависящих от ядра). Для классического способа аппроксимации дифференциальных операторов (применение дифференцирования к гладкому ядру) необходимым условием устойчивости является неотрицательность Фурье-образа ядра. Известен способ построения полиномов любой гладкости, Фурье-образ которых гарантированно положителен (например, полиномы Вендланда). Методы, для которых выполняется необходимое условие устойчивости, называются Т-устойчивыми.

Известно, что классические ядра позволяют аппроксимировать произвольную функцию не более чем со вторым порядком аппроксимации по радиусу ядра. Одна из идей для конструирования методов высокого порядка на основе SPH – использование знакопеременных немонотонных ядер, полученных по известному алгоритму на базе классических. Ранее было установлено, что если взять метод решения уравнений невязкой газовой динамики (пара: классическая схема и классическое ядро), который является Т-устойчивым, а затем заменить в этой паре классическое ядро на ядро высокого порядка, то получившийся в результате метод потеряет Т-устойчивость. Кроме того, был найден конкретный вид дискретного оператора дифференцирования в одномерном случае, который в паре с ядрами высокого порядка образует Т-устойчивый метод. Этот оператор представляет собой комбинацию

*Исследование проведено за счет гранта Российского научного 23-11-00142.

конечно-разностного подхода и SPH. В настоящей работе эта комбинация впервые обобщена на многомерный случай. В вычислительных экспериментах показано, что проектируемый четвертый порядок аппроксимации достигается на практике.

Литература

1. Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics // Reports on Progress in Physics. 2005. Vol. 68. DOI: 10.1088/0034-4885/68/8/R01.
2. Dehnen W., Aly H. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. Vol. 425. P. 1068-1082. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x.

MSC 76M28

High-order multidimensional gradient operator in smoothed particle hydrodynamics

O.P. Stoyanovskaya

Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS

Abstract: The paper generalizes the discrete differentiation operator for smoothed particle hydrodynamics, which in the one-dimensional case together with high-order kernels forms a T-stable method, to a space of any dimension. Computational experiments show that the projected 4th order of gradient approximation is achieved in practice.

Keywords: smoothed particle hydrodynamics, T-stability, high-order kernels, Wendland polynomials

References

1. Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics // Reports on Progress in Physics. 2005. Vol. 68. DOI: 10.1088/0034-4885/68/8/R01.
2. Dehnen W., Aly H. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. Vol. 425. P. 1068-1082. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x.