УДК 519.62

О методах определения областей абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для некоторых классов неавтономных дифференциальных уравнений

Кузнецов Е.Б.[1], Леонов С.С.[1,2]

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)[1], Российский университет дружбы народов[2]

Аннотация: В данной работе рассматривается абсолютная устойчивость явного метода Эйлера решения начальной задачи для неавтономного уравнения Далквиста. Уравнение данной задачи, по сравнению с традиционным, дополнено линейным относительно аргумента слагаемым. Дан оригинальный метод построения областей абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для определенных классов начальных задач и установлены оценки шага интегрирования для найденных областей. Все полученные результаты хорошо согласуются с уже имеющимися в научной литературе.

Ключевые слова: область абсолютная устойчивость, явный метод Эйлера, задача Коши, уравнение Далквиста, обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Введение

Одним из ключевых свойств численных методов является их устойчивость, отражающая способность метода препятствовать накоплению ошибки. При решении жестких уравнений явные методы малоприменимы из-за недостаточной устойчивости, а вследствие этого – необходимости значительного уменьшения шага интегрирования. Это приводит к усложнению процесса решения. Традиционно устойчивость численных методов исследуется на начальной задаче для линейного автономного уравнения, предложенного Г. Далквистом [1]. Доказано, что при решении начальной задачи для уравнения Далквиста явные методы имеют меньшую область устойчивости, по сравнению с неявными методами, что объясняет широкое применение последних для решения жестких дифференциальных уравнений и их систем. Более подробно вопросы устойчивости методов Рунге-Кутты освещены в монографии К. Деккера и Я. Вервера [2].

Данная работа посвящена исследованию более общей начальной задачи для неавтономного уравнения Далкиста, которое, по сравнению с уравнением Далквиста, дополнено линейным относительно аргумента слагаемым. Целью данной работы являлось исследование области абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для данной задачи.

2. Постановка задачи и первые результаты

Рассмотрим задачу Коши для неавтономного линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = ay + bt \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(t_0) = y_0, \tag{2}$$

параметры a и b являются заданными, в общем случае комплексными, числами, причем $a \neq 0$. Предполагается, что аргумент задачи может изменяться в интервале $t \in [t_0, T]$.

Уравнение (1) будем называть неавтономным уравнением Далквиста. Описанная выше задача является обобщением начальной задачи для уравнения Далквиста (далее будем также называть его автономным)

$$\frac{dy}{dt} = ay, \tag{3}$$

получаемого из уравнения (1) при $b = 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера вида*

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

решения начальной задачи для неавтономного уравнения Далквиста (1)-(2) *задается неравенством*

$$|1 + ha| \leq 1. \tag{5}$$

При действительных значениях параметра a неравенство (5) *дает ограничение на шаг интегрирования*

$$|h| \leq \frac{2}{|a|} \tag{6}$$

при условии $ah \leq 0$. *При комплексных значениях параметра a, т.е. при* $a = \alpha + i\beta$, *неравенство* (5) *задает на комплексной плоскости в переменных* αh *и* βh *круг единичного радиуса*

$$(\alpha h + 1)^2 + (\beta h)^2 \leq 1 \tag{7}$$

с центром в точке $(-1; 0)$.

Таким образом, области абсолютной устойчивости и условия на шаг интегрирования для задач (1)-(2) и начальной задачи для автономного уравнения Далквиста (3) будут совпадать.

Область абсолютной устойчивости (7) явного метода Эйлера решения начальной задачи для неавтономного уравнения Далквиста (1)-(2) в переменных αh и βh будет иметь вид, изображенный на рис. 1.

3. Начальная задача для неавтономного уравнения Далквиста. Метод продолжения решения

Воспользуемся другим подходом к определению области абсолютной устойчивости, который позволит получить более общие результаты.

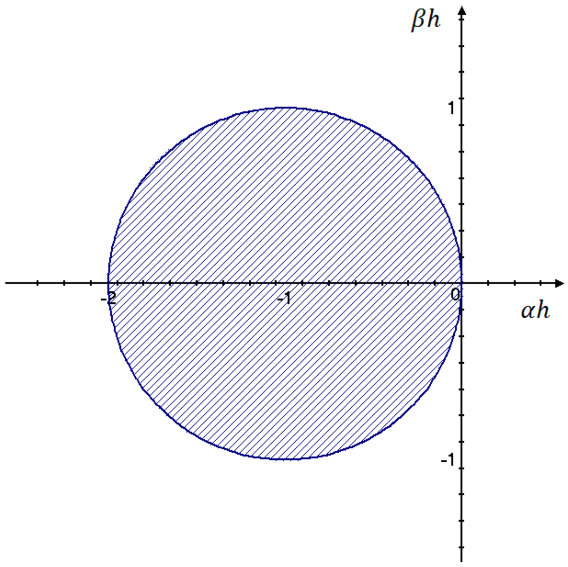

Рис. 1. Область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера решения начальной задачи для уравнения Далквиста

Применим метод продолжения решения по аргументу вида [3]

$$d\mu = \theta_1 dy + \theta_2 dt, \tag{8}$$

где θ_1 и θ_2 являются заданными действительными параметрами, удовлетворяющими условию $\theta_1^2 + \theta_2^2 \neq 0$.

Из соотношений (8) и (1), получим выражение для производной

$$\frac{dt}{d\mu} = \frac{1}{\theta_1 \dfrac{dy}{dt} + \theta_2} = \frac{1}{\theta_1 (ay + bt) + \theta_2},$$

используя которое перейдем от уравнения (1) к преобразованной системе

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\mu} = \dfrac{ay + bt}{\theta_1 (ay + bt) + \theta_2}, \\ \dfrac{dt}{d\mu} = \dfrac{1}{\theta_1 (ay + bt) + \theta_2}. \end{cases} \tag{9}$$

Начальное условие (2) для системы (9) перепишется в форме

$$y(0) = y_0, \quad t(0) = t_0. \tag{10}$$

В итоге, исследование абсолютной устойчивости для неавтономной задачи (1)-(2) свелось к исследованию абсолютной устойчивости для автономной задачи (9)-(10). Будем в дальнейшем полагать, что параметры θ_1 и θ_2 выбираются таким образом, чтобы правая часть системы (9) оставалась непрерывной во всем рассматриваемом интервале.

Явный метод Эйлера (4) для задачи (9)-(10) преобразуется в систему

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf_1(t_k, y_k), \\ t_{k+1} = t_k + hf_2(t_k, y_k). \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 2. *Область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера вида* (11) *решения преобразованной к аргументу вида* (8), *при условии* $\theta_1^2 + \theta_2^2 \neq 0$, *начальной задачи* (9)-(10) *в каждой точке интегральной кривой задается неравенством*

$$\left|1 + h\frac{\theta_2 a - \theta_1 b}{\left(\theta_1\left(ay_k + bt_k\right) + \theta_2\right)^2}\right| \leq 1, \tag{12}$$

где y_k *и* t_k *– численное решение задачи* (9)-(10) *явным методом Эйлера на* k*-ом шаге. При действительных значениях параметров* a *и* b *неравенство* (12) *дает ограничение на шаг интегрирования*

$$|h| \leq \frac{2\left(\theta_1\left(ay_k + bt_k\right) + \theta_2\right)^2}{|\theta_2 a - \theta_1 b|}, \tag{13}$$

при условии $h \cdot (\theta_2 a - \theta_1 b) \leq 0$. *При комплексных значениях параметров* a *и* b, *т.е. при* $a = \alpha + i\beta$ *и* $b = \gamma + i\delta$, *неравенство* (12) *задает на комплексной плоскости в переменных* $h\mathrm{Re}\left[\dfrac{\theta_2 a - \theta_1 b}{\left(\theta_1\left(ay_k + bt_k\right) + \theta_2\right)^2}\right]$ *и* $h\mathrm{Im}\left[\dfrac{\theta_2 a - \theta_1 b}{\left(\theta_1\left(ay_k + bt_k\right) + \theta_2\right)^2}\right]$ *круг единичного радиуса:*

$$\left(h\mathrm{Re}\left[\frac{\theta_2 a - \theta_1 b}{\left(\theta_1\left(ay_k + bt_k\right) + \theta_2\right)^2}\right] + 1\right)^2 + \left(h\mathrm{Im}\left[\frac{\theta_2 a - \theta_1 b}{\left(\theta_1\left(ay_k + bt_k\right) + \theta_2\right)^2}\right]\right)^2 \leq 1. \tag{14}$$

Область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера (14) решения преобразованной начальной задачи (9)-(10) по виду аналогична изображенной на рис. 1, но задается в координатах $h\mathrm{Re}\left[\dfrac{\theta_2 a - \theta_1 b}{\left(\theta_1\left(ay_k + bt_k\right) + \theta_2\right)^2}\right]$ и $h\mathrm{Im}\left[\dfrac{\theta_2 a - \theta_1 b}{\left(\theta_1\left(ay_k + bt_k\right) + \theta_2\right)^2}\right]$.

Из доказанной теоремы 2 при значениях $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 1$ непосредственно следует утверждение теоремы 1. Но этот результат далеко не исчерпывает потенциал теоремы 2, применение которой может дать информацию об абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для достаточно широкого круга начальных задач, связанных с параметризованной задачей (9)-(10).

4. Заключение

В работе исследована область абсолютной устойчивости решения начальной задачи (1)-(2) для неавтономного уравнения Далквиста. Доказано, что область абсолютной устойчивости для неавтономного уравнения Далквиста сохраняет тот же вид, что и для автономного уравнения Далквиста. Это хорошо согласуется с результатами теории устойчивости динамических систем.

Для начальной задачи (1)-(2) используется переход к преобразованной начальной задаче, аргументом которой является линейная комбинация исходных переменных y и t вида (8). Предложенный подход позволил не только получить область абсолютной устойчивости решения начальной задачи для неавтономного уравнения Далквиста, но также для целого класса связных начальных задач.

Литература

1. Dahlquist G. A special stability problem for linear multistep methods // BIT Numerical Mathematics. 1963. Vol. 3. P. 27-43.

2. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. Москва: Мир, 1988. 334 с.

3. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. Москва: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.

MSC 65L20

On methods for determining the domains of absolute stability of the explicit Euler method for some classes of nonautonomous differential equations

E.B. Kuznetsov[1], S.S. Leonov[1, 2]

Moscow Aviation Institute[1],
RUDN University[2]

Abstract: In this paper authors consider the absolute stability of the explicit Euler method for solving of an initial value problem for the nonautonomous Dahlquist equation. The equation of this problem, in comparison with the traditional one, is supplemented with a linear summand with respect to the argument. Authors give an original method of constructing absolute stability domains of the explicit Euler method for certain classes of initial value problems and defined estimates of the integration step size for the founded regions. All the results obtained are in good agreement with those already available in the scientific literature.

Keywords: absolute stability domain, Euler's explicit method, Cauchy problem, Dahlquist equation, ordinary differential equations.

References

1. Dahlquist G. A special stability problem for linear multistep methods // BIT Numerical Mathematics. 1963. Vol. 3. P. 27-43.

2. Dekker K., Verwer J. Ustoichivost metodov Runge-Kutty dlya zhestkikh nelineinykh differentsialnykh uravnenii [Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow: Mir, 1988. 334 p. (in Russian)

3. Shalashilin V. I., Kuznetsov E. B. Metod prodolzheniya resheniya po parametru i nailuchshaya parametrizatsiya v prikladnoi matematike i mekhanike [The method of continuation of solution with respect to parameter and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics]. Moscow: Editorial URSS, 1999. 224 p. (in Russian)