

УДК 517.9

Об условиях существования вырожденных резонансных уровней в маятниковых уравнениях при квазипериодических неконсервативных параметрических возмущениях*

Костромина О.С.

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Аннотация: Проводится аналитическое и численное исследование периода движения на замкнутых фазовых кривых для маятниковых уравнений с нелинейностью в виде тригонометрического полинома второй и третьей степени. Определяются условия существования вырожденных уровней с порядками вырождения $j = 2$ и $j = 3$ для таких уравнений. При воздействии квазипериодических неконсервативных возмущений вырожденный уровень может стать резонансным (при выполнении условия соизмеримости собственной частоты соответствующей невозмущенной системы с частотами квазипериодического возмущения). Тогда говорим, что имеет место вырожденный резонанс с порядком вырождения j . Топологические структуры вырожденных резонансных зон и задача о синхронизации колебаний при прохождении инвариантного тора через вырожденную резонансную зону с порядками вырождения $j = 2$ и $j = 3$ хорошо изучены.

Ключевые слова: маятниковые уравнения, квазипериодические неконсервативные возмущения, вырожденный резонанс.

1. Введение

Работы [1–3] посвящены изучению квазипериодических по времени неконсервативных возмущений двумерных нелинейных гамильтоновых систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), \end{cases} \quad (1)$$

где ε – малый положительный параметр; $\theta_i = \omega_i t$, $i = \overline{1, m}$; функции g и f – непрерывные и 2π -периодические по θ_i ; гамильтониан H и функции g и f – достаточно гладкие по переменным x и y в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ или $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$; $g'_x + f'_y \neq 0$ в области D (условие неконсервативности возмущения); $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ – несоизмеримые над полем рациональных чисел частоты возмущения. Рассматриваются возмущения, содержащие нелинейные параметрические члены, зависящие как от фазовых координат, так и от времени, вида: $f = f_0(x, y) + f_1(x, y)u(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, $g = g_0(x, y) + g_1(x, y)v(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$.

Относительно соответствующей невозмущенной системы ($\varepsilon = 0$) предполагается, что она является нелинейной гамильтоновой и имеет ячейку $D_0 \subset D$, заполненную

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, грант № 24-21-00050.

замкнутыми фазовыми кривыми $H(x, y) = h$, $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$, и не содержащую малых окрестностей центров и сепаратрис.

Система (1) в переменных «действие I – угол θ » запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon(f(X, Y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)X'_\theta - g(X, Y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)Y'_\theta), \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon(-f(X, Y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)X'_I + g(X, Y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)Y'_I), \\ \dot{\theta}_i = \omega_i, \quad i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $X(I, \theta)$, $Y(I, \theta)$ – решение невозмущенной системы на замкнутых фазовых кривых $H(x, y) = h(I)$, $\omega(I) = \frac{2\pi}{T(h)}$ – собственная частота невозмущенной системы, $T(h)$ – период движения на замкнутых фазовых кривых. Фазовое пространство системы (2) – декартово произведение $[I_{\min}, I_{\max}] \times \mathbb{T}^{m+1}$, где $\mathbb{T}^{m+1}$ – $(m+1)$ -мерный тор, $I_{\min} \equiv I(h_{\min})$, $I_{\max} \equiv I(h_{\max})$.

Определение 1. Уровень $I = I_0$ (замкнутую фазовую кривую $H(x, y) = h(I_0)$ невозмущенной системы) будем называть вырожденным уровнем с порядком вырождения j , если выполнено условие:

$$\omega^{(k)}(I_0) = 0, \quad k = \overline{1, j-1}; \quad \omega^{(j)}(I_0) \neq 0, \quad j > 1.$$

Если $j = 1$, то уровень $I = I_0$ будем называть невырожденным. Здесь $I_0 \in (I_{\min}, I_{\max})$.

Определение 2. Уровень $I = I_{n\mathbf{k}}$ (замкнутую фазовую кривую $H(x, y) = h(I_{n\mathbf{k}})$ невозмущенной системы) будем называть резонансным уровнем при выполнении условия:

$$n\omega(I_{n\mathbf{k}}) = \sum_{i=1}^m k_i \omega_i,$$

где $(n, \mathbf{k}) = (n, k_1, \dots, k_m)$ – набор взаимно простых целых чисел.

Определение 3. Если $I_0 = I_{n\mathbf{k}}$, то уровень $I = I_{n\mathbf{k}}$ (замкнутую фазовую кривую $H(x, y) = h(I_{n\mathbf{k}})$ невозмущенной системы) будем называть вырожденным резонансным уровнем с порядком вырождения j , и говорить, что в системе (2) имеет место вырожденный резонанс. Окрестность $U_{\sqrt{\varepsilon}} = \{(I, \theta) : I_{n\mathbf{k}} - C\sqrt{\varepsilon} < I < I_{n\mathbf{k}} + C\sqrt{\varepsilon}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad C = \text{const} > 0\}$ индивидуального резонансного уровня $I = I_{n\mathbf{k}}$ будем называть резонансной зоной.

В работах [1–3] изучена топология вырожденной резонансной зоны с четным ($j = 2$) и нечетным ($j = 3$) порядками вырождения. Исследование основано на анализе усредненной системы маятникового типа, определяющей динамику в вырожденной резонансной зоне. Поскольку усредненная система имеет лишь сложные состояния равновесия, рассмотрены деформации векторного поля усредненной системы коразмерности, равной порядку вырождения, позволяющие изучить бифуркации квазипериодических решений при переходе от невырожденного резонанса к вырожденному. Получены возможные топологические структуры резонансных зон в зависимости от параметров деформации. Определены условия существования новых резонансных $(m+1)$ -мерных инвариантных торов в расширенном фазовом пространстве, что является характерной особенностью параметрических возмущений. Такие торы отвечают предельным циклам усредненной системы, не имеющим порождающих предельных циклов в соответствующей возмущенной автономной системе. Особое внимание уделяется синхронизации колебаний в окрестности вырожденного резонанса при $j = 2$

и $j = 3$ [1]. Устанавливается существование интервалов синхронизации по параметру расстройки, определяющему отклонение резонансного уровня $I_{n\mathbf{k}}$ от вырожденного уровня I_0 . В работах [2, 3] полученные результаты проиллюстрированы на примере асимметричного уравнения типа Дуффинга с немонотонным вращением при двухчастотном параметрическом квазипериодическом возмущении. Для такого уравнения имеется вырожденный резонансный уровень лишь с порядком вырождения $j = 2$.

Примером уравнения, имеющим вырожденные уровни с порядком вырождения $j \geq 2$, может служить маятниковое уравнение с нелинейностью в виде тригонометрического полинома степени n :

$$\ddot{x} + \sum_{k=1}^n p_k \sin kx = 0, \quad (3)$$

где p_k , $k = \overline{1, n}$, – параметры, $p_1 \neq 0$. В работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для $2 \leq n \leq 4$ максимально возможный порядок вырожденных уровней в уравнении (3) равен n .

В настоящей работе определяются условия существования вырожденных уровней с порядками вырождения $j = 2$ и $j = 3$ в уравнении:

$$\ddot{x} + \sum_{k=1}^3 p_k \sin kx = 0. \quad (4)$$

2. Результаты

Уравнение (4) эквивалентно гамильтоновой системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sum_{k=1}^3 p_k \sin kx \end{cases} \quad (5)$$

с гамильтонианом

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + (p_3 - p_1) \cos x - p_2 \cos^2 x - \frac{4p_3}{3} \cos^3 x + p_1 + p_2 + \frac{p_3}{3}.$$

Проводится аналитическое исследование системы (5): находим состояния равновесия системы на фазовом цилиндре $\{x(\bmod(2\pi)), y\}$ и устанавливаем их типы, строим разбиение плоскости управляющих параметров на области с качественно различными фазовыми портретами, приводим фазовые портреты для каждой области полученного разбиения.

Совокупность фазовых кривых, определяемых интегралом энергии $H(x, y) = h$, не охватывающих (охватывающих) фазовый цилиндр, формирует области колебательных (вращательных) движений маятника. Заметим, что состоянию равновесия $(0, 0)$ системы (5) отвечает $h = 0$, а состоянию равновесия $(\pi, 0) \equiv (-\pi, 0) - h = 2p_1 + \frac{2p_3}{3}$.

Используя первый интеграл $H(x, y) = h$ системы (5), находим период движения $T(h)$ на замкнутых фазовых кривых:

$$T(h) = 4 \int_0^{x_0(h)} \frac{dx}{\sqrt{2(h + U(x))}} \quad (6)$$

в областях колебательных движений маятника и

$$T(h) = 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{2(h + U(x))}} \quad (7)$$

в областях вращательных движений маятника. Здесь

$$U(x) = \frac{4p_3}{3} \cos^3 x + p_2 \cos^2 x + (p_1 - p_3) \cos x - p_1 - p_2 - \frac{p_3}{3},$$

$x_0(h)$ – простой корень уравнения $U(x) + h = 0$, не являющийся абсциссой состояния равновесия.

Очевидно, что период движения $T(h)$, определяемый формулой (7), является строго монотонно убывающей функцией, поскольку

$$T'(h) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(h + U(x))^3}} < 0.$$

Следовательно, $\omega(h)$ является монотонно возрастающей функцией, а значит в областях вращательных движений маятника вырожденные уровни отсутствуют.

Изучим поведение функции $T(h)$, определяемой формулой (6), в областях колебательных движений маятника. При $p_1 > 0$, $p_2 = p_3 = 0$ функция $T(h) = \frac{4}{\sqrt{p_1}} \mathbf{K}(k)$, где $\mathbf{K}(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, k – его модуль, является монотонно возрастающей от $\frac{2\pi}{\sqrt{p_1}}$ до $+\infty$ на промежутке $(0, 2p_1)$. Следовательно, в этом случае вырожденные уровни отсутствуют.

В случае $p_3 = 0$ удастся найти аналитическое выражение для $T(h)$ для каждой области колебательных движений маятника. На плоскости параметров (p_1, p_2) выделяются области, где $T(h)$ не является монотонной функцией, а точнее имеет одну точку минимума. При этих значениях параметров имеет место вырожденный уровень с порядком вырождения $j = 2$.

В случае $p_3 \neq 0$ интеграл в (6) сводится к гиперэллиптическому интегралу, поэтому не удастся найти аналитическое выражение для $T(h)$ (проблема обращения гиперэллиптических интегралов). В этом случае задача решается численно.

Таким образом, теоретические результаты работ [1], [3] по описанию топологической структуры вырожденных резонансных зон и синхронизации квазипериодических колебаний в вырожденных случаях с порядками вырождения $j = 2$ и $j = 3$ могут быть применены, например, к системе вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sum_{k=1}^3 p_k \sin kx + \varepsilon [(-1 + p_4 \cos 3x + p_5 y \alpha(t)) y + p_6 \alpha(t)], \end{cases}$$

где ε – малый положительный параметр, $\alpha(t) = \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t$.

Литература

1. Morozov K. E., Morozov A. D. Degenerate Resonances and Synchronization of Quasiperiodic Oscillations // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 269, no. 6. P. 823-834.

2. Morozov A. D., Morozov K. E. Parametric Perturbations of a Duffing-Type Equation with Nonmonotonic Rotation // Communications in Computer and Information Science. 2023. Vol. 1914. P. 86-97.
3. Morozov A. D., Morozov K. E. Quasi-Periodic Parametric Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems with Nonmonotonic Rotation // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. Vol. 29, no. 1. P. 64-76.
4. Драгунов Т. Н., Королев С. А., Морозов А. Д. О вырожденных резонансах в уравнениях маятникового типа // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия Математика. 2006. Вып. 1(4). С. 18-28.

MSC 34C15

On the conditions for the existence of degenerate resonance levels in pendulum equations under quasiperiodic nonconservative parametric perturbations

O.S. Kostromina

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Abstract: An analytical and numerical study of the period of motion on closed phase curves for pendulum equations with nonlinearity in the form of a trigonometric polynomial of the second and third degree is carried out. Conditions for the existence of degenerate levels with degeneracy orders $j = 2$ and $j = 3$ for such equations are determined. Under the action of quasiperiodic nonconservative perturbations, a degenerate level can become a resonance level (under the condition of commensurability of the natural frequency of the corresponding unperturbed system with the frequencies of the quasiperiodic perturbation). Then we say that a degenerate resonance with the degeneracy order j takes place. The topological structures of degenerate resonance zones and the problem of synchronization of oscillations when an invariant torus passes through a degenerate resonance zone with the degeneracy orders $j = 2$ and $j = 3$ have been well studied.

Keywords: pendulum equations, quasiperiodic nonconservative perturbations, degenerate resonance.

References

1. Morozov K. E., Morozov A. D. Degenerate Resonances and Synchronization of Quasiperiodic Oscillations // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 269, no. 6. P. 823-834.
2. Morozov A. D., Morozov K. E. Parametric Perturbations of a Duffing-Type Equation with Nonmonotonic Rotation // Communications in Computer and Information Science. 2023. Vol. 1914. P. 86-97.
3. Morozov A. D., Morozov K. E. Quasi-Periodic Parametric Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems with Nonmonotonic Rotation // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. Vol. 29, no. 1. P. 64-76.
4. Dragunov T. N., Korolev S. A., Morozov A. D. O vyrozhdennykh rezonansakh v uravneniyakh mayatnikovogo tipa [On degenerate resonances in pendulum-type equations] // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. Seriya Matematika [Bulletin of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod. Mathematics Series]. 2006. Iss. 1(4). P. 18-28. (in Russian)