

УДК 517.9

Анализ динамики двумерной модели нейрона Хиндмарша–Роуза*

Костромина О.С.

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Аннотация: Используя известные методы качественной теории и теории бифуркаций динамических систем на плоскости, проводится аналитический и численный анализ динамики двумерной модели нейрона Хиндмарша–Роуза в зависимости от ее параметров. Строится бифуркационная диаграмма на плоскости управляющих параметров. Бифуркационные кривые, часть которых получена аналитически, часть – численно, разбивают плоскость параметров на тринадцать областей с разной топологией фазовых портретов, установленной для каждой полученной области.

Ключевые слова: модель Хиндмарша–Роуза, предельные циклы, бифуркации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему Хиндмарша–Роуза, которая описывает динамику электрической активности отдельного биологического нейрона:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 + bx^2 + I - z, \\ \dot{y} = c - dx^2 - y, \\ \dot{z} = \varepsilon(s(x - r) - z). \end{cases} \quad (1)$$

Изначально нелинейная система Хиндмарша–Роуза описывалась системой двух дифференциальных уравнений первого порядка [1], однако в результате анализа ряда проведенных экспериментов были обнаружены некоторые новые, не учитываемые ранее, функциональные режимы нейронов. Это стало причиной, по которой Хиндмарш и Роуз добавили третье уравнение, что позволило изучить поведение нейрона с учетом этих новых режимов [2]. Данную нелинейную модель можно рассматривать как обобщение модели Фитцхью–Нагумо и упрощение модели Ходжкина–Хаксли.

Переменная x в системе (1) описывает мембранный потенциал нейрона, переменные y и z описывают активацию и дезактивацию быстрых и медленных ионных токов, протекающих через мембрану; положительные параметры a, b, c, d, s и отрицательный параметр r характеризуют нелинейные свойства проводимости мембраны. Скорость изменения переменной z определяется малым параметром $0 < \varepsilon \ll 1$, поэтому \dot{z} определяет динамику медленного калиевого тока, а \dot{y} – быстрого натриевого тока. Параметр I , изменяющийся в диапазоне от -10 до 10, описывает внешний ток, подаваемый на нейрон. Модель имеет восемь параметров. Обычно некоторые из них фиксируют, остальные определяют как параметры управления динамическими режимами системы. Так, часто в качестве управляющего параметра берется параметр I . Другими управляющими параметрами являются a, b, c или d , моделирующие рабо-

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФ, грант № 24-11-00339.

ту быстрых ионных токов. Типичными значениями параметров являются $a = c = 1$, $b = 3$, $d = 5$, $s = 4$, $r = -\frac{8}{5} [3, 4]$.

В силу малости параметра ε данную систему уравнений можно разбить на быструю и медленную подсистемы [3, 4]. В данной работе рассматривается динамика быстрой подсистемы, которую составляют первые два уравнения для переменных x и y . При $\varepsilon = 0$ значение переменной z является фиксированным и входит в быструю подсистему в качестве параметра. В результате получим двумерную систему Хиндмарша–Роуза:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 + bx^2 + I, \\ \dot{y} = c - dx^2 - y. \end{cases} \quad (2)$$

Цель данной работы — изучить возможные бифуркации двумерной системы Хиндмарша–Роуза, используя известные методы качественной теории и теории бифуркаций динамических систем на плоскости [5, 6].

2. Бифуркационная диаграмма

Разбиение плоскости параметров (d, I) на области с разной топологией фазовых портретов системы (2) при $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ показано на рис. 1, 2.

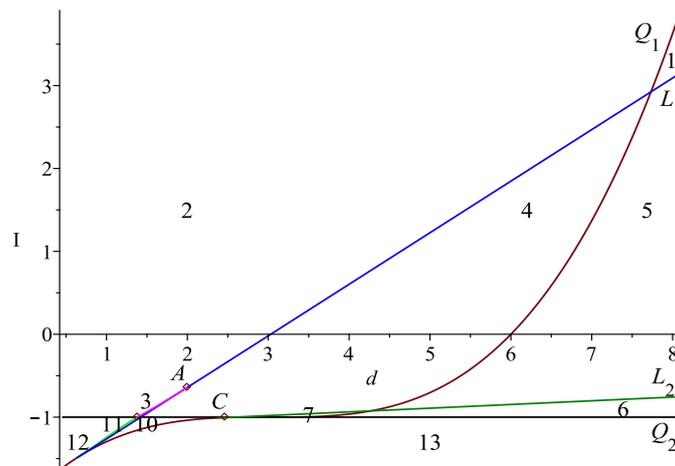


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для системы (2) при $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

Получено семь бифуркационных кривых, четыре из которых Q_1 , Q_2 , L_1 , L_2 найдены аналитически. Бифуркационные кривые Q_1 и Q_2 являются дискриминантными кривыми. Участок кривой Q_2 от точки B до точки C соответствует бифуркации петли сепаратрисы седло-узла. Остальные два участка кривой Q_2 и кривая Q_1 отвечает седло-узловой бифуркации. Бифуркационные кривые L_1 и L_2 отвечают бифуркациям Андронова–Хопфа: на участке кривой L_1 выше точки A и на кривой L_2 происходит суперкритическая бифуркация (мягкая потеря устойчивости), на участке кривой L_1 ниже точки A происходит субкритическая бифуркация (жесткая потеря устойчивости). Бифуркационные кривые L_3 , L_4 и L_5 получены численно. L_3 отвечает бифуркации двукратного предельного цикла. Она выходит из точки $A \in L_1$, координаты которой (d_0, I_0) найдены аналитически, и заканчивается в точке B на дискриминантной кривой Q_2 . L_4 и L_5 отвечают бифуркациям петли сепаратрисы седла. L_4 (L_5) выходит из точки касания кривой L_1 (L_2) с Q_1 , в которой седловая величина обращается в нуль, и заканчивается в точке B (C) на дискриминантной кривой Q_2 .

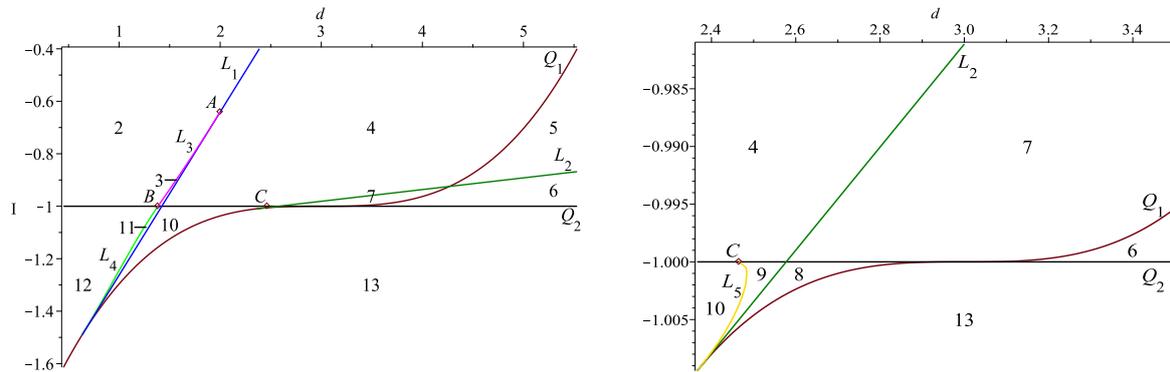


Рис. 2. Увеличенные фрагменты бифуркационной диаграммы.

3. Заключение

Двумерная модель нейрона Хиндмарша–Роуза демонстрирует бистабильное сосуществование устойчивого предельного цикла и устойчивого состояния равновесия. Устойчивое состояние равновесия соответствует покою нейрона, устойчивый предельный цикл — периодической генерации нейроном спайков.

Устойчивое состояние равновесия данной модели может:

- исчезнуть в результате седло-узловой бифуркации, которая может произойти как вне, так и на петле сепаратрисы седло-узла;
- потерять устойчивость вследствие суперкритической или субкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

Устойчивый предельный цикл данной модели может исчезнуть вследствие:

- бифуркации петли сепаратрисы седло-узла;
- суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа;
- бифуркации петли сепаратрисы седла;
- бифуркации двукратного предельного цикла.

Литература

1. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of the nerve impulse using two first-order differential equations // Nature. 1982. Vol. 296, no. 5853. P. 162-164.
2. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A Model of Neuronal Bursting Using Three Coupled First Order Differential Equations // Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences. 1984. Vol. 221, no. 1222. P. 87-102.
3. Коломиец М., Шильников А. Методы качественной теории для модели Хиндмарш-Роуз // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 1. С. 23-52.
4. Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щапин Д. С., Некоркин В. И. Нелинейные динамические модели нейронов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 4. С. 5-58.
5. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. Москва: Наука, 1967. 488 с.

6. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Москва: Наука, 1990. 490 с.

MSC 34C15

Analysis of the dynamics of a two-dimensional Hindmarsh–Rose neuron model

O.S. Kostromina

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Abstract: Using known methods of qualitative theory and bifurcation theory of dynamic systems on a plane, an analytical and numerical analysis of the dynamics of a two-dimensional Hindmarsh–Rose neuron model is carried out depending on its parameters. A bifurcation diagram is constructed on the plane of control parameters. Bifurcation curves, some of which are obtained analytically, some of which are obtained numerically, divide the plane of parameters into thirteen regions with different topologies of phase portraits, which are established for each obtained region.

Keywords: Hindmarsh–Rose model, limit cycles, bifurcations.

References

1. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of the nerve impulse using two first-order differential equations // *Nature*. 1982. Vol. 296, no. 5853. P. 162-164.
2. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A Model of Neuronal Bursting Using Three Coupled First Order Differential Equations // *Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*. 1984. Vol. 221, no. 1222. P. 87-102.
3. Kolomiets M., Shilnikov A. Metody kachestvennoi teorii dlya modeli Khindmarsh-Rouz [Methods of qualitative theory for the Hindmarsh-Rose model] // *Nelineinaya dinamika [Nonlinear Dynamics]*. 2010. Vol. 6, no. 1. P. 23-52. (in Russian)
4. Dmitrichev A. S., Kasatkin D. V., Klin'shov V. V., Kirillov S. Yu., Maslennikov O. V., Shchapin D. S., Nekorkin V. I. Nelineinye dinamicheskie modeli neuronov [Nonlinear dynamical models of neurons] // *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineinaya dinamika [University News. Applied Nonlinear Dynamics]*. 2018. Vol. 26, no. 4. P. 5-58. (in Russian)
5. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. Teoriya bifurkatsii dinamicheskikh sistem na ploskosti [Theory of bifurcations of dynamical systems on the plane]. Moscow: Nauka, 1967. 488 p. (in Russian)
6. Bautin N. N., Leontovich E. A. Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti [Methods and techniques for qualitative investigation of dynamical systems on the plane]. Moscow: Nauka, 1990. 490 p. (in Russian)