УДК 519.65:519.63

Об ортогональных сплайнах и их применении в вариационно-сеточных методах решения краевых задач

Леонтьев В.Л.

Научный Центр мирового уровня «Передовые цифровые технологии»
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого

Аннотация: Излагается теория ортогональных сплайнов и ее применение в смешанных вариационно-сеточных методах решения краевых задач механики деформируемого твердого тела, основанных на вариационном принципе Рейсснера. Рассматривается ортогонализация кубических сплайнов Шенберга с помощью авторской геометрической процедуры, не изменяющей, в отличие от процедуры ортогонализации Грама-Шмидта, конечные носители сплайнов. Обсуждаются результаты ортогонализации сплайнов Шенберга третьей степени с помощью четырех вспомогательных сплайнов Шенберга. Получены оценки погрешности аппроксимации любой функции трех пространств Соболева ортогональными сплайнами Шенберга. Предлагается использование ортогональных кубических сплайнов Шенберга при решении краевых задач, связанных с системами дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: ортогональные сплайны, авторская геометрическая процедура ортогонализации сплайнов, кубические сплайны Шенберга, краевые задачи, смешанные вариационно-сеточные методы, дифференциальные уравнения в частных производных, погрешность аппроксимации.

1. Обзор теории ортогональных сплайнов. Ортогонализация кубических сплайнов Шенберга

Дается описание ортогональных сплайнов одного, двух и трех аргументов, а также смешанных вариационных принципов, лежащих в основе алгоритмов смешанных вариационно-сеточных методов. Рассматривается применение авторской геометрической процедуры ортогонализации сплайнов [1] к кубическим сплайнам Шенберга [2], не изменяющей, в отличие от процедуры ортогонализации Грама-Шмидта, конечные носители сплайнов. В статье [3] показано, что в случае использования ступенчатых функций для модификации материнского сплайна Шенберга третьей степени достигается возможность ортогонализации системы сплайнов, порождаемой материнским сплайном на сетке. В статье [3] найдены несколько вариантов ортогонализации кубических сплайнов Шенберга ступенчатыми функциями с действительными и комплексными коэффициентами, а также только с действительными коэффициентами. Показано, что для ортогонализации сплайнов Шенберга достаточно использовать только четыре ступенчатые функции. В статье [3] доказана теорема о порядке аппроксимации любой функции пространства Соболева линейными комбинациями построенных ортогональных сплайнов Шенберга, который является более низким, чем для неортогональных сплайнов Шенберга. Полученные в статье [3] ортогональные сплайны Шенберга имеют разрывы первого рода, что снижает их аппроксимативные свойства. Обсуждаются результаты исследований в случае использования для ортогонализации сплайнов Шенберга третьей степени четырех вспомогательных сплайнов Шенберга, имеющих размеры конечных носителей в пять раз меньше размера конечного носителя материнского сплайна Шенберга. При этом учитываются результаты, полученные в статье [3]. Доказывается, что порядок аппроксимации любой функции пространства Соболева линейными комбинациями модифицированных сплайнов Шенберга не уменьшается в результате такой ортогонализации по сравнению с порядком аппроксимации линейными комбинациями классических неортогональных сплайнов Шенберга третьей степени. Построенный модифицированный материнский кубический сплайн Шенберга, в отличие от сплайна Шенберга [3], модифицированного ступенчатыми функциями, является непрерывной функцией, у которой нет разрывов первой и второй производных, т.е. его гладкость значительно выше.

2. О применении ортогональных кубических сплайнов Шенберга при решении краевых задач

Показано, что погрешность аппроксимации любой функции пространства Соболева W_2^0 ортогональными сплайнами Шенберга имеет порядок h^4. Погрешность аппроксимации любой функции пространства Соболева W_2^1 и ее первой производной ортогональными сплайнами Шенберга имеет порядок h^3. Погрешность аппроксимации любой функции пространства Соболева W_2^2, а также ее первой и второй производных, имеет порядок h^2. Эти оценки характеризуют высокую точность аппроксимации, которая, совместно с высокой гладкостью сплайнов, создает предпосылки для эффективного применения линейных комбинаций ортогональных сплайнов Шенберга третьей степени, как для непосредственной аппроксимации функций, так и для аппроксимации искомых решений краевых задач.

Предлагается использование ортогональных кубических сплайнов Шенберга при решении краевых задач механики деформируемого твердого тела, связанных с системами дифференциальных уравнений в частных производных. Ортогональные сплайны Шенберга третьей степени, полученные модификацией четырьмя вспомогательными сплайнами Шенберга с уменьшенными по размерам конечными носителями, являются вкладом в общую теорию сплайнов и в теорию ортогональных сплайнов [1], и порождают новые возможности при построении алгоритмов вариационно-сеточных методов, основанных на вариационных принципах Рейсснера и Ху-Вашицу [1].

В частности, применение ортогональных сплайнов Шенберга третьей степени в таких алгоритмах создает предпосылки для повышения фактической точности аппроксимаций искомых решений краевых задач и для увеличения скорости сходимости приближенных решений. Кроме того, ортогональность сплайнов Шенберга третьей степени позволяет исключить при этом узловые неизвестные, соответствующие силовым факторам и деформациям, до начала решения глобальной системы вариационно-сеточных уравнений на компьютере, что делает такие смешанные вариационно-сеточные методы сравнимыми по вычислительным затратам на отыскание приближенных решений с численными методами, основанными на вариационном принципе Лагранжа.

Литература

1. Леонтьев В. Л. Ортогональные сплайны и специальные функции в методах вычислительной механики и математики. Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 466 с.

2. Schoenberg I. J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quarterly of Applied Mathematics. 1946. Vol. 4. P. 45-99, 112-141.
3. Леонтьев В. Л. Об ортогонализации сплайнов Шенберга // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 2. С. 111-126. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126.

MSC 41A15, 35G05

On orthogonal splines and their application in variational-grid methods for solving boundary value problems

V.L. Leontiev

World-Class Research Center for Advanced Digital Technologies at
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

Abstract: The theory of orthogonal splines and its application in mixed variational-grid methods for solving boundary value problems of deformable solid mechanics based on the Reissner variational principle are described. The orthogonalization of Schoenberg cubic spline is considered using the author's geometric procedure, which does not change the finite supports of the splines, unlike the Gram-Schmidt orthogonalization procedure. The results of orthogonalization of Schoenberg splines of the third degree using of auxiliary Schoenberg splines are discussed. Estimates of the approximation error of any function of three Sobolev spaces by orthogonal Schoenberg splines are obtained. The use of orthogonal cubic Schoenberg splines in solving boundary value problems related to systems of partial differential equations is proposed.

Keywords: orthogonal splines, the author's geometric procedure for orthogonalizing splines, cubic Schoenberg splines, boundary value problems, mixed variational-grid methods, partial differential equations, approximation error.

References

1. Leontiev V. L. Ortogonalnye splainy i spetsialnye funktsii v metodakh vychislitelnoi mekhaniki i matematiki [Orthogonal splines and special functions in computational mechanics and mathematics methods]. Saint Petersburg: POLITEKH-PRESS, 2021. 466 p. (in Russian)

2. Schoenberg I. J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quarterly of Applied Mathematics. 1946. Vol. 4. P. 45-99, 112-141.

3. Leontiev V. L. Ob ortogonalizatsii splainov Shenberga [On orthogonalization of Schoenberg splines] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2025. Vol. 27, no. 2. P. 111-126. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126. (in Russian)