

УДК 517.63

SU(2)-расширения квазипериодических потоков

Сахаров А.Н.

Нижегородский государственный аграрно-технологический
университет им. Л.Я. Флорентьева

Аннотация: В докладе рассматривается структура системы на многомерном торе, получающаяся в результате приведения к треугольному виду линейной системы 2-го порядка с комплексными квазипериодическими коэффициентами. Описание этой структуры позволяет сформулировать необходимые и достаточные условия структурной устойчивости исходной линейной системы. Эти условия определяются свойствами топологического инварианта потока на торе – вектором вращения.

Ключевые слова: линейные расширения потоков на торе, групповые расширения, вектор вращения.

1. Проективное расширение линейной системы

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ – угловые координаты на торе $\mathbb{T}^m$, а матрица $A(\varphi)$ – непрерывная функция на торе. Тогда система

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad x \in \mathbb{C}^2 \quad (1)$$

определяет поток на $\mathbb{T}^m \times \mathbb{C}^2$, который называется линейным расширением потока на торе. Если компонентны вектора ω рационально независимы, то поток на торе квазипериодический. Будем считать, что $\text{tr} A(\varphi) = 0$, так что

$$A(\varphi) = a(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Переходя в системе (1) к аффинным координатам $z = \frac{x_1}{x_2}$, получаем уравнение Рикати с квазипериодическими коэффициентами

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{z} = 2c(\varphi)z - (b(\varphi) + a(\varphi))z^2 + b(\varphi) - a(\varphi). \quad (2)$$

Это уравнение определяет *проективный поток*, индуцированный линейной системой (1).

Отображение $z \rightarrow 2c(\varphi)z - (b(\varphi) + a(\varphi))z^2 + b(\varphi) - a(\varphi)$ является конформным отображением при фиксированном φ . Замена $w = \frac{1}{z}$ переводит уравнение (1) в уравнение $\dot{w} = -2c(\varphi)w - (b(\varphi) - a(\varphi))w^2 + b(\varphi) + a(\varphi)$, которое регулярно в ∞ . Любое конформное отображение сферы Римана является преобразованием Мёбиуса. Таким образом, фазовое пространство проективного потока – расслоение $\mathbb{T}^m \times S^2$, причем поток действует на слоях дробно-линейными преобразованиями. Круговое свойство этих преобразований позволяет установить следующий результат [1].

Теорема 1. *Проективный поток имеет либо одно, либо два минимальных множества, либо фазовое пространство является дизъюнктивным объединением гомеоморфных друг другу минимальных множеств.*

Если проективный поток имеет инвариантный тор, то дальнейшее его исследование сводится к изучению структуры потока на инвариантном торе, который имеет топологический инвариант – число вращения слоя [2]. В общем случае существование такого инварианта можно доказать с помощью следующей конструкции.

2. $SU(2)$ -расширение системы

Преобразуем систему (1) к треугольному виду с помощью группового расширения. Подробно алгоритм приведения линейной системы к треугольному виду описан в [3]. Здесь в качестве группы расширения естественно выбрать компактную группу унитарных унимодулярных матриц 2-го порядка $SU(2)$. После замены $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$, где $U \in SU(2)$, получаем уравнение

$$U^* \dot{U} = U^* A(\varphi) U - T(\varphi, U),$$

где $T(\varphi, U)$ – верхнетреугольная матрица с вещественной диагональю. Если

$$a(\varphi) = a_r(\varphi) + ia_i(\varphi),$$

$$b(\varphi) = b_r(\varphi) + ib_i(\varphi),$$

$$c(\varphi) = c_r(\varphi) + ia_i(\varphi),$$

то эрмитова и антиэрмитова части $A(\varphi)$ имеют вид

$$S(\varphi) = ia_i(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_r(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_r(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R(\varphi) = a_r(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + ib_i(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + ic_i(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда U является решением системы

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad U^* \dot{U} = U^* R(\varphi) U + P^*(\varphi, U) - P(\varphi, U), \quad (3)$$

где $P(\varphi, U)$ – верхнетреугольная матрица с чисто мнимой диагональю.

Система (3) определяет поток на $\mathbb{T}^m \times SU(2)$. Сужение этого потока на $\mathbb{T}^m \times S^2$ – проективный поток, индуцируемый (1). Запишем уравнения, определяющий этот поток в сферических координатах. Матрица $U \in SU(2)$ в этих координатах имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{i\frac{\theta_1}{2}} & i \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i\frac{\theta_1}{2}} \\ i \sin \frac{\theta_2}{2} e^{-i\frac{\theta_1}{2}} & \cos \frac{\theta_2}{2} e^{-i\frac{\theta_1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Пусть эрмитова часть матрицы $A(\varphi)$ диагональна. Эрмитова матрица подобна вещественной диагональной с помощью унитарного преобразования [4, § 13, теорема 7].

$$S(\varphi) = c_r(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3) преобразуется в систему на торе $\mathbb{T}^{m+2}$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\theta}_1 = 2c_i(\varphi), \\ \dot{\theta}_2 = 2b_i(\varphi) \cos(\theta_1) + 2a_r(\varphi) \sin \theta_1 - 2c_r(\varphi) \sin \theta_2. \end{cases} \quad (4)$$

Если матрица $A(\varphi)$ вещественная, то есть $c_i(\varphi) \equiv 0$, то система (4) сводится к частному случаю (2) при $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$. Для произвольной матрицы $A(\varphi)$ также получим систему на торе $\mathbb{T}^{m+2}$.

Итак, анализ структуры системы (1) сводится к изучению ее проективного расширения. Дифференциальные уравнения, определяющие проективное расширение, задают неособое векторное поле на торе $\mathbb{T}^{m+2}$.

Теорема 2. Поток, определяемый системой (4) имеет вектор вращения слоя $\rho = (\rho_1, \rho_2)$.

Доказательство аналогично доказательству существованию вектора вращения для систем на торе $\mathbb{T}^{m+2}$, приведенное в [3].

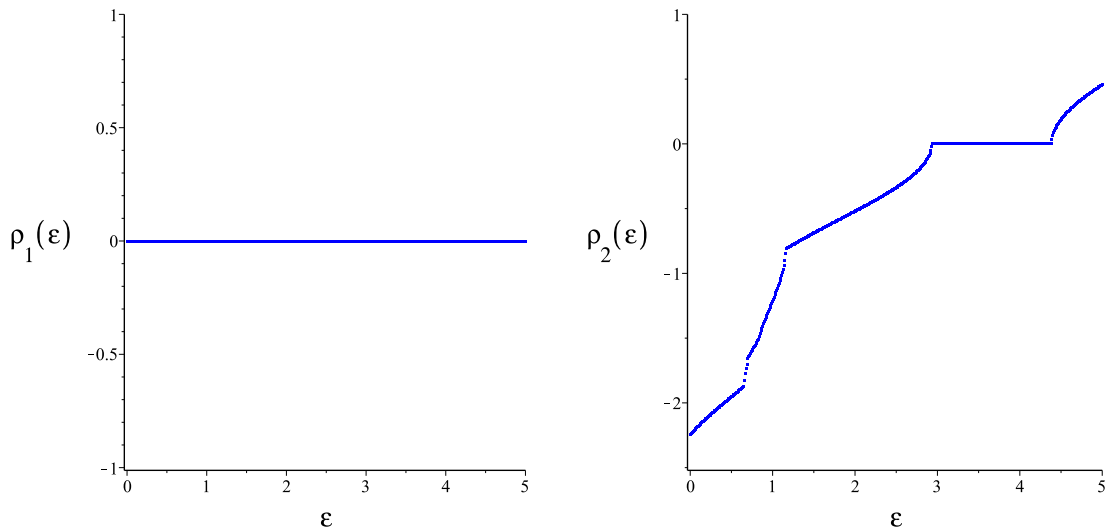


Рис. 1. Вектор вращения слоя системы вида (4) с параметром ϵ в 3-ем уравнении.

На графике зависимости ρ_2 от параметра наблюдаются ступеньки – интервалы постоянства. Это возможно только в случае, когда вектор (ω, ρ_2) резонансный. Достаточно простые рассуждения приводят к справедливости следующего утверждения в предположении, что вектор ω , определяющий поток на базе расслоения $\mathbb{T}^m \times \mathbb{T}^2$ фиксирован.

Теорема 3. Система (4) равномерно гиперболична тогда и только тогда, когда ρ_2 принадлежит интервалу постоянства.

В заключение заметим, что имеется пример К. Палмера [5] равномерно гиперболической системы вида (1), которая не приводима к диагональному виду никаким квазипериодическим преобразованием. Представление уравнений проективного потока в сферических координатах, возможно, прояснит причину этого явления.

Литература

1. Коломиец М. Л., Сахаров А. Н. Классификация проективных расширений квазипериодических потоков // Труды VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». Нижний Новгород, 2008. Т. 1. С. 295-299.
2. Веременюк В. В. Существование числа вращения уравнения $\dot{x} = \lambda(t, x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 6. С. 1073-1076.
3. Сахаров А. Н. Множества вращения $SO(3)$ -расширений квазипериодических потоков // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 2. С. 171-184. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.171-184.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 367 с.
5. Palmer K. On the Reducibility of Almost Periodic Systems of Linear Differential Equations // Journal of Differential Equations. 1980. Vol. 36. P. 374-390.

MSC 34D20

SU(2) extensions of quasiperiodic flows

A.N. Sakharov

Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University
named after L.Ya. Florentyev

Abstract: The report examines the structure of a system on a multidimensional torus, obtained as a result of reducing a second-order linear system with complex quasiperiodic coefficients to a triangular form. The description of this structure allows us to formulate necessary and sufficient conditions for the structural stability of the original linear system. These conditions are determined by the properties of the topological invariant of the flow on the torus – the rotation vector.

Keywords: linear extensions of flows on a torus, group extensions, rotation vector.

References

1. Kolomiets M. L., Sakharov A. N. Klassifikatsiya proektivnykh rasshirenii kvaziperiodicheskikh potokov [Classification of projective extensions of quasiperiodic flows] // Trudy VII Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii "Nelineinnye kolebaniya mekhanicheskikh sistem"[Proceedings of the VII All-Russian Scientific Conference "Nonlinear Oscillations of Mechanical Systems"]. Nizhny Novgorod, 2008. Vol. 1. P. 295-299. (in Russian)
2. Veremenyuk V. V. Sushchestvovanie chisla vrashcheniya uravneniya $\dot{x} = \lambda(t, x)$ s periodicheskoi po x i pochti periodicheskoi po t pravoi chast'yu [Existence of rotation number for the equation $\dot{x} = \lambda(t, x)$ with x -periodic and t -almost periodic right-hand side] // Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]. 1991. Vol. 27, no. 6. P. 1073-1076. (in Russian)
3. Sakharov A. N. Mnozhestva vrashcheniya SO(3)-rasshirenii kvaziperiodicheskikh potokov [Rotation sets of SO(3)-extensions of quasiperiodic flows] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2025. Vol. 27, no. 2. P. 171-184. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.171-184. (in Russian)
4. Bellman R. Vvedenie v teoriyu matrits [Introduction to Matrix Theory]. Moscow: Nauka, 1969. 367 p. (in Russian)
5. Palmer K. On the Reducibility of Almost Periodic Systems of Linear Differential Equations // Journal of Differential Equations. 1980. Vol. 36. P. 374-390.