УДК 517.977.5

Метод параметризации для решения задач оптимального управления с многокомпонентным управлением*

Лутошкин И.В., Чекмарев А.Г.

Ульяновский государственный университет

Аннотация: Предложено развитие метода параметризации для задач оптимального управления, описываемых системой дифференциальных уравнений и терминальными ограничениями. Рассмотрен случай многомерного вектора управлений и независимой параметризации координат управления. Разработаны алгоритмы для вычисления производных первого и второго порядка в задаче нелинейного программирования, порожденной параметризацией управляющих функций.

Ключевые слова: оптимальное управление, численные методы, метод параметризации, метод второго порядка.

1. Постановка

Поиск оптимального управления нелинейными динамическими системами возникает при построении моделей в различных областях науки, техники, технологии, социальных системах и др. [1]. Для решения соответствующих задач наиболее часто применяются численные методы [1–3]. В настоящей работе для задач оптимального управления с многомерным вектором управления развивается метод параметризации [1, 4, 5] на случай применения методов второго порядка.

Рассмотрим задачу оптимального управления, представленную автономной системой дифференциальных уравнений, терминальными ограничениями, терминальным функционалом и фиксированным начальным состоянием:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$\begin{cases} g_l(x(T)) = 0, & l = \overline{1, m_1}, \\ g_l(x(T)) \leqslant 0, & l = \overline{m_1 + 1, m}, \end{cases} \tag{3}$$

$$J = g_0(x(T)) \to \min. \tag{4}$$

Здесь x – вектор фазовых переменных ($x \in \mathbb{R}^n$), u – вектор управления ($u \in \mathbb{R}^r$). Терминальные функции $g_l(z)$, $1 \leqslant l \leqslant m$, $z \in \mathbb{R}^n$, и функции $f_i(x, u)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам. Фазовая траектория и управление рассматривается при $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Конечный момент T является либо фиксированным, либо свободным, но при этом ограничен некоторой величиной T^* сверху.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-28-00542, https://rscf.ru/project/24-28-00542/.

Предполагается, что множество допустимых значений управления $U \subset \mathbb{R}^r$ является выпуклым связным компактом; каждому управлению $u(t)$, удовлетворяющему (2), отвечает траектория $x(t)$ системы (1), определенная на $[t_0, T]$; задача (1)-(4) разрешима в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in [t_0, T]$.

2. Параметризация

Введем r независимых разбиений отрезка $[t_0; T]$:

$$t_0 \leq t_{\mu 1} \leqslant \ldots \leqslant t_{\mu N_\mu} \equiv T, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant r. \tag{5}$$

На отрезках каждого разбиения μ ($\mu = \overline{1, r}$) закрепим структуру соответствующего управления u_μ:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{\mu(k-1)} \leq t < t_{\mu k}, \quad k = \overline{1, N_\mu}. \tag{6}$$

Здесь $v_\mu^k \in \mathbb{R}^{d(k,\mu)}$ – вектор параметров.

Введем вектор параметров $w_\mu^k = (t_{\mu k}, v_\mu^k) \equiv (w_{\mu,0}^k, w_{\mu,1}^k, \ldots, w_{\mu,d(k,\mu)}^k)$. Если в задачу Коши (1) подставить управление (5), (6), то получаемое решение $x(t)$ представляется функцией $z(t; w_1^1, \ldots, w_1^{N_1}, w_2^1, \ldots, w_2^{N_2}, \ldots, w_r^1, \ldots, w_r^{N_r})$.

Введем обозначение $w_\mu = (w_\mu^1, w_\mu^2, \ldots, w_\mu^{N_\mu})$ $(1 \leqslant \mu \leqslant r)$ и определим функции

$$\varphi_l(w_1, w_2, \ldots, w_r) = g_l(z(T; w_1, w_2, \ldots, w_r)). \tag{7}$$

В этом случае исходная задача (1)-(4) аппроксимируется задачей нелинейного программирования:

$$\varphi_0(w_1, w_2, \ldots, w_r) \to \min \qquad \text{при ограничениях} \tag{8}$$

$$\varphi_l(w_1, w_2, \ldots, w_r) = 0, \quad 1 \leqslant l \leqslant m_1, \tag{9}$$

$$\varphi_l(w_1, w_2, \ldots, w_r) \leqslant 0, \quad m_1 + 1 \leqslant l \leqslant m, \tag{10}$$

$$W = \{w_\mu^k : \ w_{\mu,0}^{k-1} \leq w_{\mu,0}^k, \ u_\mu^k(t; v_\mu^k) \in U, \ w_{\mu,0}^{k-1} \leq t \leq w_{\mu,0}^k, \tag{11}$$

$$k = \overline{1, N_\mu}; \quad w_{\mu,0}^0 = t_0, w_{\mu,0}^{N_\mu} \equiv T \leq T^*, \quad \mu = \overline{1, r}.\}. \tag{12}$$

Для эффективного решения задачи нелинейного программирования (8) требуется применения методов первого и второго порядка с вычислением соответствующих производных функций $\varphi_l(w_1, w_2, \ldots, w_r)$, $0 \leqslant l \leqslant m$.

Поскольку функции (7) заданы опосредованно, вычисление производных функций (7) сводится к отдельному алгоритму. Алгоритм вычисления производных включает в себя решение задачи Коши для сопряженных переменных, решение задачи Коши для матричного импульса, применение функции Понтрягина.

Литература

1. Лутошкин И. В. Динамические модели экономических систем и методы их анализа. Ульяновск: УлГУ, 2024. 188 с.

2. Eichmeir P., Nachbagauer K., Lauf T. et al. Time-Optimal Control of Dynamic Systems Regarding Final Constraints // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 16, no. 3. Art. 031003. 12 p. DOI: 10.1115/1.404933476.

3. Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P. Notes on numerical methods for solving optimal control problems // IEEJ Journal of Industry Applications. 2016. Vol. 5, iss. 2. P. 154-166. DOI: 10.1541/ieejjia.5.154.

4. Горбунов В. К., Лутошкин И. В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 67-84.

5. Лутошкин И. В., Чекмарев А. Г. Развитие метода параметризации для решения задач оптимального управления и разработка концепции программного комплекса // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 260-279. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202403.260-279.

MSC 49M99

The parameterization method for solving optimal control problems with multicomponent control

I.V. Lutoshkin, A.G. Chekmarev
Ulyanovsk State University

Abstract: The development of the parameterization method for optimal control problems described by a system of differential equations and terminal constraints is carried out. The case of a multidimensional control vector and independent parameterization of control coordinates is considered. Algorithms are derived for calculating first- and second-order derivatives in a nonlinear programming problem generated by the parameterization of control functions.

Keywords: optimal control, numerical methods, the parameterization method, second order method.

References

1. Lutoshkin I. V. Dinamicheskie modeli ekonomicheskikh sistem i metody ikh analiza [Dynamic models of economic systems and methods of their analysis]. Ulyanovsk: UlGU, 2024. 188 p. (in Russian)

2. Eichmeir P., Nachbagauer K., Lauf T. et al. Time-Optimal Control of Dynamic Systems Regarding Final Constraints // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 16, no. 3. Art. 031003. 12 p. DOI: 10.1115/1.404933476.

3. Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P. Notes on numerical methods for solving optimal control problems // IEEJ Journal of Industry Applications. 2016. Vol. 5, iss. 2. P. 154-166. DOI: 10.1541/ieejjia.5.154.

4. Gorbunov V. K., Lutoshkin I. V. Razvitie i opyt primeneniya metoda parametrizatsii v vyrozhdennykh zadachakh dinamicheskoi optimizatsii [Development and application experience of parameterization method in degenerate dynamic optimization problems] // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Control Theory and Systems]. 2004. No. 5. P. 67-84. (in Russian)

5. Lutoshkin I. V., Chekmarev A. G. Razvitie metoda parametrizatsii dlya resheniya zadach optimalnogo upravleniya i razrabotka kontseptsii programmnogo kompleksa [Development of parameterization method for solving optimal control problems and software concept development] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2024. Vol. 26, no. 3. P. 260-279. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202403.260-279. (in Russian)