УДК 517.9:534.1

О трёхмерных системах, близких к интегрируемым*

Морозов К.Е.
ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Аннотация: В настоящее время весьма полно изучены неконсервативные возмущения двумерных гамильтоновых систем. В данной работе рассматривается обобщение этой теории на трёхмерный случай, когда невозмущенная система является нелинейной, интегрируемой и имеет область, заполненную замкнутыми фазовыми траекториями. В случае автономных возмущений основное внимание уделяется задаче о предельных циклах. В качестве примеров рассматриваются две системы: уравнение Ван дер Поля с автоматической регулировкой частоты и система Лоренца в случае больших чисел Рэлея. Для неавтономных возмущений исследуются резонансы и выводится усреднённая система, определяющая динамику в резонансной зоне.

Ключевые слова: возмущение, усреднение, предельные циклы, резонансы.

1. Введение

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H(x,y,z)}{\partial y} + \varepsilon f_1(x,y,z,\omega_1 t,\ldots,\omega_m t), \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H(x,y,z)}{\partial x} + \varepsilon f_2(x,y,z,\omega_1 t,\ldots,\omega_m t), \\ \dot{z} = \varepsilon f_3(x,y,z,\omega_1 t,\ldots,\omega_m t), \end{cases} \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon << 1$ – малый параметр, H, f_i – достаточно гладкие функции. Предположим, что функции f_i являются 2π-периодическими по $\omega_k t$, а частоты $\mathbf{\Omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ несоизмеримы:

$$(\mathbf{k}, \mathbf{\Omega}) = \sum_{i=1}^{m} k_i \omega_i \neq 0 \quad \forall \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m.$$

В этом случае f_i суть квазипериодические функции t. Пусть возмущение неконсервативно:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \not\equiv 0, \quad (x,y,z) \in G.$$

Наряду с системой (1), будем также рассматривать возмущённую автономную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H(x,y,z)}{\partial y} + \varepsilon g_1(x,y,z), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x,y,z)}{\partial x} + \varepsilon g_2(x,y,z), \\ \dot{z} &= \varepsilon g_3(x,y,z), \end{aligned} \tag{2}$$

*Работа поддержана грантом РНФ № 24-21-00050

где

$$g_i(x,y,z) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f_i(x,y,z,\omega_1 t,...,\omega_m t)dt, \quad i=\overline{1,3}.$$

При $\varepsilon = 0$ система (1) интегрируема. Предположим, что плоскости $z = c$ при $c \in (c^-, c^+)$ и поверхности $H(x,y,z) = h$ при $h \in (h^-, h^+)$ пересекаются по замкнутым фазовым траекториям и обозначим через $D \subset G$ область[1], состоящую из этих траекторий. Пусть область D отделена от состояний равновесия и сепаратрисных многообразий. Основной целью работы является анализ поведения решений системы (1) в области D.

Трёхмерные интегрируемые системы общего вида

$$\begin{cases} \dot x = P(x,y,z), \\ \dot y = Q(x,y,z), \\ \dot z = R(x,y,z), \end{cases} \tag{3}$$

при некоторых условиях могут быть приведены к виду системы (1) при $\varepsilon = 0$ [1].

2. Автономное возмущение. Предельные циклы

Обратимся к автономной системе (2). В первую очередь нас интересуют условия существования предельных циклов. При $\varepsilon = 0$ имеем $z = c, c \in (c^-, c^+)$ и первые два уравнения отделяются, образуя гамильтонову систему с одной степенью свободы, зависящую от c как от параметра

$$\dot x = \frac{\partial H(x,y,c)}{\partial y}, \tag{4}$$

$$\dot y = -\frac{\partial H(x,y,c)}{\partial x}. \tag{5}$$

Пусть функции $X(\theta,I,c), Y(\theta,I,c)$ определяют в этой системе переход к переменным действие I-угол θ. Сделаем в (1) замену

$$x = X(\theta,I,z), \quad y = Y(\theta,I,z).$$

В результате приходим к системе вида

$$\begin{cases} \dot I = \varepsilon B_1(\theta,I,z), \\ \dot z = \varepsilon B_2(\theta,I,z), \\ \dot\theta = \omega(I,z) + \varepsilon B_3(\theta,I,z), \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} &B_1(\theta,I,z) = X'_\theta \tilde g_2 - Y'_\theta \tilde g_1 + \tilde g_3(X'_z Y'_\theta - X'_\theta Y'_z), \quad B_2(\theta,I,z) = \tilde g_3, \\ &B_3(\theta,I,z) = -X'_I \tilde g_2 + Y'_I \tilde g_1 + \tilde g_3(X'_I Y'_z - X'_z Y'_I), \\ &\tilde g_i(\theta,I,z) = g_i(X(\theta,I,z),Y(\theta,I,z),z), \quad i=1,2,3. \end{aligned}$$

[1] Нетрудно видеть, что D–полноторий.

Здесь B_s суть достаточно гладкие функции, 2π–периодические по θ, а ω – собственная частота. Фазовым пространством системы (6) является полноторий $(I(h^-), I(h^+)) \times (c^-, c^+) \times S^1$. Рассмотрим усреднённую систему

$$\dot{u_1} = B_{10}(u_1, u_2),$$
$$\dot{u_2} = B_{20}(u_1, u_2),$$

где

$$B_{i0}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_s(\theta, u_1, u_2) d\theta, \quad i = 1, 2.$$

Справедлива следующая теорема [1]

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

$$B_{s0}(u_{10}, u_{20}) = 0, \quad s = 1, 2,$$
$$\Delta \neq 0, \qquad \sigma \neq 0,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial(B_{01}, B_{02})}{\partial(u_1, u_2)}, \quad \sigma = \frac{\partial B_{10}}{\partial u_1} + \frac{\partial B_{20}}{\partial u_2} \text{ при } u_1 = u_{10}, u_2 = u_{20}.$$

Тогда существует $\varepsilon_* > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$:

1) система (2) имеет в $O(\varepsilon)$ – окрестности невозмущённой фазовой кривой L_0, определяемой значениями первых интегралов $I = u_{10}, z = u_{20}$, единственный предельный цикл L_ε;

2) $L_\varepsilon \to L_0$ при $\varepsilon \to 0$;

3) цикл L_ε асимптотически (орбитально) устойчив, если $\sigma < 0$, $\Delta > 0$, и неустойчив в противном случае.

По аналогии с порождающим уравнением Пуанкаре–Понтрягина для двумерных систем будем называть систему уравнений

$$B_{s0}(u_1, u_2) = 0, \quad s = 1, 2,$$

порождающей.

Для иллюстрации приведём два примера (см. подробности в [1]): уравнение Ван дер Поля с автоматической регулировкой частоты

$$\ddot{x} + \omega(z)x = \varepsilon(\alpha - x^2)\dot{x}, \quad \dot{z} = \varepsilon f(x, \dot{x}, z),$$

и систему Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \ \dot{y} = -zx + rx - y, \ \dot{z} = xy - bz.$$

С помощью замены переменных и времени

$$x \to \sqrt{2\sigma(r-1)}x, \quad z \to (r-1)(z + x^2), \quad t \to \frac{t}{\sqrt{\sigma(r-1)}},$$

система Лоренца приводится к виду

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + (z-1)x + x^3 = -\varepsilon\gamma\dot{x}, \\ &\dot{z} = \varepsilon(-az + \beta x^2), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{r-1}}, a = \dfrac{b}{\sqrt{\sigma}}, \beta = \dfrac{2\sigma - b}{\sqrt{\sigma}}, \gamma = \dfrac{\sigma+1}{\sqrt{\sigma}}$ [2]. Если число Рэлея $r >> 1$, то $0 < \varepsilon << 1$ и система (7) имеет вид (2).

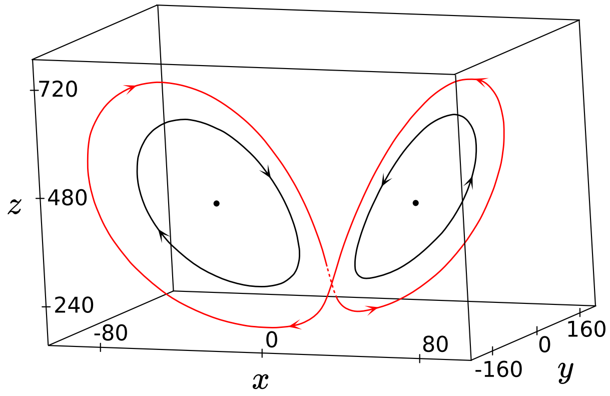

Рис. 1. Предельные циклы системы Лоренца при $b = 2.6$, $\sigma = 3.3$, $r = 500$. Красным цветом выделен устойчивый цикл, чёрным – седловые.

3. Неавтономное возмущение. Резонансы

Обратимся теперь к исходной системе (1). Как и в автономном случае, перейдём к переменным действие I-угол θ и, кроме того, рассмотрим систему в расширенном фазовом пространстве, вводя m дополнительных угловых координат θ_i:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon F_1(I, z, \theta, \theta_1, \ldots, \theta_m), \\ \dot{z} &= \varepsilon F_2(I, z, \theta, \theta_1, \ldots, \theta_m), \\ \dot{\theta} &= \omega(I, z) + \varepsilon F_3(I, z, \theta, \theta_1, \ldots, \theta_m), \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь функции F_i определяются аналогично B_i. Система (8) определена на прямом произведении $(I(h^-), I(h^+)) \times (c^-, c^+) \times T^{m+1}$. При $\varepsilon = 0$ фазовое пространство расслаивается на $(m+1)$ – мерные инвариантные торы T^{m+1}, движение на которых условно-периодическое. Основная сложность в исследовании системы (8) при $\varepsilon \neq 0$ связана с резонансами.

Определение 1. *Инвариантный тор невозмущённой системы (системы* (8) *при* $\varepsilon = 0$*), соответствующий значениям первых интегралов* (I, z)*, будем называть резонансным, если существуют взаимно–простые целые числа* $(n, \mathbf{k}) = (n, k_1, \ldots, k_m)$ *такие, что*

$$n\omega(I, z) - (\mathbf{k}, \mathbf{\Omega}) = 0, \qquad (\mathbf{k}, \mathbf{\Omega}) = k_1\omega_1 + \cdots + k_m\omega_m. \tag{9}$$

При заданных n и $\mathbf{k}$ соотношение (9) можно рассматривать как уравнение относительно (I, z). График этого уравнения будем называть *резонансной кривой*. Подчеркнем, что здесь вообще имеется бесконечное множество *неизолированных* друг от друга резонансных инвариантных торов, соответствующих одному и тому же набору $(n, \mathbf{k})$. Это существенно отличает рассматриваемый случай от случая двумерных систем [3, 4]

Фиксируем некоторый резонансный тор $(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}})$ и обратимся к выводу усреднённой системы в его окрестности. Для этого приведём систему (8) к стандартной форме метода усреднения [5]. Сделаем в (8) замену

$$I = I_{n\mathbf{k}} + \mu w_1, \quad z = z_{n\mathbf{k}} + \mu w_2, \quad \theta = w_3 + \frac{1}{n}(\mathbf{k}, \Theta),$$

где $(\mathbf{k}, \Theta) = \sum_{i=1}^{m} k_i\theta_i, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon}$. Система преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&\dot{w}_s = \mu F_s + \mu^2 \tilde{F}_s + o(\mu^2) \equiv \mu W_s(\mathbf{w}, \Theta, \mu), \quad i = 1, 2,\\
&\dot{w}_3 = \mu \sum_{i=1}^{2} b_i w_i + \mu^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} w_i w_j + F_3 \right) + o(\mu^2) \equiv \mu W_3(\mathbf{w}, \Theta, \mu),\\
&\dot{\theta}_i = \omega_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&F_s = F_s(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, w_3 + \frac{1}{n}(\mathbf{k}, \Theta), \Theta), \quad s = 1, 2, 3,\\
&\tilde{F}_s = w_1 \frac{\partial F_s}{\partial I}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, w_3 + \frac{1}{n}(\mathbf{k}, \Theta), \Theta) + w_2 \frac{\partial F_s}{\partial z}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, w_3 + \frac{1}{n}(\mathbf{k}, \Theta), \Theta), \quad s = 1, 2,\\
&(b_1, b_2) = \nabla\omega(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}) \equiv (\partial\omega/\partial I, \partial\omega/\partial z),\\
&b_{11} = \frac{\partial^2\omega}{\partial I^2}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}), \quad b_{12} = b_{21} = \frac{\partial^2\omega}{\partial I \partial z}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}), \quad b_{22} = \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}).
\end{aligned}$$

Подставляя $\theta_i = \omega_i t$ в первые три уравнения, получим систему в стандартной форме

$$\dot{\mathbf{w}} = \mu W(\mathbf{w}, \omega_1 t, \ldots, \omega_m t, \mu), \tag{10}$$

где $W = (W_1, W_2, W_3)$. Тогда усреднённая система принимает вид

$$\begin{aligned}
&\dot{u_s} = A_s(v) + \mu \sum_{i=1}^{2} P_{si}(v) u_i + o(\mu^2), \quad s = 1, 2,\\
&\dot{v} = \sum_{i=1}^{2} b_i u_i + \mu \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} u_i u_j + A_3(v) \right) + o(\mu^2),
\end{aligned} \tag{11}$$

где введено медленное время $\tau = \mu t$ и

$$\begin{aligned}
&A_s(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, v) = \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \cdots \int_0^{2\pi n} F_s d\theta_1 \ldots d\theta_m,\\
&P_{s1}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, v) = \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \cdots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial F_s}{\partial I} d\theta_1 \ldots d\theta_m,\\
&P_{s2}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, v) = \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \cdots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial F_s}{\partial z} d\theta_1 \ldots d\theta_m.
\end{aligned}$$

Можно показать [3], что функции A_s, P_{si} являются периодическими по v с наименьшим общим периодом $T = \dfrac{2\pi}{n}$, следовательно, фазовым пространством усреднённой системы (11) является полноторий $D \times S^1, D \subset R^2$.

Из классических результатов Боголюбова [5] известны следующие факты о соответствии систем (10) и (11): 1) разность между решениями этих систем, совпадающими при $t = t_0$, будет сколь угодно малой на сколь угодно большом промежутке времени при достаточно малом μ; 2) если система (11) имеет гиперболическое состояние равновесия, то в системе (10) ему отвечает квазипериодическое решение того же типа устойчивости; 3) если система (11) имеет гиперболический предельный цикл, то в системе (10) этому циклу соответствует $(m+1)$–мерный инвариантный тор. Отметим, что для анализа предельных циклов системы (11) применима методика, описанная в предыдущем разделе.

Рассмотрим усреднённую систему первого приближения (систему (11) при $\mu = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= A_1(v, I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}), \\ \dot{u}_2 &= A_2(v, I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}), \\ \dot{v} &= b_1 u_1 + b_2 u_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Предположим, что $\nabla\omega(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}) \neq 0$ ($b_1^2 + b_2^2 \neq 0$). Резонансы, для которых выполнено это условие, будем называть *невырожденными*. Если система уравнений

$$A_s(v, I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}) = 0, \quad s = 1, 2, \tag{13}$$

имеет решение v_0, то система первого приближения (12) имеет прямую $v = v_0, \quad b_1u_1 + b_2u_2 = 0$, сплошь заполненную неизолированными состояниями равновесия. Резонансную траекторию $H(x, y, z) = h(I_{n\mathbf{k}}), z = z_{n\mathbf{k}}$, для которой (13) имеет решение, будем называть *расщепляемой*. Условия расщепляемого резонанса при заданных $n, \mathbf{k}$ задаются системой трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} &A_s(v, I, z) = 0, \quad s = 1, 2, \\ &n\omega(I, z) - (\mathbf{k}, \mathbf{\Omega}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{14}$$

Если хотя бы одно из уравнений (13) не имеет решений, то усреднённая система (12) не имеет состояний равновесия. Очевидно, что при этом одна из производных $\dot{u}_1, \dot{u}_2$ не меняет знака. Тогда в системе (10) (как и в исходной системе (1)) наблюдается "дрейф" траекторий и решения покидают резонансную зону за конечное время. В этом случае будем говорить о *проходимом* резонансе. Представим функции $A_s(v, I, z)$ в виде:

$$A_s(v, I, z) = \tilde{A}_s(v, I, z) + B_s(I, z),$$

где $B_s(I, z) = \dfrac{n}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/n} A_s(v, I, z) dv$ – среднее значение функции $A_s(v, I, z)$. Несложно видеть, что система уравнений $B_s(I, z) = 0, s = 1, 2$, является порождающей для возмущённой автономной системы (2). Решения системы (14) удовлетворяют неравенствам

$$|B_s(I, z)| < \max_v |\tilde{A}_s(v, I, z)|, \quad s = 1, 2. \tag{15}$$

Если в фиксированной точке резонансной кривой $(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}})$ хотя бы одно из неравенств (15) выполняется с противоположным знаком, то эта точка соответствует проходимому резонансу. Условия (15) будут выполнены, в частности, если $B_s(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}) = 0, s = 1, 2$. В этом случае вблизи соответствующей невозмущенной траектории у системы (2) при малых ε появляется предельный цикл.

Дифференцируя третье уравнение системы (12) по t, придём к уравнению маятникового типа

$$\ddot{v} = b_1 A_1(v, I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}) + b_2 A_2(v, I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}). \tag{16}$$

Отметим, что хотя фазовый портрет уравнения (16) даёт некоторое представление о топологии резонансной зоны, по нему нельзя сделать точных выводов о поведении решений исходной системы (1) на бесконечном промежутке времени.

Литература

1. Морозов К. Е. О неконсервативных возмущениях трёхмерных интегрируемых систем // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6. С. 766-780. DOI: 10.18500/0869-6632-003136.

2. Юдович В. И. Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Рэлея // ВИНТИ. 1978. № 2611-78. С. 2-8.

3. Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 420 с.

4. Морозов А. Д., Морозов К. Е. Квазипериодические возмущения двумерных гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1607-1615. DOI: 10.1134/S0012266117120047.

5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1958. 408 с.

MSC 34C15, 34C27, 34C37

On three-dimensional systems close to integrable ones*

K.E. Morozov
Lobachevsky State University of Niznhy Novgorod

Abstract: At present, nonconservative perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems have been studied quite thoroughly. This paper considers the generalization of this theory to the three-dimensional case, where the unperturbed system is nonlinear, integrable and has a region filled with closed phase trajectories. In the case of autonomous perturbations, the main focus is on the problem of limit cycles. Two systems are considered as examples: the Van der Pol equation with automatic frequency control and the Lorenz system in the case of large Rayleigh numbers. For non-autonomous perturbations, the investigation involves resonance analysis and deriving an averaged system that determines the dynamics in the resonance zone.

Keywords: perturbations, averaging, limit cycles, resonances.

References

1. Morozov K. E. O nekonservativnykh vozmushcheniyakh trekhmernykh integriruemykh sistem [On non-conservative perturbations of three-dimensional integrable systems] // Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineinaya dinamika [University News. Applied Nonlinear Dynamics]. 2024. Vol. 32, no. 6. P. 766-780. DOI: 10.18500/0869-6632-003136. (in Russian)

2. Yudovich V. I. Asimptotika predelnykh tsiklov sistemy Lorentsa pri bolshikh chislakh Releya [Asymptotics of limit cycles of the Lorenz system at large Rayleigh numbers] // VINTI. 1978. No. 2611-78. P. 2-8. (in Russian)

3. Morozov A. D. Rezonansy, tsikly i khaos v kvazikonservativnykh sistemakh [Resonances, cycles and chaos in quasi-conservative systems]. Moscow-Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2005. 420 p. (in Russian)

4. Morozov A. D., Morozov K. E. Kvaziperiodicheskie vozmushcheniya dvumernykh gamiltonovykh sistem [Quasi-periodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems] // Differentsialnye uravneniya [Differential Equations]. 2017. Vol. 53, no. 12. P. 1607-1615. DOI: 10.1134/S0012266117120047. (in Russian)

5. Bogolyubov N. N., Mitropolskii Yu. A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebanii [Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations]. Moscow: Nauka, 1958. 408 p. (in Russian)

*The work is supported by the RSciF, grant № 24-21-00050.