

УДК 531.3-007.248

## Математическое моделирование напряженного состояния ВНЧС в латеральной окклюзии

Морозкин Н.Д., Колонских Д.М.

Уфимский университет науки и технологий

*Аннотация:* Рассматривается задача численного анализа напряженно-деформированного состояния височно-нижнечелюстного сустава (ВНЧС) при латеральной окклюзии, решаемая методом конечных элементов (МКЭ). Нижнечелюстной сустав является важным элементом жевательной функции и артикуляции, изучение его механических свойств имеет ключевое значение для понимания патофизиологии заболеваний, выработки индивидуализированных подходов к профилактике и лечению, а также разработки ортопедических и стоматологических имплантатов. Математическое моделирование позволяет предсказать поведение сустава под нагрузкой. Представлена конечно-элементная модель нижней челюсти человека, на основе которой проведен расчет и анализ главных напряжений при латеральной окклюзии.

*Ключевые слова:* напряженно-деформированное состояние, тензор напряжений, метод конечных элементов, височно-нижнечелюстной сустав, латеральная окклюзия.

### 1. Введение

Височно-нижнечелюстной сустав (ВНЧС) является сложной биомеханической системой. Нарушения в его работе могут привести к различным патологиям, включая дисфункцию и болевой синдром. Латеральная окклюзия, при которой зубы нижней челюсти с одной стороны находятся в контакте с зубами верхней челюсти, создает несимметричные нагрузки на ВНЧС. Анализ современных научных публикаций в области челюстно-лицевой хирургии демонстрирует выраженную асимметрию патологических изменений в височно-нижнечелюстном суставе [1], с преобладанием дегенеративных процессов на балансирующей стороне по сравнению с рабочей. Применение методов математического моделирования, в частности конечно-элементного анализа, обеспечивает количественную оценку напряженно-деформированного состояния структур ВНЧС при различных функциональных нагрузках.

Височно-нижнечелюстной сустав относится к категории мышечно-суставных структур. Его функциональная организация определяется мышечным аппаратом, который регулирует как биомеханику внутрисуставных элементов, так и динамику основных фаз артикуляции. Морфофункциональной особенностью ВНЧС служит асимметричное крепление мышечных волокон к суставному диску, создающее условия для его динамической стабилизации в процессе функционирования.

Задача расчёта напряженно-деформированного состояния височно-нижнечелюстного сустава (ВНЧС) при боковой окклюзии требует учета асимметричности биомеханической системы. В связи с этим, наиболее адекватное решение достигается при использовании трехмерной конечно-элементной модели.

## 2. Постановка задачи

Необходимо провести расчет напряжений, возникающих в ВНЧС под воздействием мышечных сил в боковой окклюзии.

Обозначим исследуемую трёхмерную область как  $\Omega$ , а ее границу как  $\Gamma$ . Напряженное состояние тела описывается симметричным тензором  $\sigma$  состоящим из нормальных и касательных напряжений, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия [2]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (1)$$

с условиями на границе области:

а) приложение мышечных усилий к границе  $\Gamma_F$ :

$$F = \sigma \cdot n, \quad (2)$$

б) жёсткое закрепление на границе  $\Gamma_S$ :

$$u = 0, \quad (3)$$

где  $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$  – тензор напряжений,  $u^T = [u_x, u_y, u_z]$  – перемещения,  $\Gamma_F$

– граница области приложения сил  $F^T = [F_x, F_y, F_z]$ ,  $n_x = \cos(x, \vec{n})$ ,  $n_y = \cos(y, \vec{n})$  и  $n_z = \cos(z, \vec{n})$  направляющие косинусы внешней нормали к  $\Gamma_F$ .

Необходимо провести расчет напряженно-деформированного состояния нижней челюсти на основе решения системы уравнений (1) с учетом заданных краевых условий (2) и (3).

## 3. Разбиение области на дискретные элементы

В качестве метода решения поставленной задачи использован метод конечных элементов (МКЭ). Суть метода заключается в аппроксимации искомой непрерывной функции с использованием набора приближенных значений, вычисленных на определенных элементах исследуемой области (конечных элементах). Набор этих элементов формирует конечно-элементную модель объекта. Процесс дискретизации области, осуществляемый в данном контексте, называется триангуляцией. Под триангуляцией в трехмерном случае понимается разбиение исследуемой области  $\Omega$  на  $M$  непересекающихся тетраэдров.

В работе [3] представлен и реализован в виде комплекса программ оригинальный метод триангуляции сложных трехмерных областей. В результате получена трёхмерная конечно-элементная модель нижней челюсти. В первую очередь нас интересует напряжённое состояние, возникающие в височном суставе и суставном диске, так как именно эти области чаще всего подвержены патологиям.

## 4. Расчёт методом конечных элементов

Наиболее эффективная схема расчета упругодеформированного состояния методом конечных элементов основана на формулировке исходной задачи в перемещениях [4]. Данный подход требует преобразования исходных уравнений из напряженной формы в уравнения, выраженные через компоненты вектора перемещений.

Для этого исходное уравнение (1) умножается на весовую функцию  $N(x, y, z)$  определенную и дифференцируемую в области  $\Omega$ , и интегрируется:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma \cdot N \, d\Omega = 0. \quad (4)$$

Формула Грина [4] позволяет преобразовать эти соотношения к виду:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}N)^T \sigma \, d\Omega - \int_{\Gamma_F} NF \, d\Gamma = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{D}^T$  – символическая матрица, состоящая из частных производных,

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

После перехода от непрерывной задачи (5) к дискретной, на конечном числе элементов получаем систему алгебраических уравнений:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{U}$  – искомый вектор узловых перемещений, матрица жесткости  $\mathbf{K}$  и правая часть  $\mathbf{F}$  получаются суммированием вкладов отдельных матриц элементов и соответствующих векторов нагрузки элементов с компонентами

$$\mathbf{k}_{ji}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_j^{eT} \mathbf{E}^e \mathbf{B}_i^e \, d\Omega, \mathbf{f}_j = \int_{\Gamma_F^e} N_j^e F \, d\Gamma, \quad (7)$$

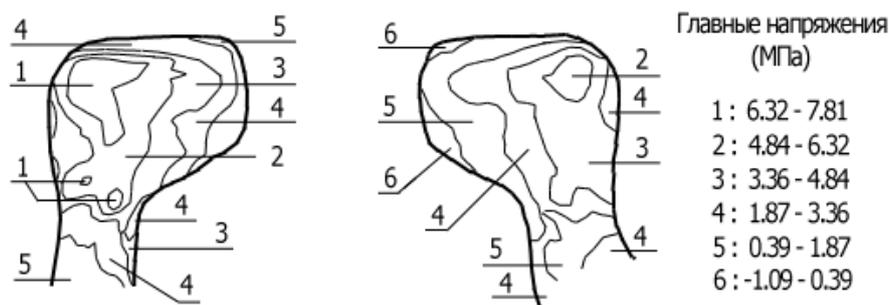
где  $\mathbf{B}_i = \mathbf{D}N_i$  – матрица градиентов,  $\mathbf{E}$  – симметричная матрица упругих характеристик, содержащая соотношения модуля упругости Юнга и коэффициента Пуассона для каждого конечного элемента  $e$ .

После вычисления узловых перемещений рассчитываются деформации и напряжения.

## 5. Вычислительный эксперимент

Для выполнения расчетов разработана специализированная программа, обеспечивающая возможность внесения различных модификаций в конечную элементную модель. Программа позволяет менять отношения величин и направления векторов мышечных усилий, места прикрепления мышц, фиксацию различных участков челюсти, а также физико-механические характеристики и редактирование геометрии модели. Программа рассчитывает перемещения в узлах модели, определяет компоненты тензора напряжений, вычисляет главные напряжения и предоставляет возможность получения произвольных сечений челюсти.

Результаты расчетов распределения главных напряжений в височных суставах нижней челюсти в состоянии латеральной окклюзии представлены на рис. 1. В данной конфигурации левая сторона челюсти функционирует как рабочая, в то время как правая сторона выполняет роль балансирующей.



**Рис. 1.** Распределение главных напряжений в суставных головках (слева балансирующая сторона, справа – рабочая).

Суставная головка рабочей стороны испытывает напряжения преимущественно в переднем отделе. На балансирующей стороне выделяются два участка локальных напряжений: один расположен на центрально-передней поверхности суставной головки, а другой – у основания головки. Установлено, что балансирующая сторона испытывает напряжение, на 66% большее по сравнению с рабочей, особенно в переднем отделе, несмотря на то, что нагрузка прикладывается именно к рабочей стороне во время жевания. Это объясняет клиническую уязвимость данной зоны [1].

## 6. Заключение

Создание трехмерной конечно-элементной математической модели позволяет провести анализ напряжённого состояния ВНЧС в латеральной окклюзии. Полученные данные подчеркивают необходимость своевременной окклюзионной коррекции, так как циклические жевательные нагрузки могут приводить к кумулятивным микротравмам. Особое внимание следует уделять переднему отделу суставного диска – основной зоне риска дегенеративных изменений при латеральной окклюзии.

## Литература

1. Zhang Y. Biomechanical effects of occlusal alterations on the temporomandibular joint during lateral movements // *Journal of Prosthetic Dentistry*. 2020. Vol. 124, no. 3. P. 345-352.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Пер. с англ. Москва: Мир, 1987. 542 с.
3. Морозкин Н. Д., Чудинов В. В., Попков В. С., Колонских Д. М. Адаптивная триангуляция трехмерных областей со сложной геометрией // *Вестник Башкирского университета*. 2005. № 4. С. 3-7.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Москва: Мир, 1986. 312 с.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Москва: Мир, 1979. 392 с.

MSC 74S05

## Mathematical modeling of TMJ stress in lateral occlusion

N.D. Morozkin, D.M. Kolonskikh  
Ufa University of Science and Technology

*Abstract:* The problem of numerical analysis of the stress-strain state of the temporomandibular joint (TMJ) in lateral occlusion, solved by the finite element method (FEM), is considered. The mandibular joint is an important element of masticatory function and articulation, the study of its mechanical properties is of key importance for understanding the pathophysiology of diseases, developing individualized approaches to prevention and treatment, as well as the development of orthopedic and dental implants. Mathematical modeling makes it possible to predict the behavior of a joint under load. A finite element model of the human mandible is presented, on the basis of which the calculation and analysis of the principal stresses during lateral occlusion is carried out.

*Keywords:* stress-strain state, stress tensor, finite element method, temporomandibular joint, lateral occlusion.

### References

1. Zhang Y. Biomechanical effects of occlusal alterations on the temporomandibular joint during lateral movements // Journal of Prosthetic Dentistry. 2020. Vol. 124, no. 3. P. 345-352.
2. Vasidzu K. Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Variational Methods in Elasticity and Plasticity Theory]. Moscow: Mir, 1987. 542 p. (in Russian)
3. Morozkin N. D., Chudinov V. V., Popkov V. S., Kolonskikh D. M. Adaptivnaya triangulyatsiya trekhmernykh oblastei so slozhnoi geometrii [Adaptive triangulation of three-dimensional domains with complex geometry] // Vestnik Bashkirskogo universiteta [Bulletin of Bashkir University]. 2005. No. 4. P. 3-7. (in Russian)
4. Zenkevich O., Morgan K. Konechnye elementy i approksimatsiya [Finite Elements and Approximation]. Moscow: Mir, 1986. 312 p. (in Russian)
5. Segerlind L. Primenenie metoda konechnykh elementov [Applied Finite Element Analysis]. Moscow: Mir, 1979. 392 p. (in Russian)