УДК 519.63

О численно-аналитическом методе решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды в n-мерной сетеподобной области

Провоторов В.В.[1], Рыбаков М.А.[2]

Воронежский государственный университет[1],
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина[2]

Аннотация: В работе предложен численно-аналитический метод решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды в n-мерных сетеподобных областях. Такие задачи возникают в моделях трубопроводных систем, энергосетей, строительных конструкций и др. Метод использует конечно-разностную аппроксимацию производных по всем переменным, кроме одной. Полученная такой аппроксимацией краевая задача для линейной дифференциально-разностной системы решается символьным методом. Разработанный подход позволяет получать приближенные решения в аналитической форме, что существенно расширяет возможности приложений в различных технических задачах.

Ключевые слова: сетеподобная область, начально-краевая задача, уравнение переноса сплошной среды, дифференциально-разностная система.

Пусть задан сетеподобный носитель Γ в пространстве R^n (примеры таких множеств $\Gamma \subset R^n$ см. в [1]). Обозначим совокупность его внешних узлов через $\partial\Gamma$, а количество внутренних узлов через $m_{\text{в}}$. Произвольный i-ый внутренний узел имеет один входящий и k_i выходящих каналов. Пусть S_{il} – сечение (подмножество гиперплоскости) выходящего l-го канала из внутреннего i-го узла, $l = \overline{1, k_i}$, $i = \overline{1, m_{\text{в}}}$. Соответственно, $S_i = \bigcup\limits_{l=1}^{k_i} S_{il}$ – это сечение входящего канала i-го узла. Будем писать S_{il}^{+}, когда рассматриваем это множество как принадлежащее выходящему каналу, и S_{il}^{-} – как принадлежащее входящему каналу.

Пусть заданы числа a_j, b_j, c_j, $j = \overline{1, n}$, и функции $\phi(x)$, $f(x,t)$, $x \in \Gamma$, $t \in (0,T]$. В области $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T] \subset R^{n+1}$ рассмотрим уравнение переноса сплошной среды - уравнение параболического типа относительно искомой функции $u(x,t)$, $x \in \Gamma$, $t \in (0,T]$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2} + b_j \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} + c_j u(x,t) \right) + f(x,t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \phi(x), \tag{2}$$

и краевым условием

$$u(x,t)\big|_{x\in\partial\Gamma} = 0. \tag{3}$$

В любом внутреннем i-м узле для каждого выходящего из него l-го канала полагаем, что должны выполняться условия согласования:

$$u(x,t)\big|_{x\in S_{il}^{-}} = \nu_{il} u(x,t)\big|_{x\in S_{il}^{+}}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\Big|_{x\in S_{il}^-}=\mu_{ij}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\Big|_{x\in S_{il}^+},\qquad j=\overline{1,n},\ \ i=\overline{1,m_{\text{в}}},\ \ l=\overline{1,k_i},\tag{5}$$

где числа $\nu_{il}>0$, $\mu_{ij}>0$ заданы, причем $\sum\limits_{l=1}^{k_i}\nu_{il}=1$, если размерность сетевого носителя $n>1$, и $\nu_{il}=1$ при $n=1$. Относительно начальной функции предполагаем, что $u_0(x,t)\equiv\phi(t)$ удовлетворяет требованиям (2) и (4).

Предлагаемый метод решения задачи (1)–(4) продемонстрируем на примере конкретной задачи. Пусть сетеподобный носитель $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ в R^2 содержит два канала: входящий $\Gamma_1=\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\times[0,\pi]$ и выходящий $\Gamma_2=\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\times[0,\pi]$, примыкающие к единственному внутреннему узлу, имеющему сечение $S=\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}\times[0,\pi]$ (рис. 1).

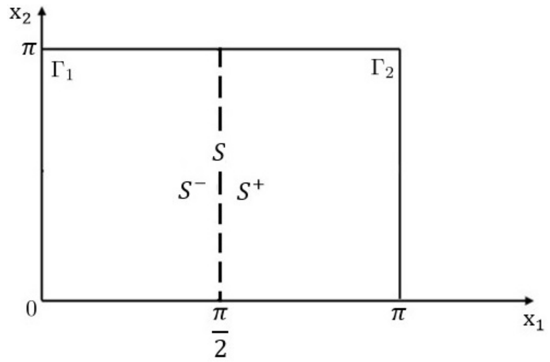

Рис. 1. Сетеподобный носитель Γ в R^2

Для такого сетевого носителя Γ относительно неизвестной функции $u(x_1,x_2,t)$ аргументов $(x_1,x_2)\in\Gamma$, $t\in(0,1)$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2},\tag{6}$$

$$u(x_1,x_2,0)=\sin(x_1)\sin(x_1),\tag{7}$$

$$u(0,x_2,t)=u(\pi,x_2,t)=u(x_1,0,t)=u(x_1,\pi,t)=0.\tag{8}$$

Во внутреннем узле будем требовать выполнения следующих условий согласования:

$$u\left(\frac{\pi}{2}-0,x_2,t\right)=u\left(\frac{\pi}{2}+0,x_2,t\right),\quad \frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\pi/2-0}=\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\pi/2+0}.\tag{9}$$

Для нахождения решения задачи (5)–(8) определим её приближение – дифференциально-разностную систему.

Выберем величины шагов по t и x_2 равными, соответственно, $\tau=\dfrac{1}{10}$ и $h=\dfrac{\pi}{4}$. Тогда узлы аппроксимации будут иметь координаты

$$t_k=\tau k=\frac{k}{10},\ \ k=\overline{0,10},\quad x_{2_l}=hl=\frac{\pi l}{4},\ \ l=\overline{0,4}.$$

При любых $k=\overline{0,10}$, $l=\overline{0,4}$ определим функции $u_{kl}(x_1)=u(x_1,x_{2_l},t_k)$ аргумента $x_1\in[0,\pi]$. Аппроксимируем производные:

$$\frac{\partial u(x_1,x_{2_l},t)}{\partial t}\Big|_{t=t_k}\approx\frac{1}{\tau}\left(u(x_1,x_{2_l},t_k)-u(x_1,x_{2_l},t_{k-1})\right)=\frac{1}{\tau}\left(u_{kl}(x_1)-u_{k-1l}(x_1)\right),$$
$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t_k)}{\partial x_2^2}\Big|_{x_2=x_{2_l}}\approx\frac{1}{h^2}\big(u(x_1,x_{2_{l-1}},t_{k-1})-2u(x_1,x_{2_l},t_{k-1})+u(x_1,x_{2_{l+1}},t_{k-1})\big)=$$
$$=\frac{1}{h^2}\left(u_{k-1\,l-1}(x_1)-2u_{k-1\,l}(x_1)+u_{k-1\,l+1}(x_1)\right). \quad (10)$$

Таким образом, относительно неизвестных функций $u_{k,l}(x_1)$ аргумента $x_1\in(0,\pi)$ получим систему дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{cases}\frac{1}{\tau}\left(u_{kl}(x_1)-u_{k-1l}(x_1)\right)=u''_{k,l}(x_1)+\frac{1}{h^2}\left(u_{k-1\,l-1}(x_1)-2u_{k-1\,l}(x_1)+u_{k-1\,l+1}(x_1)\right),\\ u_{0l}(x_1)=\sin(x_1)\sin(x_{2_l}),\\ u_{k0}(x_1)=u_{k4}(x_1)=0,\end{cases} \quad (11)$$

где $k=\overline{0,10}$, $l=\overline{0,4}$. Краевые условия (7) для этой системы принимают вид

$$u_{kl}(0)=u_{kl}(\pi)=0,\quad k=\overline{0,10},\ \ l=\overline{0,4}, \quad (12)$$

а условия согласования (8) – вид

$$u_{kl}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=u_{kl}\left(\frac{\pi}{2}+0\right),\quad \frac{du_{kl}(x_1)}{dx_1}\Big|_{x_1=\pi/2-0}=\frac{du_{kl}(x_1)}{dx_1}\Big|_{x_1=\pi/2+0},\quad k=\overline{0,10},\ \ l=\overline{0,4}. \quad (13)$$

Для решения задачи (9)–(11) использовался численно-аналитический алгоритм, разработанный в [2]. Результатом работы алгоритма стало аналитическое представление при каждых $k=\overline{0,10}$, $l=\overline{0,4}$ функции $u_{kl}(x_1)$ – решения задачи (9)–(11), и соответственно, приближенного решения $u(x_1,x_2,t)$ исходной начально-краевой задачи (5)–(8) при значениях аргументов $t=t_k$, $x_2=x_{2_l}$.

Приведем результаты вычислений для каждого канала Γ_1 и Γ_2 сетевого носителя Γ при $k=1$, $l=\overline{0,4}$ и сравним полученное аналитическое представление функций $u_{kl}(x_1)$ с «точным» решением $u(x_1,x_{2_l},t_k)$ при округлении значений числовых параметров до десятых. Отметим, что «точным» решением задачи (5)–(8) на всем $\Gamma\times(0,1]$ является функция

$$u(x_1,x_2,t)=\sin(x_1)\sin(x_2)e^{-2t}.$$

В случае $x\in\Gamma_1$, т.е. при $x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ имеем следующие значения. Если $k=1$, $l=0$, то $u_{10}(x_1)=0$, и для точного решения выполнено $u(x_1,0,0.1)=0$. Если $k=1$, $l=1$, то $u_{1,1}(x_1)=0.6\cdot\sin(x_1)$, и $u\left(x_1,\frac{\pi}{4},0.1\right)=0.6\cdot\sin(x_1)$. При остальных k,l также получаем совпадение приближенного решения с точным (после округления параметров до десятых): $u_{12}(x_1)=u\left(x_1,\frac{\pi}{2},0.1\right)=0.8\cdot\sin(x_1)$, $u_{13}(x_1)=u\left(x_1,\frac{3\pi}{4},0.1\right)=0.6\cdot\sin(x_1)$, и наконец, $u_{14}(x_1)=u(x_1,\pi,0.1)=0$.

В случае $x\in\Gamma_2$, т.е. при $x_1\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ также получено совпадение приближенного решения с точным (после округления параметров до десятых) при $k=1$ и всех $l=\overline{0,4}$: $u_{10}(x_1)=u(x_1,0,0.1)=0$, $u_{1,1}(x_1)=u\left(x_1,\frac{\pi}{4},0.1\right)=0.6\cdot\sin(x_1)$, $u_{12}(x_1)=u\left(x_1,\frac{\pi}{2},0.1\right)=0.8\cdot\sin(x_1)$, $u_{13}(x_1)=u\left(x_1,\frac{3\pi}{4},0.1\right)=0.6\cdot\sin(x_1)$, $u_{14}(x_1)=u(x_1,\pi,0.1)=0$.

Таким образом, полученное аналитическое представление приближенного решения имеет такой же вид, как и точное решение, а погрешность определения параметров в этом представлении не превышает 0.05.

Аналогичные результаты получены для функций $u_{kl}(x_1)$ при остальных значениях k.

Литература

1. Провоторов В. В., Провоторова Е. Н. Оптимальное управление линеаризованной системой Навье-Стокса в сетеподобной области // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13, № 4. С. 431-443.

2. Рыбаков М. А. Решение задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2023. Т. 11, вып. 4. URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1451

MSC 65M22

Numerical-Analytical Treatment of Initial-Boundary Value Problems for Continuum Transport Equations in n-Dimensional Network-Structured Domains

V.V. Provotorov[1], M.A. Rybakov[2]
Voronezh State University[1], Derzhavin Tambov State University[2]

Abstract: The paper proposes a numerical-analytical method for solving the initial-boundary value problem for the transport equation of a continuous medium in n-dimensional network-like domains. Such problems arise in models of pipeline systems, power grids, building structures, etc. The method uses a finite-differential approximation of derivatives with respect to all variables except one. The boundary value problem for a linear differential-difference system obtained by such an approximation is solved by a symbolic method. The developed approach allows one to obtain approximate solutions in analytical form, which significantly expands the possibilities of applications in various engineering problems.

Keywords: network-like domain, initial-boundary value problem, continuous medium transport equation, differential-difference system.

References

1. Provotorov V. V., Provotorova E. N. Optimalnoe upravlenie linearizovannoi sistemoi Nav'e-Stoksa v setepodobnoi oblasti [Optimal control of linearized Navier-Stokes system in network-like domain] // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya [Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes]. 2017. Vol. 13, no. 4. P. 431-443. (in Russian)

2. Rybakov M. A. Reshenie zadachi perenosa sploshnoi sredy po setevomu nositeyu v simvolnom vide [Symbolic solution of continuum media transport problem through network medium] // Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii [Modeling, Optimization and Information Technology]. 2023. Vol. 11, iss. 4. URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1451 (in Russian)