

УДК 539.376

Движение агрессивной среды в стержне круглого поперечного сечения

Кузнецов Е.Б.¹, Леонов С.С.^{1,2}

МАИ¹, РУДН²

Аннотация: Диффузия агрессивной среды в материал стержня моделируется уравнением тепловой волны, что позволяет выделить движение диффузионного фронта.

Ключевые слова: фронт диффузии, фронт агрессии, метод Фурье.

Обычно проникновение некоторой среды в другую среду моделируется уравнением диффузии, которое является уравнением в частных производных параболического типа. Недостаток такого подхода заключается в том, что это уравнение не описывает движение фронта проникающей среды, внедрение которой происходит с бесконечной скоростью. В этом случае исследователи, см., например, [1], движение этого фронта задают искусственно. То же происходит при исследовании теплопереноса в условиях интенсивного нагрева тел, так как гипотеза о пропорциональности вектора плотности теплового потока вектору градиента температуры (закон Фурье), приводит к бесконечной скорости распространения тепловых возмущений, что противоречит фундаментальным законам естествознания.

Данный парадокс возникает из-за представления твердого тела как сплошного. Однако, если рассматривать твердое тело как среду, состоящую из множества отдельных частиц, что на самом деле имеет место, то при передаче теплового, или механического, импульса от частицы к частице проходит некоторое время запаздывания, хоть и малое, но конечное. Поэтому при возникновении градиента температуры тепловой поток запаздывает на некоторое время τ , называемое временем релаксации, т.е. временем установления термодинамического равновесия между градиентом температуры и тепловым потоком.

В связи с этим К. Каттанео, П. Верноттом и А.В. Лыковым [2, 3] в закон Фурье добавляется слагаемое, пропорциональное скорости изменения теплового потока $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ с коэффициентом пропорциональности, равным времени релаксации. После этого закон теплопроводности принимает вид

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \text{grad} u(\mathbf{r}, t) - \tau \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Здесь $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки в пространстве, функция $u(\mathbf{r}, t)$ – температура, t – время и получаем следующее уравнение диффузии

$$\tau \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \text{div} (a^2 \text{grad} u(\mathbf{r}, t)),$$

где $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности.

Последнее уравнение является уравнением гиперболического типа, задающим движение фронта тепловой волны. Оно носит волновой характер с затуханием.

Используя такой подход в [4] процесс диффузии в тонком стержне прямоугольного поперечного сечения моделировался волновым уравнением гиперболического типа, описывающим движение тепловой волны

$$\tau c_{tt} + c_t = Dc_{xx},$$

где $c = c(x, t)$ – концентрация агрессивной среды в материале удлиненного стержня; τ – время релаксации; D – коэффициент диффузии окружающей среды в материал стержня; x – координата, отсчитываемая вдоль толщины стержня, которая значительно меньше его ширины; t – время. Индексы при функции c определяют частные производные по соответствующим переменным.

В данном сообщении рассматривается осесимметричное проникновение внешней агрессивной среды интенсивностью c_0 в длинный металлический стержень круглого поперечного сечения радиуса r_0 .

Уравнение диффузии для функции $c(r, t)$ в полярной системе координат, записанное в безразмерной форме, примет вид

$$c_{tt} + 2bc_t = c_{rr} + \frac{c_r}{r}. \quad (1)$$

Полагаем, что в начальный момент времени внутри образца агрессивная среда отсутствует, тогда начальные условия будут однородными:

$$c(r, 0) = 0, \quad c_t(r, 0) = 0, \quad (2)$$

на боковой поверхности стержня концентрация среды остается постоянной и в силу осевой симметрии краевые условия примут вид

$$c(1, t) = 1, \quad c_r(0, t) = 0. \quad (3)$$

Решение задачи (1)-(3) отыскиваем, согласно методу разделения переменных Фурье и решением задачи будет ряд Фурье-Бесселя

$$c(r, t) = 1 + \sum_{n=1}^N J_0(a_n r) (A_n e^{k_{1n} t} + B_n e^{k_{2n} t}) + e^{-bt} \sum_{n=N+1}^{\infty} J_0(a_n r) (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (4)$$

где $J_0(\lambda r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, N наибольшее целое число, при котором выполняется неравенство $b > a_n$, a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ – корни функции Бесселя первого рода нулевого порядка.

В качестве примера рассмотрим задачу, моделирующую осесимметричное распространение агрессивной среды в длинном металлическом стержне круглого поперечного сечения радиуса $r_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ м, $\tau = 10^{-3}$ с, $D = 10^{-3}$ м²/с. В данном случае значение параметра $b = \frac{r_0}{2\sqrt{D\tau}} = 2$. Наименьший корень функции Бесселя, см. [5], $a_1 = 2.4048$, поэтому выполняется условие $a_1 > b$, а значит решение задачи (1)-(3) будет задаваться рядом

$$c(r, t) = 1 + e^{-bt} \sum_{n=1}^{\infty} J_0(a_n r) (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (5)$$

коэффициенты A_n, B_n в котором определяются при удовлетворении начальных условий (2)

$$c(r, 0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(a_n r) A_n = 0,$$

отсюда коэффициенты A_n представления функции $c(r, 0)$ в ряд Фурье-Бесселя будут выражаться по формулам [5]

$$A_n = -\frac{2}{(J'_0(a_n))^2} \int_0^1 r J_0(a_n r) dr. \quad (6)$$

Начальное условие для производной функции $c(r, t)$ примет вид

$$c_t(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(a_n r) (-b A_n + \omega_n B_n) = 0$$

и коэффициенты B_n будут вычисляться по формулам

$$B_n = \frac{b}{\omega_n} A_n. \quad (7)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3) об осесимметричном распространении агрессивной среды в длинном металлическом стержне круглого поперечного сечения с представленными выше данными задается рядом Фурье-Бесселя (5), коэффициенты в котором вычисляются по формулам (6), (7).

Литература

1. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. Москва: Физматлит, 2016. 504 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Формалев В. Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. Москва: Физматлит, 2015. 280 с.
4. Kuznetsov E. B., Leonov S. S. Applying of the heat wave equation in the study of the movement of an aggressive environment front // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927. P. 012078.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1972. 735 с.

MSC 35L20

Movement of an aggressive medium in a rod of circular cross-section

E.B. Kuznetsov¹, S.S. Leonov^{1,2}

MAI¹, RUDN²

Abstract: The diffusion of an aggressive environment into the rod material is modeled by the heat wave equation, which allows us to isolate the movement of the diffusion front.

Keywords: diffusion front, aggression front, Fourier method.

References

1. Lokoshchenko A. M. Polzuchest i dlitelnaya prochnost metallov [Creep and long-term strength of metals]. Moscow: Fizmatlit, 2016. 504 p. (in Russian)
2. Lykov A. V. Teoriya teploprovodnosti [Theory of heat conduction]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. (in Russian)
3. Formalev V. F. Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh. Chislennyye metody, teplovyye volny, obratnye zadachi [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, thermal waves, inverse problems]. Moscow: Fizmatlit, 2015. 280 p. (in Russian)
4. Kuznetsov E. B., Leonov S. S. Applying of the heat wave equation in the study of the movement of an aggressive environment front // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927. P. 012078.
5. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1972. 735 p. (in Russian)