

УДК 519.63

Энтропийный анализ одной полностью консервативной разностной схемы с адаптивной искусственной вязкостью для численного решения задач газодинамики в переменных Эйлера

Ладонкина М.Е.^{1,2}, Повещенко Ю.А.^{1,2}, Чжан Х.²

ИПМ им. М.В.Келдыша РАН¹, МФТИ (НИУ)²

Аннотация: В работе проводится анализ энтропии при моделировании процессов газовой динамики при применении полностью консервативной разностной схемы с адаптивной искусственной вязкостью в эйлеровых переменных. Результаты показывают соответствие расчетов законам физики без учета уравнения энтропии.

Ключевые слова: полностью консервативная разностная схема, адаптивная искусственная вязкость, энтропия, задача Сода, задача Энфельдта, вычислительная газовая динамика.

1. Полностью консервативные разностные схемы

Уравнения газовой динамики представляют собой выражения основных законов сохранения (массы, импульса и энергии) в сплошной среде. Поэтому естественно строить дискретную модель изучаемой среды так, чтобы в ней выполнялись аналоги этих законов. Практика показывает, что применение таких схем особенно эффективно для решения задач, в которых профили решений резко изменяются во времени и пространстве. Дальнейшее развитие принципов интегральных согласований массы, импульса и различных видов энергий привело к понятию полностью консервативных разностных схем (ПКРС) [1], в дискретном виде сохраняющих также внутреннюю и кинетическую энергии системы и применяемых при лагранжевых и эйлеровых способах описания сплошной среды [1–3]. Введение адаптивной искусственной вязкости (АИВ) [4] в ПКРС позволяет подавлять возникающие в численном решении осцилляции локально, управляя пространственной аппроксимацией дискретной модели и не изменяя при этом её консервативно согласованных свойств по компонентам различных видов энергий, массопереносу и импульсу.

Рассмотрим двухслойную по времени полностью консервативную разностную схему пространственно-одномерного течения сжимаемого газа в переменных Эйлера в декартовой системе координат:

$$m_t = -vDIN_D\mu_D^{\sim}, \quad (1)$$

$$(mu)_t = -vGRAD_{\sigma}\pi^{\sim} - vDIT_D(\mu_D^{\sim} \cdot u_D^{\sim}), \quad (2)$$

$$(m\varepsilon)_t = -\frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} (\pi^{\sim}VDIV_{\sigma}u^{\sim})_{\Omega} - vDIN_D\mu_{ED}^{\sim}, \quad (3)$$

$$(m\frac{u^2}{2})_t = -v(u^{\sim}, GRAD_{\sigma}\pi^{\sim}) - vDIN_D(\mu_D^{\sim}\frac{u_D^2}{2}), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}\mu &= \rho u, \quad \mu_E = \varepsilon \mu = Eu, \quad E = \rho \varepsilon, \quad \rho^\sim = \rho^{(\psi_\rho)}, \quad \psi_\rho = const, \\ M_D^\sim &= \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_D^\sim = M_D^\sim - \nu_\rho^\sim GRAND \rho^\sim, \\ \pi_\Omega^\sim &= P_\Omega^{(0.5)} - \nu_u^\sim DIV_\sigma(\rho^\sim u^{(\psi_u)}), \quad P_\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} P_\omega, \quad \psi_u = const, \\ M_{ED}^\sim &= \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_{ED}^\sim = M_{ED}^\sim - \nu_E^\sim GRAND(\rho^\sim \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}), \quad \psi_\varepsilon = const.\end{aligned}$$

Величины из набора искусственных вязкостей $\nu = \{\nu_\rho^\sim, \nu_u^\sim, \nu_E^\sim\}$ определяются в ячейках формулами $\nu_\rho^\sim = \beta_\rho \frac{h^2}{\tau}$, $\nu_u^\sim = \beta_u \frac{h^2}{\tau}$ и $\nu_E^\sim = \beta_E \frac{h^2}{\tau}$ [5], где $\beta = \{\beta_\rho, \beta_u, \beta_E\}$ – приведенные вязкости, зависящие от числа Куранта kr . В силу полученных [5] достаточных условий выполнения принципа максимума для моделирования процесса массопереноса уравнением неразрывности при наличии АИВ нижняя граница коэффициента β связана с числом Куранта kr , которое является тем самым масштабным физическим фактором, влияющим на подавление локальных неустойчивостей в задаче. Математические обоснования устойчивости для уравнений импульса и энергии носят аналогичный характер. В статье [5] разработаны некоторые методы наполнения АИВ и вычисления полученных ПКРС.

2. Численные эксперименты

Для тестирования предлагаемых методов адаптивной искусственной вязкости проводятся расчёты задач Эйфельдта [6] и Сода [7].

Часть результатов расчётов представлена в рис. 1а и рис. 1б. Результаты показывают эффективность данных методов. Часто при моделировании процессов газовой динамики с согласованием законов баланса сохранения массы, импульса и внутренней энергии при учёте энтропии полученные результаты не совпадают с аналитическим представлением [8]. В данных расчётах с применением предложенных методов численные значения скорости и термодинамических величин (плотность, внутренняя энергия и энтропия (P/ρ^γ , γ – показатель адиабаты)) совпадают с аналитическими.

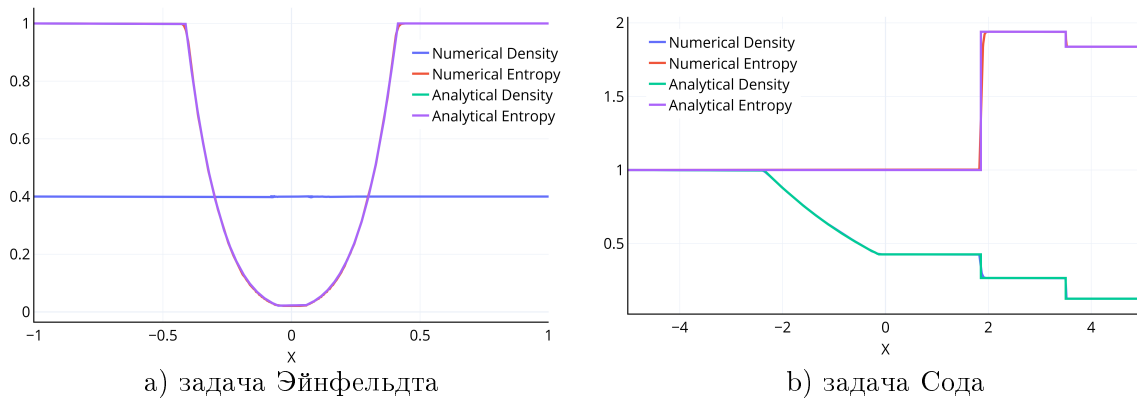


Рис. 1. Профиль плотности и энтропии.

Численное и аналитическое решение задач а) Эйфельдта, б) Сода.

Литература

1. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 953-958.
2. Кузьмин А. В., Макаров В. Л. Об одном алгоритме построения полностью консервативных разностных схем // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1982. Т. 22, № 1. С. 123-132.
3. Кузьмин А. В., Макаров В. Л., Меладзе Г. В. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнения газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20, № 1. С. 171-181.
4. Попов Ю. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2014. 200 с.
5. Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Чжан Х. Сравнительный анализ некоторых итерационных процессов для реализации полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 404-423.
6. Einfeldt B., Munz C. D., Roe P. L., Sjögreen B. On Godunov-type methods near low densities // Journal of Computational Physics. 1991. Vol. 92, No. 2. P. 273-295.
7. Sod G. A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1978. Vol. 27, No. 1. P. 1-31.
8. Guermond J. L., Nazarov M., Popov B., Tomas I. Second-order invariant domain preserving approximation of the Euler equations using convex limiting // SIAM Journal on Scientific Computing. 2018. Vol. 40, No. 5. P. A3211-A3239.

MSC 65M22

Entropy analysis of one completely conservative difference scheme with adaptive artificial viscosity for the numerical solution of gas dynamics problems in Euler variables

M.E. Ladonkina^{1,2}, Yu.A. Poveshchenko^{1,2}, H. Zhang²

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences¹,
Moscow Institute of Physics and Technology²

Abstract: In this paper, an analysis of entropy is carried out in modeling gas dynamics processes using a completely conservative difference scheme with adaptive artificial viscosity in Euler variables. The results show satisfaction of the law of physics of entropy without taking into account the entropy equation.

Keywords: completely conservative difference scheme, adaptive artificial viscosity, entropy, Sod's problem, Enfeldt's problem, computational gas dynamics.

References

1. Popov Yu. P., Samarskii A. A. Polnostyu konservativnye raznostnye skhemy [Fully conservative difference schemes] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1969. Vol. 9, No. 4. P. 953-958. (in Russian)
2. Kuzmin A. V., Makarov V. L. Ob odnom algoritme postroeniya polnostyu konservativnykh raznostnykh skhem [On an algorithm for constructing fully conservative difference schemes] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1982. Vol. 22, No. 1. P. 123-132. (in Russian)
3. Kuzmin A. V., Makarov V. L., Meladze G. V. Ob odnoi polnostyu konservativnoi raznostnoi skheme dlya uravneniya gazovoi dinamiki v peremennykh Eilera [On a fully conservative difference scheme for gas dynamics equations in Euler variables] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1980. Vol. 20, No. 1. P. 171-181. (in Russian)
4. Popov Yu. V., Fryazinov I. V. Metod adaptivnoi iskusstvennoi vyazkosti chislennogo resheniya uravnenii gazovoi dinamiki [Method of adaptive artificial viscosity for numerical solution of gas dynamics equations]. Moscow: Krasand, 2014. 200 p. (in Russian)
5. Ladonkina M. E., Poveshchenko Yu. A., Zhang H. Sravnitel'nyi analiz nekotorykh iteratsionnykh protsessov dlya realizatsii polnostyu konservativnykh raznostnykh skhem dlya uravnenii gazovoi dinamiki v peremennykh Eilera [Comparative analysis of some iterative processes for implementing fully conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2024. Vol. 26, No. 4. P. 404-423. (in Russian)