

УДК 517.91

Модель течения двухфазной жидкости с неоднородной эффективной вязкостью

Мартынов С.И.

Сургутский государственный университет

Аннотация: Рассматриваются течения жидкости с частицами вдоль плоской стенки с заданным напряжением на свободной поверхности и в трубе круглого сечения с заданным градиентом давления на основе модели сплошной среды с эффективной вязкостью. Предполагается, что эффективная вязкость меняется с расстоянием от стенок. Уравнения динамики рассматриваемой среды в этом случае содержат слагаемые с градиентом эффективной вязкости. Однако для исследуемой неоднородности эффективной вязкости полученные уравнения имеют точные решения, что позволяет оценить расход и воздействие на стенки рассматриваемой двухфазной среды.

Ключевые слова: моделирование, вязкая жидкость, частицы, эффективная вязкость, точное решение.

1. Введение

Математическое моделирование динамики систем жидкость-частицы представляет собой не простую теоретическую задачу. Это связано со сложностью рассматриваемых систем, в которых необходимо учитывать коллективное взаимодействие частиц между собой и жидкостью. Фактически имеются два подхода, используемых для описания коллективной динамики систем активных частиц в жидкости. Один из них связан с прямым численным моделированием динамики таких систем на основе современных достижений информационных технологий. Однако, с учетом того, что для реальных систем с наночастицами даже при однопроцентных объемных концентрациях число частиц в единице объема смеси имеет порядок $10^{12} - 10^{15}$, то данный подход даже при современном уровне информационных технологий практически нереализуем. Поэтому в теоретических исследованиях при моделировании динамики таких систем в основном используется второй подход, при котором гидродинамическое взаимодействие частиц учитывается в приближении среднего поля [1, 2]. Задача осложняется еще и тем, что помимо гидродинамического необходимо учитывать и другие взаимодействия, обусловленных наличием у частиц и в самой жидкости электрических зарядов и других потенциалов. Кроме того, необходимо учитывать взаимодействие частиц с твердыми поверхностями, ограничивающих объем таких систем. С учетом сказанного выше можно сделать вывод, что моделирование динамики такого большого числа частиц с учетом их гидродинамического взаимодействия в настоящее время пока доступно только в приближении среднего поля. Это означает, что речь идет о модели сплошной среды с параметрами, характеризующими такую среду в целом. Одним из таких параметров является эффективная вязкость системы, которая определяется экспериментально или на основе теоретической модели [3]. При этом необходимо отметить, первый подход позволяет более точно учесть результат гидродинамического взаимодействия частиц, чем модель сплошной среды. Так, в работе [4] на основе прямого численного моделирования коллективной динамики

решалась задача о движении каталитического наномотора в облаке заряженных частиц разного знака. Показано, что результате гидродинамического взаимодействия возможно перемещение наномотора даже в случае равенства нулю суммарного заряда окружающих его заряженных частиц. Моделирование же на основе уравнений электрогидродинамики приводит к необходимости наличия асимметрии в зарядах для перемещения наномотора. Такое различие можно объяснить тем, что уравнения электрогидродинамики фактически учитывают воздействие на жидкость только частиц, дающих объемный заряд, т.е. только малой части из всех, имеющих заряд, так как частицы, чей суммарный заряд равен нулю вообще не учитываются при расчете течения жидкости. В случае нейтральной системы заряженных частиц воздействие на жидкость со стороны заряженных частиц в этой модели отсутствует. Из прямого численного моделирования динамики первой следует, что такое воздействие имеет место и приводит к перемещению наномотора.

2. Основные уравнения и допущения

Рассматривается двухфазная среда жидкость – частицы эффективная вязкость которой η представляется в виде $\eta = \eta_0(1 + K\varphi)$, здесь η_0 – вязкость жидкости носителя, $\varphi = nV_p$ – объемная концентрация частиц, n – числовая концентрация частиц, V_p – объем одной частицы, K – коэффициент, учитывающий изменение вязкости с расстоянием от стенок, ограничивающих объем среды [5]. Плотность двухфазной среды $\rho = \rho(\varphi)$ зависит от объемной концентрации частиц, которая тоже может менять с расстоянием от стенок. В стационарном случае уравнения динамики двухфазной среды со скоростью $\mathbf{u}$ имеют вид:

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Здесь тензор плотности потока импульса Π_{ij} представляется в следующем виде

$$\Pi_{ij} = \rho u_i u_j + p + \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (2)$$

Тензор вязких напряжений σ_{ij} определяется так же, как и для однофазной жидкости с коэффициентом второй вязкости среды ζ . Диффузионное уравнение для концентрации частиц со скоростью $\mathbf{v}$ имеет стандартный вид:

$$\operatorname{div}(n\mathbf{v}) = 0, \quad n(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = -nb\nabla U - D\nabla n, \quad (3)$$

Здесь $D = \frac{k_B T}{b}$ – коэффициент диффузии частиц, b – подвижность частиц, $k_B T$ – произведение постоянной Больцмана и температуры, U – потенциальная энергия внешнего поля, действующего на частицы. Будем предполагать, что сила со стороны этого поля перпендикулярна скорости среды $\mathbf{u}$. Это означает, что скорости частиц и среды совпадают $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Из второго уравнения (3) следует равновесное распределение частиц по закону $n \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right)$ из которого следует выполнение условия $\nabla \varphi \cdot \mathbf{u} = 0$. Второе уравнение (1) при этом дает условие $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ и тензор σ_{ij} , принимает вид

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Тогда из первого уравнения (1) с учетом вида тензора Π_{ij} и условия, что скорость среды в выбранной системе прямоугольных координат имеет только одну составляющую получаем следующее уравнение для динамики рассматриваемой сплошной среды:

$$-\nabla p + (\nabla \eta \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

Необходимо отметить, что полученное уравнение (4) имеет место и для одномерной концентрации частиц $n = \text{const}$. Градиент эффективной вязкости η , направленный перпендикулярно скорости сплошной среды $\mathbf{u}$, может быть создан за счет гидродинамического взаимодействия частиц со стенкой (увеличение пристеночной эффективной вязкости) или градиентом температуры, от которой зависит вязкость несущей жидкости.

3. Точные решения

Рассмотрим сдвиговое течение жидкости с частицами вдоль плоской стенки за счет создаваемого на поверхности слоя толщины h напряжения τ . Выберем систему прямоугольных координат таким образом, что ось OX направлена вдоль стенки, а ось OY – перпендикулярно ей с началом на поверхности стенки. Уравнение (4) и граничные условия в этом случае имеют вид

$$\frac{d\eta(y)}{dy} \frac{du_x}{dy} + \eta(y) \frac{d^2 u_x}{dy^2} = 0, \quad \eta(h) \left(\frac{du_x}{dy} \right)_{y=h} = \tau, \quad u_x(0) = 0.$$

Задача имеет следующее решение

$$\eta(y) \frac{du_x}{dy} = \tau, \quad u_x(y) = \tau \int \frac{dy}{\eta(y)} + C.$$

Для определения константы интегрирования C из условия равенства нулю скорости жидкости на поверхности стенки необходимо знать зависимость эффективной вязкости от поперечной координаты y . Но при этом напряжение на стенке и в любом сечении, параллельном стенке, одинаковое и равно заданному напряжению на поверхности τ .

Рассмотрим еще одно течение, допускающее точное решение уравнения (4), а именно течение с заданным градиентом давления $-\frac{dp}{dx} = C_1 > 0$ в трубе круглого сечения радиуса R . В системе координат, в которой ось OX направлена вдоль оси трубы, а $r = (y^2 + z^2)^{1/2}$ уравнение (4) и граничное условие на стенке трубы имеют следующий вид

$$C_1 + \frac{d\eta(r)}{dr} \frac{du_x}{dr} + \eta(r) \left(\frac{d^2 u_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_x}{dr} \right) = 0, \quad u_r(0) = 0.$$

Это уравнение заменой $\frac{du_x}{dr} = w(r)$ сводится к уравнению первого порядка типа Бернулли, решение которого находится непосредственно

$$\eta(r) \frac{du_x}{dr} = -\frac{C_1 r}{2}, \quad u_x(r) = -C_1 \int \frac{r dr}{2\eta(r)} + C_2.$$

Как видно из приведенного решения, напряжение на стенке трубы не зависит от вязкости, а определяется только заданным градиентом давления и радиусом трубы.

При изменении вязкости меняется только профиль скорости и, следовательно, расход сплошной среды. Подобные задачи рассматривались в гемодинамике [6, 7] для определения распределения эритроцитов в кровеносных сосудах. Еще одно применение полученных результатов - теоретическое обоснование увеличения нефтеотдачи пласта при воздействии наножидкостей на пласт [8]. Полученные выше результаты свидетельствуют, что увеличение нефтеотдачи пласта нельзя объяснить ростом силы трения за счет большей вязкости жидкости с частицами в рамках модели сплошной среды. Но, как было указано выше, прямое моделирование динамики частиц и жидкости дает более корректный результат по сравнению с моделью сплошной среды.

4. Заключение

Получено аналитическое решение для двух течений жидкости с частицами в рамках модели сплошной среды с неоднородной эффективной вязкостью, которая представляется в линейном приближении по объемной концентрации частиц. При этом считается, что и коэффициент в слагаемом с объемной концентрацией частиц зависит от расстояния от стенок, ограничивающих жидкость с частицами. Рассматривается случай, когда объемная концентрация частиц постоянна или неоднородна поперек течения из-за внешних сил, действующих на частицы. При этих условиях уравнения динамики сплошной среды допускают точное стационарное решение для течения сдвига с заданным напряжением на свободной поверхности и течения в трубе круглого сечения с заданным градиентом давления. Оба решения показывают, что такая неоднородность эффективной вязкости меняет профиль скорости течения, но не меняет напряжение в среде и силу, действующую на стенки со стороны сплошной среды.

Литература

1. Koessel F. R., Jabbari-Farouji S. Emergent pattern formation of active magnetic suspensions in an external field // *New Journal of Physics*. 2020. Vol. 22. Art. 103007.
2. Manikas K., Vogiatzis G. G., Hütter M., Anderson P. D. Structure formation in suspensions under uniform electric or magnetic field // *Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design*. 2021. Vol. 4. P. 77-97.
3. Келбалиев Г. И., Тагиев Д. Б., Расулов С. Р., Манафов М. Р. Структурообразование и эффективная вязкость неньютоновской нефти // *Инженерно-физический журнал*. 2023. Т. 96, № 1. С. 57-65.
4. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Модель гидродинамического механизма перемещения наномоторов // *Математическое моделирование*. 2020. Т. 32, № 12. С. 81-94.
5. Полунин В. М., Ряполов П. А., Жакин А. И., Шельдешова Е. В. Вязкость магнитной жидкости при колебаниях в сильном магнитном поле // *Акустический журнал*. 2019. Т. 65, № 4. С. 477-483.
6. Damiano E. R., Long D. S., Smith M. L. Estimation of viscosity profiles using velocimetry data from parallel flows of linearly viscous fluids: application to microvascular haemodynamics // *Journal of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 512. P. 1-19.
7. Медведев А. Е. Двухфазная модель течения крови в крупных и мелких кровеносных сосудах // *Математическая биология и биоинформатика*. 2011. Т. 6, № 2. С. 228-249.

8. Sircar A., Rayavarapu K., Bist N., Yadav K., Singh S. Applications of nano-particles in enhanced oil recovery // Petroleum Research. 2022. No. 1. P. 77-90.

MSC 76D07, 76D09, 76D17

Model of two-phase fluid flow with non-uniform effective viscosity

S.I. Martynov

Surgut State University

Abstract: The paper considers flows of fluid with particles along a flat wall with a given stress on the free surface and in a circular pipe with a given pressure gradient based on a continuous medium model with effective viscosity. It is assumed that the effective viscosity changes with distance from the walls. The equations of the dynamics of the medium under consideration in this case contain terms with a gradient of effective viscosity. However, for the considered inhomogeneity of effective viscosity, the obtained equations have exact solutions, which allows us to estimate the flow rate and the effect of the two-phase medium under consideration on the walls.

Keywords: numerical simulation, viscous liquid, collective interaction of particles, chain, deformation.

References

1. Koessel F. R., Jabbari-Farouji S. Emergent pattern formation of active magnetic suspensions in an external field // *New Journal of Physics*. 2020. Vol. 22. Art. 103007.
2. Manikas K., Vogiatzis G. G., Hütter M., Anderson P. D. Structure formation in suspensions under uniform electric or magnetic field // *Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design*. 2021. Vol. 4. P. 77-97.
3. Kelbaliev G. I., Tagiev D. B., Rasulov S. R., Manafov M. R. Strukturoobrazovanie i effektivnaya vyazkost nenyutonovskoi nefti [Structure formation and effective viscosity of non-Newtonian oil] // *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal [Journal of Engineering Physics]*. 2023. Vol. 96, no. 1. P. 57-65. (in Russian)
4. Martynov S. I., Tkach L. Yu. Model gidrodinamicheskogo mekhanizma peremeshcheniya nanomotorov [Model of hydrodynamic mechanism of nanomotor motion] // *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*. 2020. Vol. 32, no. 12. P. 81-94. (in Russian)
5. Polunin V. M., Ryapolov P. A., Zhakin A. I., Sheldeshova E. V. Vyazkost magnitnoi zhidkosti pri kolebaniyakh v silnom magnitnom pole [Viscosity of magnetic fluid under oscillations in strong magnetic field] // *Akusticheskii zhurnal [Acoustical Physics]*. 2019. Vol. 65, no. 4. P. 477-483. (in Russian)
6. Damiano E. R., Long D. S., Smith M. L. Estimation of viscosity profiles using velocimetry data from parallel flows of linearly viscous fluids: application to microvascular haemodynamics // *Journal of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 512. P. 1-19.
7. Medvedev A. E. Dvukhfaznaya model techeniya krovi v krupnykh i melkikh krovenosnykh sosudakh [Two-phase model of blood flow in large and small blood vessels] // *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika [Mathematical Biology and Bioinformatics]*. 2011. Vol. 6, no. 2. P. 228-249. (in Russian)

8. Sircar A., Rayavarapu K., Bist N., Yadav K., Singh S. Applications of nano-particles in enhanced oil recovery // Petroleum Research. 2022. No. 1. P. 77-90.