

УДК 519.67 517.91 538.94

Ошибки задачи восстановления производных функции из ее гармоник

Кузьмичев Н.Д.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В работе представлены формулы, с помощью которых можно оценить ошибку задачи восстановления производных экспериментально исследуемой зависимости из ее гармоник. Приведен предварительный анализ корректности задачи. Рассмотрены примеры восстановления зависимостей.

Ключевые слова: восстановление производных зависимости, коэффициенты (гармоники) Фурье, корректность задачи восстановления производных.

1. Введение

В экспериментальной физике, приборостроении, радиотехнике и других приложениях часто возникает задача восстановления исследуемой зависимости и ее производных из фурье гармоник возникающих при наложении на объект исследования статического и гармонического воздействий. Подобные задачи находят свое применение в физике полупроводников, сверхпроводимости, ЭПР спектроскопии и др. Для этих целей был разработан метод модуляционного анализа Фурье [1-3]. Но, несмотря на это, ряд положений указанного метода требуют более строгого математического обоснования.

2. Оценки точности восстановления производных зависимости из экспериментально определенных коэффициент Фурье

Как было отмечено во введении, при экспериментальном исследовании некоторой зависимости физического процесса часто приходится регистрировать первую и высшие гармоники исследуемой зависимости вместо непосредственного ее измерения. При этом возникает задача восстановления зависимости из ее гармоник. Как правило, исследователи регистрируют несколько гармоник с определенной ошибкой измерения и по ним восстанавливают требуемую зависимость. Предварительные оценки точности восстановления были выполнены в работах [2, 3].

Рассмотрим функцию $f(z)$ и допустим, что z меняется по гармоническому закону $z(t) = x + h \cos t$, где $x \in [a, b]$, $z \in [a - h, b + h]$ и $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда, при выполнении некоторых условий, функция $f(z(t))$ будет соответствовать ряд Фурье [3]:

$$f(x + h \cos t) = \frac{A_0(x, h)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x, h) \cos(kt). \quad (2.1)$$

Здесь $A_k(x, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x + h \cos t) \cos(kt) dt$.

Если зависимость (функция) $f(z)$ имеет производную $(m + 1)$ порядка удовлетворяющую, например, условиям Дирихле [4, 5], т.е. $(m + 1)$ -ая производная имеет

конечное число разрывов первого рода и кусочно монотонна, то этом случае сходятся ряды $\sum_{k=0}^{\infty} k^m |A_k|$, $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) A_{2k+1}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+2)^2 A_{2k+2}$.

Последние два ряда, составленные из коэффициентов Фурье ряда (2.1), определяют первую $f'(x)$ и вторую $f''(x)$ производные соответственно [3]. Найдем ошибки возникающие при аппроксимации их конечными суммами коэффициентов Фурье $A_k(x, h)$.

Пусть нам необходимо определить производную зависимости, имея в своем арсенале N экспериментально определенных зависимостей амплитуд гармоник (коэффициентов Фурье $A_k(x, h)$) $U_k(x, h)$ ($k = \overline{1, N}$). Допустим, что абсолютная экспериментальная ошибка δ_k определения амплитуды гармоники U_k убывает с ростом номера k по закону: $\delta_k \leq \frac{c_1}{k^{2+\sigma}}$. Здесь числа c_1 (например, абсолютная ошибка определения U_1) и $\sigma > 0$. Для функции у которой производная порядка m принадлежит классу Гёльдера-Липшица C^α коэффициенты Фурье убывают не медленнее, чем $\frac{B}{k^{m+\alpha}}$ ($0 < \alpha \leq 1$) [6, 7]. Здесь величина $B > 0$ – некоторая постоянная, например, $B = \max |A_1(x, h)|$. Учитывая вышесказанное получаем, что измерение U_{k+1} нужно проводить с меньшей абсолютной ошибкой, чем U_k .

Оценим величину ошибки восстановления производной. Рассмотрим следующие функции $hf'_K(x) = \sum_{k=0}^K (-1)^k (2k+1) U_{2k+1}$ и $hf'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) A_{2k+1}$ и, сравнивая эти суммы, оценим ошибку Δ восстановления:

$$\begin{aligned} \Delta = h\delta f' &= \left| \sum_{k=0}^K [(-1)^k (2k+1) (A_{2k+1} - U_{2k+1})] + \sum_{k=K+1}^{\infty} (-1)^k (2k+1) A_{2k+1} \right| < \\ &< \sum_{k=0}^K (2k+1) |A_{2k+1} - U_{2k+1}| + |R_K| < \\ &< c_1 \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \left(1 - \frac{1}{(2K+1)^\sigma} \right) \right] + \frac{B}{2(m+\alpha-1)(2K+1)^{m+\alpha-1}}. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь $|R_K|$ – остаток ряда, который зависит от дифференциальных свойств функции (зависимости) $f(x)$ и стремится к 0 при $K \rightarrow \infty$ ($m \geq 1$):

$$|R_K| = \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} (-1)^k (2k+1) A_{2k+1} \right| \leq B \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{m+\alpha}} < \frac{B}{2(m+\alpha-1)(2K+1)^{m+\alpha-1}}.$$

Для $K \gg 1$ данный остаток влияет на ошибку слабо.

Рассмотрим первый член Δ_1 правой части (2.2): $\Delta_1 = c_1 \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \left(1 - \frac{1}{(2K+1)^\sigma} \right) \right]$. Очевидно, что при $\sigma \neq 0$ и $K \rightarrow \infty$ величина $\Delta_1 \rightarrow c_1 \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \right]$. При $\sigma \ll 1$ величина $\Delta_1 = c_1 \left[1 + \frac{1}{2} \ln(2K+1) \right]$ и при $K \rightarrow \infty$ $\Delta_1 \rightarrow \infty$. Поэтому задача восстановления будет некорректно поставленной [8].

Таким образом, ошибку задачи восстановления производной можно оценивать по формуле:

$$\delta f' = \frac{c_1}{h} \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \left(1 - \frac{1}{(2K+1)^\sigma} \right) \right] + \frac{B}{2h(m+\alpha-1)(2K+1)^{m+\alpha-1}}. \quad (2.3)$$

Для второй производной получаются следующие оценки:

$$\delta f'' = \frac{c_2}{h^2} \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{1}{2^\sigma} - \frac{1}{(2K+2)^\sigma} \right) \right] + \frac{B}{2h^2(m+\alpha-1)(2K+2)^{m+\alpha-1}}. \quad (2.4)$$

3. Анализ корректности задачи восстановления производных

Теперь исследуем при выполнении, каких условий задача восстановления будет корректной. Величина ошибки и корректность задачи восстановления производной в основном определяется первым членом (2.3): $\delta f' \simeq \frac{c_1}{h} \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \left(1 - \frac{1}{(2K+1)^\sigma} \right) \right]$. При значениях $\sigma \ll 1$ имеем:

$$\delta f' \Big|_{\sigma \ll 1} = \left(\frac{c_1}{h} \right) \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right) \ln(2K+1) \right]. \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) логарифмически стремится к бесконечности при $K \rightarrow \infty$, делая задачу восстановления не корректной. Кроме того, множитель $\frac{c_1}{h}$ может быть сравним с производной, т.е. $f' \sim \frac{c_1}{h}$, что также делает задачу не корректной.

Для $\sigma < 1$ или $\sigma \sim 1$ при $K \gg 1$ ошибка $\delta f'$ является конечной величиной:

$$\delta f' \Big|_{\sigma \sim 1} = \left(\frac{c_1}{h} \right) \left(1 + \frac{1}{2\sigma} \right). \quad (2.6)$$

При $\frac{c_1}{h} \ll f'$ задача восстановления производной будет корректной.

Аналогичные рассуждения можно привести и для второй производной.

Литература

1. Кузьмичев Н. Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // Журнал технической физики. 1994. Т. 64, вып. 12. С. 63-74.
2. Кузьмичев Н. Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных // Журнал технической физики. 1997. Т. 37, вып. 7. С. 124-127.
3. Кузьмичев Н. Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 2. С. 70-80.
4. Кузьмичев Н. Д. Применение метода модуляционного Фурье-анализа для задачи восстановления производных // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 44-59.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. Москва: Наука, 1974. 656 с.
6. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. Продолжение курса / Под ред. А. Н. Тихонова. Москва: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.
7. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Москва: Физматгиз, 1961. 936 с.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1986. 288 с.

MSC 41A05; 42A10

Errors in the problem of reconstructing derivatives of a function from its harmonics

N.D. Kuzmichev

National Research Mordovian State University

Abstract: The paper presents formulas that can be used to estimate the error of reconstructing derivatives of an experimentally investigated dependence from its harmonics. A preliminary analysis of the problem's correctness is given. Examples of dependency recovery are considered.

Keywords: recovery of dependence derivatives, Fourier coefficients (harmonics), correctness of derivative recovery.

References

1. Kuzmichev N. D. Gisterezisnaya namagnichennost i generatsiya garmonik magnitnymi materialami: analiz spektra garmonik namagnichennosti na primere vysokotemperaturnykh sverkhprovodnikov [Hysteresis magnetization and harmonic generation by magnetic materials: analysis of magnetization harmonic spectrum using high-temperature superconductors as an example] // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki [Journal of Technical Physics]. 1994. Vol. 64, iss. 12. P. 63-74. (in Russian)
2. Kuzmichev N. D. Otsenki oshibok modulyatsionnogo vosstanovleniya funktsii otklika i ee proizvodnykh [Error estimates for modulation recovery of response function and its derivatives] // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki [Journal of Technical Physics]. 1997. Vol. 37, iss. 7. P. 124-127. (in Russian)
3. Kuzmichev N. D. Primenenie ryadov Teilora-Fure dlya chislennogo i eksperimentalnogo opredeleniya proizvodnykh izuchaemoi zavisimosti [Application of Taylor-Fourier series for numerical and experimental determination of derivatives of the studied dependence] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of the Middle Volga Mathematical Society]. 2011. Vol. 13, no. 2. P. 70-80. (in Russian)
4. Kuzmichev N. D. Primenenie metoda modulyatsionnogo Fure-analiza dlya zadachi vosstanovleniya proizvodnykh [Application of modulation Fourier analysis method for the problem of derivative recovery] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of the Middle Volga Mathematical Society]. 2024. Vol. 26, no. 1. P. 44-59. (in Russian)
5. Smirnov V. I. Kurs vysshei matematiki [Course of Higher Mathematics]. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1974. 656 p. (in Russian)
6. Ilyin V. A., Sadovnichii V. A., Sendov B. Kh. Matematicheskii analiz. Prodolzhenie kursa [Mathematical Analysis. Continuation of the Course] / Ed. by A. N. Tikhonov. Moscow: Moscow University Press, 1987. 358 p. (in Russian)
7. Bari N. K. Trigonometricheskie ryady [Trigonometric Series]. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 936 p. (in Russian)

8. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow: Nauka, 1986. 288 p. (in Russian)