УДК 519.65; 519.62; 517.521

Приближение производной функции коэффициентами Фурье

Кузьмичев Н.Д.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Приведено доказательство теоремы, согласно которой производную функции, принадлежащей классу Гёльдера-Липшица C^{α} (G), можно с любой наперед заданной точностью аппроксимировать конечной суммой её нечётных коэффициентов Фурье для гармонически модулированного аргумента.

Ключевые слова: класс Гёльдера-Липшица, гармонически модулированный аргумент, зависимости коэффициентов Фурье, аппроксимация производной функции.

1. Введение

В экспериментальной физике, технике и при математическом моделировании явлений с помощью дифференциальных уравнений необходимо иметь не только исследуемую зависимость, но и её производные. Например, в эксперименте измеряют зависимости гармоник исследуемой физической характеристики при гармоническом и статическом воздействиях на изучаемый объект. Тогда возникает задача восстановления изучаемой характеристики и ее производных из найденных зависимостей фурье-гармоник. На этот случай разработаны основы метода модуляционного анализа Фурье [1, 2-5], но ряд положений требуют расширения на более широкий класс функций.

2. Теорема об приближение производной функции, принадлежащей классу Гёльдера-Липшица её коэффициентами Фурье для гармонически модулированного аргумента

Теорема 1. *Любую производную $f'(y)$ функции $f(y)$, принадлежащую классу Гёльдера-Липшица C^{α} на некотором множестве G, можно аппроксимировать с любой наперёд заданной точностью ε следующей конечной суммой коэффициентов её ряда Фурье для гармонически модулированного аргумента $y = x + h\cos t$*

$$\left|\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}(2n-1)A_{2n-1}(x,h) - f'(x)\right| < \varepsilon.$$

h – амплитуда модуляции, $t \in [-\pi, \pi]$, $x \in [a,b]$, $y \in [a-h, b+h] = G$ и

$$A_m(x,h) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x + h\cos t)\cos(mt)dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что функция $f(y)$ имеет производную $f'(y)$ принадлежащую классу Гёльдера-Липшица [6, 7] на некотором множестве G:

$f'(y) \in C^{\alpha}(0 < \alpha \leq 1)$. Аргумент y заставим изменяться по гармоническому закону $y(t) = x + hcost$, $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда, если $x \in [a, b]$, то $y \in G = [a-h, b+h]$. Здесь h – амплитуда модуляции. Суперпозиция функций $f(y(t))$ удовлетворяет условию: $f(-\pi) = f(\pi)$ для любых $x \in [a, b]$. Из выше отмеченных условий следует, что ряд Фурье функции $f(x + h\cos t)$ сходится равномерно для любых $x \in [a, b]$ [6-8]:

$$f(x + h\cos(t)) = \frac{A_0(x,h)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x,h)\cos(nt). \tag{1}$$

Левую и правую часть (1) продифференцируем по t и положим $t = \frac{\pi}{2}$:

$$hf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)A_{2n-1}(x,h). \tag{2}$$

Докажем справедливость выражения (2). Рассмотрим следующую сумму составленную из коэффициентов $A_n(x,h) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+h\cos(t))\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x+h\cos(t))\cos(nt)dt$:

$$hf'_N(x) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}A_{2n-1}(x,h) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x + h\cos(t))\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}(2n-1)\cos[(2n-1)t]dt. \tag{3}$$

Подынтегральную сумму (3), состоящую из косинусов нечётной кратности, просуммируем. В результате получим следующий интеграл:

$$hf'_N(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x + h\cos(t))K_N(t)dt. \tag{4}$$

В выражении (4) интегральное ядро $K_N(t)$ имеет вид:

$$K_N(t) = \frac{\sin[(2N+1)(t+\frac{\pi}{2})]}{2(\cos(t))^2} + (-1)^{N+1}(2N+1)\frac{\cos(2Nt)}{2\cos(t)}.$$

Отметим, что $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} K_N(t)dt = 0$. Учитывая данное замечание, формулу (4) запишем в виде:

$$hf'_N(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}[f(x + h\cos(t)) - f(x)]K_N(t)dt. \tag{5}$$

Рассмотрим интеграл (5) с первым членом ядра $K_N(t)$ и применим к нему формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Тогда получим:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f'(x + \Theta h\cos(t))\frac{\sin[(2N+1)(t+\frac{\pi}{2})]}{2\cos(t)}dt.$$

Здесь $\Theta = \Theta(h)$ и $0 < \Theta(h) < 1$. Интеграл $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin[(2N+1)(t+\frac{\pi}{2})]}{\cos(t)}dt = 1$ [5, 6]. Значит, мы можем записать с учетом сказанного выше следующую формулу:

$$f_N'(x) - f'(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi [f'(x+\Theta h\cos(t)) - f'(x)]\frac{\sin[(2N+1)(t+\frac{\pi}{2})]}{2\cos(t)}dt. \qquad (6)$$

Введем новую переменную $z = t + \frac{\pi}{2}$, и в силу периодичности подынтегрального выражения, сместим пределы интегрирования (6):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} [f'(x+\Theta h\sin(t)) - f'(x)]\frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z}dz. \qquad (7)$$

Данный интеграл при $N \to \infty$ стремится к 0 [5, 6], т.е. для любого сколь угодно малого числа $\frac{\varepsilon}{2}$ можно указать номер $N_1 > N$ такой, что модуль интеграла (7) будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Теперь рассмотрим интеграл (2.5) со вторым членом ядра $K_N(t)$ и также применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Получим:

$$\frac{2N+1}{\pi}(-1)^{N+1}\int\limits_0^\pi f'(x+h\Theta\cos(t))\cos(2Nt)dz. \qquad (8)$$

Интеграл $\int\limits_0^\pi f'(x+h\Theta\cos(t))\cos(2Nt)dz$ при $N \to \infty$ стремиться к 0, так как по условию теоремы $f'(y) \in C^\alpha$ и является коэффициентом Фурье порядка $2N$ подынтегральной функции $f'(x+h\Theta\cos(t))$, который имеет порядок убывания $O\left(\frac{1}{(2N)^{1+\alpha}}\right)$ [8]. В целом, с учетом множителя $(2N+1)$ перед интегралом в выражении (8), получим, что данное выражение стремится к 0, как $O\left(\frac{1}{(2N)^{\alpha}}\right)$. Значит, для любого сколь угодно малого числа $\frac{\varepsilon}{2}$ можно указать номер $N_2 > N$ такой, что модуль выражения (8) будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. В итоге, объединяя две выведенные оценки, мы получили, что

$$\left| f'(x) - \frac{2}{\pi h}\int\limits_0^\pi f(x+h\cos(t))\left\{\frac{\sin[(2N+1)(t+\frac{\pi}{2})]}{2(\cos(t))^2} + (-1)^{N+1}(2N+1)\frac{\cos(2Nt)}{2\cos(t)}\right\}dt\right| < \varepsilon.$$

Из этого следует, что

$$\left|\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}(2n-1)A_{2n-1}(x,h) - f'(x)\right| < \varepsilon.$$

Таким образом, если производная функции $f'(y)$ принадлежит классу Гёльдера-Липшица ($f'(y) \in C^\alpha(0 < \alpha \le 1)$) , то её можно аппроксимировать с любой наперёд заданной точностью ε следующей конечной суммой коэффициентов ряда Фурье зависящей от параметра x ($x \in [a,b], y \in [a-h, b+h]$):

$$f'(x) \approx f'_N(x) = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}(2n-1)A_{2n-1}(x,h). \tag{7}$$

Доказательство завершено.

Литература

1. Вертц Дж., Болтон Дж. Теория и практические приложения метода ЭПР. Москва: Мир, 1975. 548 с.

2. Кузьмичев Н. Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // Журнал технической физики. 1994. Т. 64, № 12. С. 63-74.

3. Кузьмичев Н. Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 1. С. 70-80.

4. Кузьмичев Н. Д. Применение метода модуляционного Фурье-анализа для задачи восстановления производных // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 44-59.

5. Кузьмичев Н. Д. Приближение гёльдеровых функций их коэффициентами Фурье для гармонически модулированного аргумента // Материалы XI Международной научной молодежной школы-семинара им. Е. В. Воскресенского. Саранск, 2024. С. 94-98.

6. Кузьмичев Н. Д. Аппроксимация функции и ее производной, принадлежащих классу Гёльдера-Липшица, их коэффициентами Фурье для гармонически модулированного аргумента // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2025. Т. 65, № 4. С. 417-425.

7. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. Продолжение курса / Под ред. А. Н. Тихонова. Москва: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.

8. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Москва: Физматгиз, 1961. 936 с.

MSC 41A05; 42A10; 42B05

Approximation of the derivative of a function by Fourier coefficients

N.D. Kuzmichev

National Research Mordovian State University

Abstract: The theorem's proof is given according to which the derivative of a function belonging to the Helder-Lipschitz class C^{α} (G) can be approximated with any predetermined accuracy by a finite sum of its odd Fourier coefficients for a harmonically modulated argument.

Keywords: the Gelder-Lipschitz class, a harmonically modulated argument, the dependence of the Fourier coefficients, approximation of the derivative of a function.

References

1. Wertz J., Bolton J. Teoriya i prakticheskie prilozheniya metoda EPR [Theory and Practical Applications of EPR Method]. Moscow: Mir, 1975. 548 p. (in Russian)

2. Kuzmichev N. D. Gisterezisnaya namagnichennost i generatsiya garmonik magnitnymi materialami: analiz spektra garmonik namagnichennosti na primere vysokotemperaturnykh sverkhprovodnikov [Hysteresis magnetization and harmonic generation by magnetic materials: analysis of magnetization harmonic spectrum using high-temperature superconductors as an example] // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki [Journal of Technical Physics]. 1994. Vol. 64, no. 12. P. 63-74. (in Russian)

3. Kuzmichev N. D. Primenenie ryadov Teilora-Fure dlya chislennogo i eksperimentalnogo opredeleniya proizvodnykh izuchaemoi zavisimosti [Application of Taylor-Fourier series for numerical and experimental determination of derivatives of studied dependence] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2011. Vol. 13, no. 1. P. 70-80. (in Russian)

4. Kuzmichev N. D. Primenenie metoda modulyatsionnogo Fure-analiza dlya zadachi vosstanovleniya proizvodnykh [Application of modulation Fourier analysis method for derivative recovery problem] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2024. Vol. 26, no. 1. P. 44-59. (in Russian)

5. Kuzmichev N. D. Priblizhenie gelderovykh funktsii ikh koeffitsientami Fure dlya garmonicheski modulirovannogo argumenta [Approximation of Hölder functions by their Fourier coefficients for harmonically modulated argument] // Materialy XI Mezhdunarodnoi nauchnoi molodezhnoi shkoly-seminara im. E. V. Voskresenskogo [Proceedings of XI International Scientific Youth School-Seminar named after E. V. Voskresensky]. Saransk, 2024. P. 94-98. (in Russian)

6. Kuzmichev N. D. Approksimatsiya funktsii i ee proizvodnoi, prinadlezhashchikh klassu Geldera-Lipshitsa, ikh koeffitsientami Fure dlya garmonicheski modulirovannogo argumenta [Approximation of function and its derivative belonging

to Hölder-Lipschitz class by their Fourier coefficients for harmonically modulated argument] // Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2025. Vol. 65, no. 4. P. 417-425. (in Russian)

7. Ilyin V. A., Sadovnichii V. A., Sendov B. Kh. Matematicheskii analiz. Prodolzhenie kursa [Mathematical Analysis. Continuation of the Course] / Ed. by A. N. Tikhonov. Moscow: Moscow University Press, 1987. 358 p. (in Russian)

8. Bari N. K. Trigonometricheskie ryady [Trigonometric Series]. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 936 p. (in Russian)