УДК 517.977.56

Задача оптимизации турбулентных течений многофазных сред по сетеподобному носителю

Перова И.В.

Воронежский государственный университет

Аннотация: В работе рассматривается начально-краевая задача для дифференциальной системы Навье-Стокса, используемой для описания математической модели так называемых турбулентных процессов транспортировки ньютоновских жидкостей с определенной вязкостью. Модель предполагает, что жидкость является многофазной континуальной средой и обладает сложной внутренней реологией. Отличительной особенностью изучаемого процесса является отсутствие классического дифференциального уравнения в узловых местах в сетеподобной области. Представлена оптимизационная задача, актуальная в анализе процессов переноса сплошных сред по сетеподобному носителю.

Ключевые слова: начально-краевая задача, турбулентное течение, слабое решение в сетеподобных объектах, оптимизационная задача.

1. Основные обозначения и понятия.

В настоящей работе используются обозначения, понятия и определения, введенные в [1]: $\mathfrak{J}$ – открытая область евклидова пространства R^n с границей $\partial\mathfrak{J}$, имеющая сетеподобную структуру. $\mathfrak{J}$ состоит из подобластей $\mathfrak{J}_\mathrm{k}$: $\mathfrak{J} = \bigcup_\mathrm{k} \mathfrak{J}_\mathrm{k} \bigcup_l \mathrm{S}_l$, где S_l – поверхности, разделяющие подобласти $\mathfrak{J}_\mathrm{k}$ друг от друга, S_l^- и S_l^+ односторонние поверхности для $\mathrm{S}_l, \mathrm{n}_l^-$, n_l^+ – внешние нормали S_l^- и S_l^+; $(0,\ \mathrm{T})(\mathrm{T} < \infty)$ – интервал в R^1. $\mathrm{L}_2(\mathfrak{J}_\mathrm{T})$ – пространство Лебега суммируемых с квадратом функций на области $\mathfrak{J}_\mathrm{T} = \mathfrak{J} \times (0,\ \mathrm{T})$; $\mathrm{W}_2^1(\mathfrak{J}_\mathrm{T})$ – пространство функций из $\mathrm{L}_2(\mathfrak{J}_\mathrm{T})$, имеющих обобщенные производные 1-го порядка также из $\mathrm{L}_2(\mathfrak{J}_\mathrm{T})$ (аналогично вводятся соболевские пространства $\mathrm{L}_2(\mathfrak{J})$ и $\mathrm{W}_2^1(\mathfrak{J})$). Введем $\Omega(\mathfrak{J}_\mathrm{T})$ – множество функций $\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \in \mathrm{W}_2^1(\mathfrak{J}_\mathrm{T})$, удовлетворяющих соотношениям

$$\mathrm{Y}|_{\mathrm{s}_l^-} = \mathrm{Y}|_{\mathrm{s}_l^+}, \quad \sum_l \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{n}_l^-}\bigg|_{\mathrm{s}_l^-} + \sum_l \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{n}_l^+}\bigg|_{\mathrm{s}_l^+} = 0.$$

Через $\mathrm{W}_2^1(\mathrm{S}_l, \mathfrak{J}_\mathrm{T})$ обозначим замыкание множества $\Omega(\mathfrak{J}_\mathrm{T})$ по норме $\mathrm{W}_2^1(\mathfrak{J}_\mathrm{T})$. Если в описание элементов множества $\Omega(\mathfrak{J}_\mathrm{T})$ добавить их непрерывность по $t \in (0,T)$ в норме $L_2(\mathfrak{J})$, то получим пространство $\mathrm{V}_2^1(\mathrm{S}_l, \mathfrak{J}_\mathrm{T})$ (детали построения и свойства этих пространств подробно рассмотрены в работах [2, 3]).

Турбулентное течение многофазной среды по сетеподобному носителю можно описать формализмами начально-краевой задачи в замкнутой области $\overline{\mathfrak{J}}_\mathrm{T}$ для $\mathrm{Y}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \in \mathrm{V}_2^1(\mathrm{S}_l, \mathfrak{J}_\mathrm{T})$:

$$\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{t}} - \mathrm{q}\Delta \mathrm{Y} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Y}_\mathrm{i} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{i}} = \mathrm{f}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,Y = 0\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0\right), \tag{2}$$

$$Y(x,0) = Y_0(x), x \in \mathfrak{J}, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial x}\right|_{\partial \mathfrak{J}_{\mathfrak{T}}} = v(x,t). \tag{4}$$

Уравнения (1), (2) – система Навье-Стокса, где q – коэффициент вязкости многофазной среды в сетеподобной области $\mathfrak{J}$; Δ – оператор Лапласа, $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$; $f(x,t), v(x,t) \in L_2(\mathfrak{J}_T)$, $Y_0(x) \in L_2(\mathfrak{J})$ – заданные функции.

Определение 1. *Слабым (турбулентным) решением начально-краевой задачи* (1)-(4) *называется векторная функция* $Y(x,y) \in V_2^1(S_l, \mathfrak{J}_T)$*, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$(Y(x,t),\eta(x,t)) - \int_{\mathfrak{J}_t} Y(x,\tau)\frac{\partial \eta(x,\tau)}{\partial \tau}dxd\tau + v\int_0^t \rho(Y,\eta)d\tau + \int_0^t \rho(Y,Y,\eta)d\tau =$$
$$= (Y_0(x),\eta(x,0)) + \int_{\partial\mathfrak{J}_t} v(x,\tau)\eta(x,\tau)dxd\tau + \int_{\mathfrak{J}_t} f(x,\tau)\eta(x,\tau)dxd\tau \tag{5}$$

для любых $t \in [0,\ T]$ *и любых* $\eta(x,t) \in W_2^1(S_1, \mathfrak{J}_T)$*, равных нулю на* $\partial\mathfrak{J}_T$*, где дифференциальные формы* $\rho(u,v)$*,* $\rho(u,v,\omega)$ *имеют следующий вид:*

$$\rho(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\mathfrak{J}}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}dx, \rho(u,v,\omega) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\mathfrak{J}} u_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\omega_i dx$$

причем функции u, v, ω *выбираются так, чтобы соответствующие интегралы сходились.*

Теорема 1. *Начально-краевая задача* (1)-(4) *имеет единственное слабое (турбулентное) решение, непрерывно зависящее от исходных данных* $f(x,t)$, $v(x,t)$ *и* $Y_0(x)$.

Спектральные характеристики оператора Лапласа Δ служат инструментом для доказательства теоремы 1.

Достаточные условия однозначной слабой разрешимости начально-краевой задачи (1)-(4) можно получить классическим анализом приближений точного решения с помощью априорных оценок, вытекающих из энергетического неравенства для норм решений уравнения Навье-Стокса [1].

2. Задача оптимизации.

Рассмотрим $U = L_2(\partial\mathfrak{J}_T)$ – пространство допустимых граничных функций; $Y(x,t) = Y(v)(x,t)$ – слабое (турбулентное) решение задачи (1)-(4). Наблюдение за состоянием системы $Y(v)(x,t)$ происходит с помощью линейного непрерывного оператора $CY(v)(x,t) = Y(v)(x,t)|_{\partial\mathfrak{J}_T}$ в пространстве наблюдений $L_2(\mathfrak{J}_T)$.

Введем $J(v)$ – функционал (функция стоимости или функция штрафа), требующий минимизации на выпуклом замкнутом множестве $U_\partial \subset U$, он имеет вид:

$$J(v) = ||CY(v)(x,t) - z_0(x,t)||^2_{L_2(\partial\Gamma_T)} + (Nv,v)_U \tag{6}$$

где $N: U \to U$ – линейный непрерывный эрмитов оператор, $(Nv,v)_U \geq \varsigma||v||_U$ ($\varsigma > 0 - \mathrm{const}$); $z_0(x,t) \in L_2(\mathfrak{J}_T)$ – заданное наблюдение [4].

Оптимизационная задача для дифференциальной системы (1)-(4) заключается в отыскании $\min\limits_{\mathrm{v} \in \mathrm{U}_\partial} \mathrm{J}(\mathrm{v})$.

В работе [1] представлен алгоритм построения решения оптимизационной задачи.

Литература

1. Хоанг В. Н., Парт А. А., Перова И. В. Численный анализ математической модели динамики турбулентного течения многофазной среды в сетеподобных объектах // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2023. Т. 11, № 2(41). С. 14-25.

2. Barykin S. E., Kapustina I. V., Sergeev S. M., Borisoglebskaya L. N., Provotorov V. V., De La Poza Plaza E., Saychenko L. Sustainability of management decisions in a digital logistics network // Sustainability. 2021. Vol. 13, no. 16.

3. Жабко А. П., Провоторов В. В., Шиндяпин А. И. Оптимальное управление дифференциально-разностной параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17, вып. 4. С. 433-448.

4. Волкова А. С., Гнилицкая Ю. А., Провоторов В. В. О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов на геометрическом графе // Системы управления и информационные технологии. 2013. Т. 51, № 1. С. 11-15.

MSC 49J20

The task of optimizing the turbulent flows of multiphase media by itself is a similar carrier

I.V. Perova

Voronezh State University

Abstract: The paper considers an initial boundary value problem for the Navier-Stokes differential system used to describe a mathematical model of the so-called turbulent processes of transportation of Newtonian fluids with a certain viscosity. The model assumes that the liquid is a multiphase continuum medium and it has a complex internal rheology. A distinctive feature of the process under study is the absence of a classical differential equation at the nodal points in the network-like region. An optimization problem is presented that is relevant in the analysis of the processes of transferring continuous media over a network-like medium.

Keywords: initial boundary value problem, turbulent flow, weak solution in similar objects, optimization problem.

References

1. Khoang V. N., Part A. A., Perova I. V. Chislenny analiz matematicheskoi modeli dinamiki turbulentnogo techeniya mnogofaznoi sredy v setepodobnykh obektakh [Numerical analysis of a mathematical model of turbulent multiphase flow dynamics in network-like objects] // Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii [Modeling, Optimization and Information Technology]. 2023. Vol. 11, no. 2(41). P. 14-25. (in Russian)

2. Barykin S. E., Kapustina I. V., Sergeev S. M., Borisoglebskaya L. N., Provotorov V. V., De La Poza Plaza E., Saychenko L. Sustainability of management decisions in a digital logistics network // Sustainability. 2021. Vol. 13, no. 16.

3. Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I. Optimalnoe upravlenie differentsialno-raznostnoi parabolicheskoi sistemoi s raspredelennymi parametrami na grafe [Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph] // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya [Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes]. 2021. Vol. 17, iss. 4. P. 433-448. (in Russian)

4. Volkova A. S., Gnilitskaya Yu. A., Provotorov V. V. O razreshimosti kraevykh zadach dlya uravnenii parabolicheskogo i giperbolicheskogo tipov na geometricheskom grafe [On the solvability of boundary value problems for parabolic and hyperbolic equations on a geometric graph] // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii [Control Systems and Information Technologies]. 2013. Vol. 51, no. 1. P. 11-15. (in Russian)