

УДК 519.63

Исследование многосеточного метода для решения уравнений в частных производных разрывным методом Галёркина*

Нефедов М.С., Жалнин Р.В., Зинина С.Х.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье представлено исследование применения многосеточного метода с полной аппроксимацией (FAS) в сочетании с разрывным методом Галёркина (DG) для решения нелинейных уравнений в частных производных. Рассматривается задача переноса с периодическими граничными условиями, для которой разработан алгоритм, сочетающий проекционные операторы между сетками разной детализации (V - и W -циклы). Проведены вычислительные эксперименты для полиномиальных базисов степени $p = 2$ и $p = 3$, продемонстрировавшие порядки сходимости, близкие к теоретическим. Спектральный анализ ошибок подтвердил эффективность метода для подавления высокочастотных составляющих невязки. Результаты показывают, что многосеточный подход ускоряет сходимость итерационных методов для неявных схем DG, сохраняя точность аппроксимации.

Ключевые слова: многосеточный метод, разрывный метод Галёркина, уравнения в частных производных, порядок сходимости, спектральный анализ, проекционные операторы, неявные схемы.

1. Многосеточный метод для разрывного метода Галеркина

В данной работе рассматривается использование многосеточного метода с полной аппроксимацией (Full Approximation Scheme - FAS) [1] на основе разрывного метода Галеркина [2] для решения нелинейных уравнений в частных производных.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$, с периодическими граничными условиями и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (2)$$

Для численного решения уравнения (1) введём равномерную сетку

$$0 = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$$

с шагом $h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $i = \overline{0, N}$.

Приближенное решение будем искать разрывным методом Галеркина [2], как элемент пространства

$$\mathcal{H}_h^k = \{u_h \in L_2(0, 1) : u_h|_{I_i} \in \mathcal{P}_k(I_i), i = \overline{1, N}\}, \quad (3)$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00308, <https://rscf.ru/project/25-21-00308/>.

где $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $\mathcal{P}_k(I_i)$ – пространство полиномов степени не выше p на интервале I_i .

Запишем неявную схему:

$$\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\tau} - L(U_h^{n+1}) = 0, \quad (4)$$

где $L(U_h^{n+1})$ – оператор, полученный в результате дискретизации уравнения (1) разрывным методом Галеркина, U_h^{n+1}, U_h^n – коэффициенты разложения решения по базису на равномерной сетке с шагом h .

Далее запишем систему (4) в виде

$$Q_h(U_h^{n+1}) = F_h, \quad (5)$$

где

$$Q_h(U_h^{n+1}) = \frac{1}{\tau} U_h^{n+1} - L(U_h^{n+1}), \quad F_h = \frac{1}{\tau} U_h^n. \quad (6)$$

Чтобы найти решение U_h^{n+1} воспользуемся многосеточным методом полной аппроксимации. Будем говорить, что пространство $\mathcal{H}_h^k$ соответствует подробному уровню, и для краткости записи будем его обозначать $\mathcal{H}_h$. Далее рассмотрим пространство, соответствующее грубому уровню, обозначим его $\mathcal{H}_H$. В качестве $\mathcal{H}_H$ можно положить или $\mathcal{H}_{2h}^p$ или $\mathcal{H}_h^{p-1}$. Так же определим операторы ортогональной проекции:

$$P_h^H : \mathcal{H}_h \rightarrow \mathcal{H}_H, \quad P_H^h : \mathcal{H}_H \rightarrow \mathcal{H}_h,$$

Выполнив одну итерацию метода Ньютона, найдем приближение к искомому решению $\tilde{U}_h$. Невязка для данного приближения будет равна

$$R_h = F_h - Q_h(\tilde{U}_h). \quad (7)$$

Вычтем $Q_h(\tilde{U}_h)$ из левой и правой частей (5) и, опуская индекс $n+1$, получим

$$Q_h(U_h) - Q_h(\tilde{U}_h) = F_h - Q_h(\tilde{U}_h). \quad (8)$$

Из (7) получим

$$Q_h(U_h) = R_h + Q_h(\tilde{U}_h). \quad (9)$$

Далее аналогично (6) определим оператор $Q_H : \mathcal{H}_H \rightarrow \mathcal{H}_H$ и найдем решение $U_H \in \mathcal{H}_H$ на грубом уровне

$$Q_H(U_H) = P_h^H R_h + Q_H(P_H^h \tilde{U}_h). \quad (10)$$

Вычислив ошибку

$$\varepsilon_H = U_H - \tilde{U}_H,$$

найдем решение на подробной сетке

$$U_h = \tilde{U}_h + P_H^h \varepsilon_H. \quad (11)$$

Затем выполним несколько итераций метода Ньютона для системы (5), взяв в качестве начального приближения U_h .

При решении системы (10) можно рекурсивно применить этот же алгоритм. Таким образом, комбинируя различную глубину огрубления расчетной сетки, можно получить модификации данного многосеточного алгоритма (например, V -, W -циклы, как показано на рис. 1).

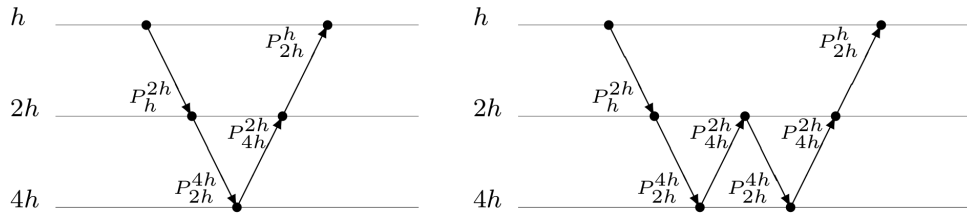


Рис. 1. Варианты проекции на сеточные уровни трехсеточного метода:
 а) V -цикл; б) W -цикл

2. Результаты вычислительных экспериментов

Далее представлены результаты расчетов для случая $f(u) = u$, $u_0(x) = \sin(2\pi x)$. На рис. 2 представлены графики решений на сетках различной размерности. На рис. 3 показаны графики распределения частот для ошибки и невязки решения на различных этапах многосеточного метода для подробного уровня. Порядки сходимости для различных размерностей пространства $\mathcal{H}_h^p$ приведены в таблице 1.

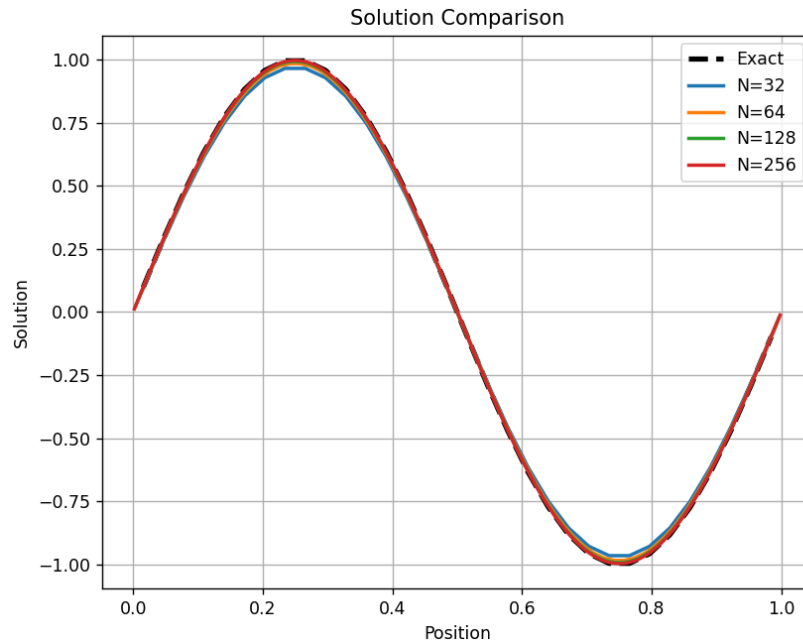


Рис. 2. Аппроксимация точного решения на сетках разной размерности

Таблица 1: Порядки сходимости для различных базисных функций

Кол-во ячеек	$p = 2$				$p = 3$			
	L_1		L_2		L_1		L_2	
	err_1	p	err_2	p	err_1	p	err_2	p
32	2.2374e-03	-	2.6545e-03	-	5.9927e-05	-	7.1168e-05	-
64	5.5812e-04	1.82	6.9762e-04	1.84	7.3350e-06	2.71	9.5000e-06	2.80
128	1.3944e-04	1.97	1.9498e-04	1.93	1.1216e-06	2.85	1.3665e-06	2.87
256	3.6126e-05	1.95	5.7047e-05	1.97	1.7494e-07	2.91	2.1089e-07	2.90

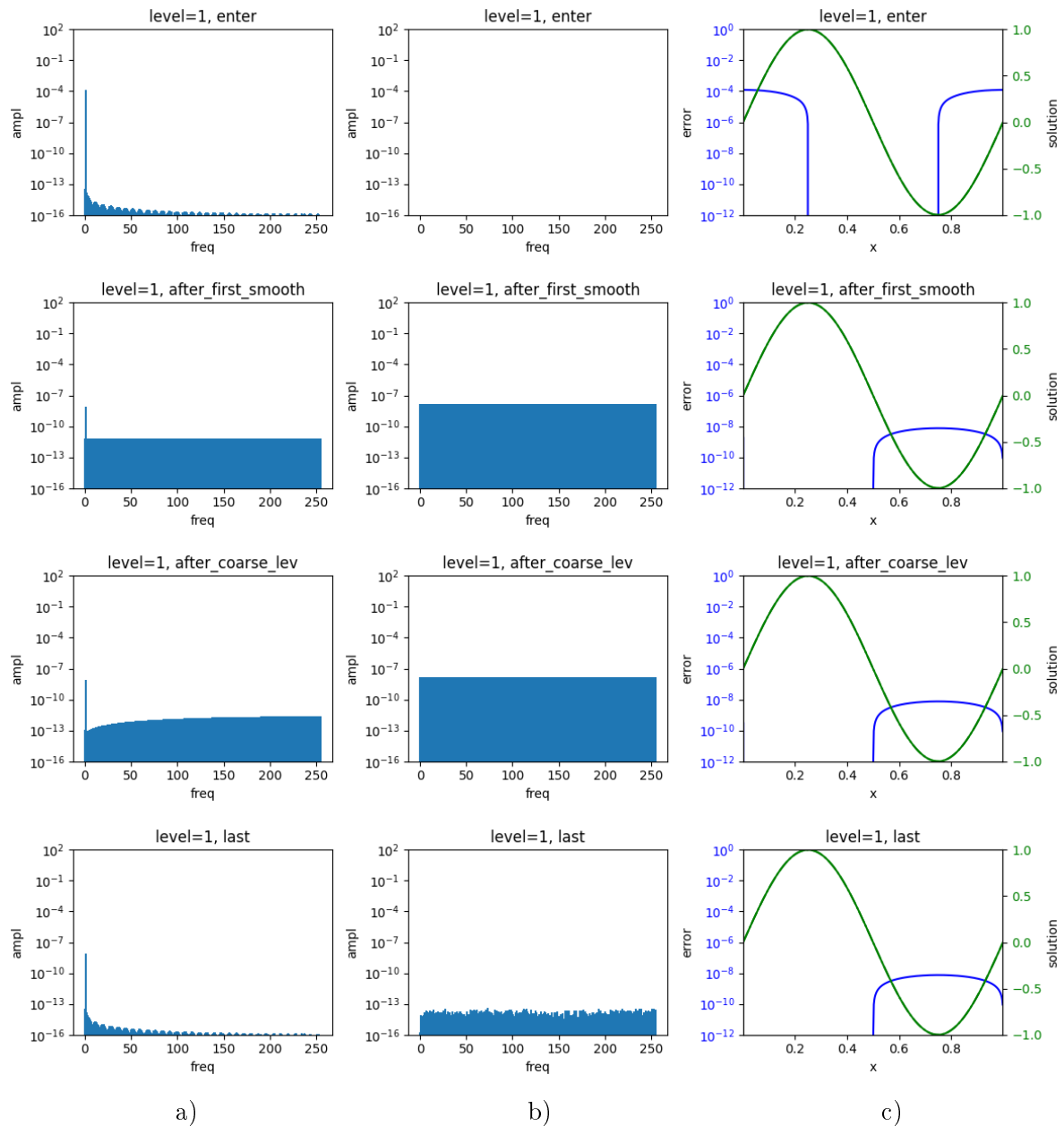


Рис. 3. Спектральный анализ многосеточного метода: а) спектр ошибки решения; б) спектр невязки решения; в) решение и ошибка.

Литература

1. Brandt A. Multi-level Adaptive Computations in Fluid Dynamics // AIAA Technical Report. 1979. No. AIAA-79-1455. Williamsburg, VA: AIAA.
2. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection Dominated Problems // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations: Lecture Notes in Mathematics. 1998. Vol. 1697. P. 151-268.

MSC 57N10

Research on the multigrid method for solving partial differential equations using the discontinuous Galerkin method

M.S. Nefedov, R.V. Zhalnin, S.H. Zinina

National Research Mordovia State University

Abstract: This paper investigates the application of the Full Approximation Scheme (FAS) multigrid method combined with the Discontinuous Galerkin (DG) method for solving nonlinear partial differential equations. The study focuses on a transport problem with periodic boundary conditions, developing an algorithm that incorporates projection operators between grids of varying resolution (V - and W -cycles). Computational experiments were conducted for polynomial bases of degrees $p = 2$ and $p = 3$, demonstrating convergence rates close to theoretical values. Spectral error analysis confirmed the method's effectiveness in suppressing high-frequency residual components. The results show that the multigrid approach accelerates the convergence of iterative methods for implicit DG schemes while maintaining approximation accuracy.

Keywords: multigrid method, Discontinuous Galerkin, partial differential equations, convergence order, spectral analysis, projection operators, implicit schemes.

References

1. Brandt A. Multi-level Adaptive Computations in Fluid Dynamics // AIAA Technical Report. 1979. No. AIAA-79-1455. Williamsburg, VA: AIAA.
2. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection Dominated Problems // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations: Lecture Notes in Mathematics. 1998. Vol. 1697. P. 151-268.