

УДК 517.926

Применение алгебро-геометрических свойств линейных систем дифференциальных уравнений к исследованию частичной устойчивости

Никонов В.И.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Исследуются частичная устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Используя алгебраические и геометрические свойства суммы циклических подпространств линейного оператора, частично определяющего динамику системы, получены условия устойчивости относительно заданной части координат фазового вектора. Существования инвариантного подпространства линейного оператора позволяет свести задачу частичной устойчивости к анализу устойчивости выделенной подсистемы.

Ключевые слова: линейный оператор, циклическое подпространство, минимальный аннулирующий многочлен, частичная устойчивость.

1. Устойчивость линейных систем относительно заданной части координат фазового вектора

В данной работе представлены исследования, являющиеся развитием результатов [1] и опирающиеся на идеи, изложенные в [2–4]. Статья посвящена исследованию частичной устойчивости линейных систем.

1.1. Постановка задачи.

Пусть поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A_* x(t), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $A_* \in R^{n \times n}$. Требуется исследовать устойчивость системы (1) относительно первых двух компонент фазового вектора x .

Учитывая это, представим фазовый вектор x в виде $x = (y, z)$, $y \in R^2$, $z \in R^p$, $n = 2 + p$.

Тогда система (1) представима в виде

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1z, \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2z, \\ \frac{dz}{dt} = c_1y_1 + c_2y_2 + Dz, \end{cases} \quad (2)$$

где $y_1, y_2 \in R$, $z \in R^p$, $a_{ij} \in R$, $b_j \in R^{1 \times p}$, $c_i \in R^{p \times 1}$, $D \in R^{p \times p}$, $i, j \in \{1, 2\}$.

1.2. Решение задачи.

Рассмотрим линейные операторы

$$\mathcal{D} : R^p \rightarrow R^p, \quad \mathcal{D}^* : R^{p*} \rightarrow R^{p*},$$

где R^{p*} — сопряженное пространство к R^p , $\mathcal{D}^*$ — сопряженный оператор к оператору $\mathcal{D}$. При этом будем предполагать, что в стандартном базисе пространства R^p линейный оператор $\mathcal{D}$ имеет матрицу D .

Введем в рассмотрение функционалы $b_1^* = b_1\xi$ и $b_2^* = b_2\xi$ из линейного пространства R^{p*} .

Рассмотрим циклические подпространства $U_{b_1^*}^*$ и $U_{b_2^*}^*$ линейного оператора $\mathcal{D}^*$, порождаемые элементами b_1^* и b_2^* :

$$U_{b_1^*}^* = \langle b_1^*, \mathcal{D}^* b_1^*, \dots, \mathcal{D}^{*p_1-1} b_1^* \rangle, \dim U_{b_1^*}^* = p_1,$$

$$U_{b_2^*}^* = \langle b_2^*, \mathcal{D}^* b_2^*, \dots, \mathcal{D}^{*p_2-1} b_2^* \rangle, \dim U_{b_2^*}^* = p_2.$$

Таким образом, минимальные аннулирующие многочлены функционалов b_1^* и b_2^* имеют, соответственно, вид

$$\sigma_{b_1^*}(\lambda) = \lambda^{p_1} + \alpha_{p_1} \lambda^{p_1-1} + \dots + \alpha_2 \lambda + \alpha_1,$$

$$\sigma_{b_2^*}(\lambda) = \lambda^{p_2} + \beta_{p_2} \lambda^{p_2-1} + \dots + \beta_2 \lambda + \beta_1.$$

Предположение 1. Если $\dim(U_{b_1^*}^* + U_{b_2^*}^*) = s < p$, то существует линейное невырожденное преобразование $z = S\bar{z}$ приводящую систему (2) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \bar{z}_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{22}y_2 + \bar{z}_{p_1+1}, \\ \frac{d\bar{z}^1}{dt} &= \bar{c}_{11}y_1 + \bar{c}_{12}y_2 + \bar{D}_{11}\bar{z}^1, \\ \frac{d\bar{z}^2}{dt} &= \bar{c}_{21}y_1 + \bar{c}_{22}y_2 + \bar{D}_{21}\bar{z}^1 + \bar{D}_{22}\bar{z}^2, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\bar{z}^1 \in R^s$, $\bar{z}^2 \in R^{p-s}$, а $\bar{c}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$, $i, j \in \{1, 2\}$ — матрицы соответствующих размеров.

Предположение 2. Для того, чтобы система (2) была y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы система

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \bar{z}_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{11}y_1 + a_{22}y_2 + \bar{z}_{p_1+1}, \\ \frac{d\bar{z}^1}{dt} = \bar{c}_{11}y_1 + \bar{c}_{12}y_2 + \bar{D}_{11}\bar{z}^1, \end{cases} \tag{4}$$

была устойчивой относительно всех переменных.

Следствие 1. Если $s = p$, то для того, чтобы система (2) была y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы эта система была устойчивой.

2. Пример

Пусть динамика исследуемой на частичную устойчивость система задана матрицей A_* так, что $y \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{R}^5, n = 7, p = 5$, где

$$A_* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{2} & -\frac{21}{10} \\ a_{21} & a_{22} & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{2} & -\frac{21}{10} \\ 2 & 4 & -3 & -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} & 6 & \frac{41}{5} \\ 1 & 2 & -8 & \frac{13}{5} & -\frac{2}{5} & 6 & \frac{32}{5} \\ -1 & -2 & 6 & \frac{4}{5} & \frac{14}{5} & -5 & -\frac{34}{5} \\ 3 & 6 & -6 & -\frac{8}{5} & \frac{7}{5} & 10 & \frac{53}{5} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & \frac{13}{5} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & -23 & -46 & 8 \\ -3 & 5 & 22 & 16 \\ -6 & -2 & -10 & -4 \\ -15 & 19 & 38 & -10 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исследуется устойчивость системы относительно первых двух компонент фазового вектора $x \in \mathbb{R}^7$.

Тогда функционалы

$$b_1^* = 2\xi_1 + \frac{3}{5}\xi_2 + \frac{1}{10}\xi_3 - \frac{3}{2}\xi_4 - \frac{21}{10}\xi_5 \text{ и } b_2^* = 2\xi_1 + \frac{2}{5}\xi_2 - \frac{1}{10}\xi_3 - \frac{3}{2}\xi_4 - \frac{29}{10}\xi_5$$

являются образующими векторами инвариантных циклических подпространств, соответственно,

$$U_{b_1^*}^* = \left\langle 2\xi_1 + \frac{3}{5}\xi_2 + \frac{1}{10}\xi_3 - \frac{3}{2}\xi_4 - \frac{21}{10}\xi_5, 3\xi_1 + \frac{4}{5}\xi_2 + \frac{4}{5}\xi_3 - 2\xi_4 - \frac{9}{5}\xi_5, 5\xi_1 + \frac{8}{5}\xi_2 + \frac{13}{5}\xi_3 - \right. \\ \left. - 3\xi_4 - \frac{8}{5}\xi_5 \right\rangle,$$

$$U_{b_2^*}^* = \left\langle 2\xi_1 + \frac{2}{5}\xi_2 - \frac{1}{10}\xi_3 - \frac{3}{2}\xi_4 - \frac{29}{10}\xi_5, 5\xi_1 - \frac{1}{5}\xi_2 + \frac{4}{5}\xi_3 - 3\xi_4 - \frac{19}{5}\xi_5 \right\rangle,$$

$$\dim U_{b_1^*}^* = 3, \dim U_{b_2^*}^* = 2, \dim (U_{b_1^*}^* + U_{b_2^*}^*) = 4 < 5 = p. \quad (5)$$

Искомое невырожденное преобразование имеет вид

$$z = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{2} & -\frac{21}{10} \\ 3 & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & -2 & -\frac{9}{5} \\ 5 & \frac{8}{5} & \frac{13}{5} & -3 & -\frac{8}{5} \\ 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{10} & \frac{3}{2} & \frac{29}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{z}.$$

Тогда, применяя это преобразование, приходим к системе, матрица которой имеет вид

$$A'_* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -11 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & \frac{15}{2} & -\frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -4 & 2 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исследование устойчивости исходной системы по отношению к переменным y_1 и y_2 сводится к исследованию устойчивости системы относительно всех переменных, матрица которой имеет вид:

$$A''_* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -11 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & \frac{15}{2} & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в этом случае исходная задача как бы разбивается на две подзадачи меньших размерностей. При этом, необходимым условием y -устойчивости является устойчивость выделенной подсистемы по переменным $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4$. Но в данном случае видим, что эта система неустойчива. Этого достаточно, чтобы утверждать, что исходная система не является y -устойчивой.

Литература

1. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. Москва: Научный мир, 2001. 320 с.
2. Никонов В. И. Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 2. С. 95-99.
3. Никонов В. И. Необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем относительно заданной части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15, № 2. С. 66-69.
4. Никонов В. И. К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 43-57.

MSC 34D20

Application of algebraic-geometric properties of linear systems of differential equations to the study of partial stability

V.I. Nikonov

National Research Mordovia State University

Abstract: Partial stability of linear systems of differential equations with constant coefficients is investigated. Using the algebraic and geometric properties of the sum of cyclic subspaces of a linear operator that partially determines the dynamics of the system, stability conditions with respect to a given part of the coordinates of the phase vector are obtained. The existence of an invariant subspace of a linear operator allows us to reduce the problem of partial stability to the analysis of the stability of a selected subsystem.

Keywords: linear operator, cyclic subspace, minimal annihilating polynomial, partial stability.

References

1. Vorotnikov V. I., Rumyantsev V. V. *Ustoichivost i upravlenie po chasti koordinat fazovogo vektora dinamicheskikh sistem: teoriya, metody i prilozheniya* [Stability and Control by Part of Phase Vector Coordinates of Dynamic Systems: Theory, Methods and Applications]. Moscow: Nauchnyi mir, 2001. 320 p. (in Russian)
2. Nikonov V. I. Geometricheskii aspekt ustoichivosti lineinykh sistem otnositelno chasti peremennykh [Geometric aspect of stability of linear systems with respect to part of variables] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2011. Vol. 13, no. 2. P. 95-99. (in Russian)
3. Nikonov V. I. Neobkhodimye i dostatochnye usloviya ustoichivosti lineinykh sistem otnositelno zadannoi chasti peremennykh [Necessary and sufficient conditions for stability of linear systems with respect to a given part of variables] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2013. Vol. 15, no. 2. P. 66-69. (in Russian)
4. Nikonov V. I. K chastichnoi ustoichivosti lineinykh sistem otnositelno zadannoi komponenty fazovogo vektora [On partial stability of linear systems with respect to a given component of the phase vector] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2021. Vol. 23, no. 1. P. 43-57. (in Russian)