УДК 519.63

Построение программного управления для дифференциально-разностной системы с линейно возрастающим запаздыванием

Жигалов В.С., Жабко А.П.

Санкт-Петербургский Государственный университет

Аннотация: В данной работе изучаются вопросы 0-управляемости и конструктивной идентифицируемости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. Для исследования этих вопросов были применены методы, использованные для аналогичных систем с постоянным запаздыванием в работах Хартовского В.Е., Метельского А.В. и Минюка С.А. Основным результатом исследования является расширение известных результатов на случай систем с линейно-возрастающим запаздыванием.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, линейно возрастающее запаздывание, программное управление.

1. Введение

В настоящее время не ослабевает актуальность исследования математических моделей, описываемых дифференциально-разностными уравнениями с линейно возрастающим запаздыванием [1]. Системы и уравнения с линейным запаздыванием встречаются в математических моделях динамики автомобильного потока на кольцевой автодороге, работы информационного сервера [2], смесительного бака [3] и пр.

Стоит отметить, что в отличие от автономных обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием и постоянными коэффициентами дифференциально-разностные уравнения с постоянными коэффициентами и линейным запаздыванием не являются стационарными. Данный факт усложняет их анализ, так как позволяет использовать не все методы, применимые для работы с обыкновенными уравнений или уравнениями с постоянным запаздыванием.

2. Теорема о двойственности

Рассмотрим линейную систему дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием с управлением:

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = A\zeta(t) + A_1\zeta(\alpha t) + Bu(t), \quad t \geq 1; \tag{1}$$

при $0 < \alpha < 1$, с начальными условиями:

$$\zeta(t) = q(t), t \in [\alpha, 1], \tag{2}$$

где ζ - $n-$вектор решения с начальной кусочно-непрерывной функцией q, u – $r-$вектор управления, A, A_1, B – постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Дадим определение 0-управляемости начальной функции $q(t)$ из системы (1), (2) по аналогии с определением для уравнений с постоянным запаздыванием [4].

Определение 1. *Функция $q(t)$ из начального условия (2) системы (1) является 0-управ-
ляемой, если $\exists t_1 > 1$ и существует кусочно-непрерывная функция $u(t), t \in T = [1, t_1]$, такие что*
$$\zeta(t) = 0, t \in [\alpha t_1, t_1]. \tag{3}$$

Если условие (3) выполняется для любых функций $q(.)$ из (2), то система (1) полностью 0-управляема.

Поставим системе (1), (2) в соответствие на промежутке T линейную систему с наблюдением:
$$\begin{cases} \dfrac{d\chi(t)}{dt} = -A'\chi(t) - \dfrac{1}{\alpha}A_1'\chi\left(\dfrac{t}{\alpha}\right), \\ \sigma(t) = B'\chi(t); \end{cases} \tag{4}$$
где «штрих» обозначает операцию транспонирования. Начальные условия:
$$\chi(t) = \phi\left(\frac{t_1}{t}\right), \quad t \in \left[t_1, \frac{t_1}{\alpha}\right]. \tag{5}$$

Для функции ϕ из граничного условия (5) должно выполняться условие:
$$P_1\phi(\alpha) + P_2\phi(1) = 0 \tag{6}$$
для некоторых матриц P_1, P_2 размера $n \times n$.

Дадим определение конструктивной идентифицируемости системы (4), также по аналогии с определением для систем с постоянным запаздыванием [4].

Определение 2. *Система (4) с начальными условиями (5), (2) является конструктивно идентифицируемой в направлении $p(.)$, если существует кусочно-непрерывная функция $v(t), t \in T$, такая что выполняется равенство:*
$$\int\limits_1^{t_1} v'(t)\sigma(t)dt = p'(1)\chi(1) + \int\limits_1^{\frac{1}{\alpha}} p'(\alpha t)A_1'\chi(t)dt \tag{7}$$
для любой функции $\chi(t)$, удовлетворяющей условию (5). Функция $v(t)$ назывется решающей функцией.

Если система (4) – конструктивно идентифицируема в направлении любых кусочно-непрерывных функций, то она полностью конструктивно идентифицируема.

Теорема 1. *Если система (4) – конструктивно идентифицируема в направлении $p(.)$, то начальная функция $q(t) = p(t)$ системы (1), (2) – 0-управляема функцией $u(t) = -v(t)$, где $v(t)$ – решающая функция для направления $p(.)$ на промежутке T. Если начальная функция $q(t)$ системы (1), (2) 0-управляема функцией $u(t)$, то система (4) конструктивно идентифицируема в направлении $p(t) = q(t)$, причем $v(t) = -u(t), t \in T$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем действовать по аналогии с авторами статьи [4]. Проинтегрируем по частям производную решения первого уравнения из (4), умноженную слева на $\zeta'(t)$ из (1), (2), на промежутке T и в соответствии с (1), (2), (4),

(5) получаем:

$$\zeta'(t_1)\chi(t_1) = \zeta'(1)\chi(1) - \int_{t_1}^{\frac{t_1}{\alpha}} \zeta'(\alpha t)A_1'\chi(t)dt + \int_{1}^{\frac{1}{\alpha}} \zeta'(\alpha t)A_1'\chi(t)dt + \int_{1}^{t_1} u'(t)B'\chi(t)dt \quad (8)$$

Докажем первую часть теоремы. Пусть система (4) является конструктивно идентифицируемой в направлении $p(.)$, в качестве решающей функции на промежутке T выступает $v(t)$, т.е. выполняются равенства (7) и (8), для любых $\chi(t)$. Далее при подстановке (8) в (7) с учетом начальных условий (2), (5), наблюдения в (4) и $p(t) = q(t), t \in [\alpha, 1]$ получаем:

$$\int_{1}^{t_1} v'(t)\sigma(t)dt = \zeta'(t_1)\chi(t_1) + \int_{t_1}^{\frac{t_1}{\alpha}} \zeta'(\alpha t)A_1'\chi(t)dt - \int_{1}^{t_1} u'(t)\sigma(t)dt$$

далее, при условии $u(t) = -v(t), t \in T$ получаем:

$$\zeta'(t_1)\chi(t_1) + \int_{t_1}^{\frac{t_1}{\alpha}} \zeta'(\alpha t)A_1'\chi(t)dt = \zeta'(t_1)\phi(1) + \int_{t_1}^{\frac{t_1}{\alpha}} \zeta'(\alpha t)A_1'\phi\left(\frac{t_1}{t}\right)dt = 0. \quad (9)$$

Последнее равенство выполняется для всех кусочно-непрерывных функций $\phi(t)$, удовлетворяющих (2). Следовательно [5], $\zeta(t) = 0, t \in [\alpha t_1, t_1]$, и начальная функция $q(t)$ системы (1) - 0-управляема функцией $u(t) = -v(t)$.

Для доказательства второй части теоремы нужно начать с равенства (9) и воспроизвести рассуждения выше в обратном порядке.

Доказательство завершено.

Следствие 1. *Если система* (4) *полностью конструктивно идентифицируема, то система* (1), (2) *полностью 0-управляема, и наоборот.*

3. Заключение

Таким образом, в работе получена теорема двойственности для задач 0-управляемости и конструктивной идентифицируемости линейных систем с линейно возрастающим запаздыванием. Данный результат может быть полезен для получения конструктивных методов построения программного управления в системах с линейно возрастающим запаздыванием.

Литература

1. Хартовский В. Е. Задачи идентификации и управления выходом для систем с запаздываниями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 17-31.

2. Жабко А. П., Чижова О. Н. Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Т. 11, № 3. С. 105-115.

3. Жабко А. П., Чижова О. Н. Гибридный метод анализа устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием

// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, № 4. С. 843-850.

4. Метельский А. В., Минюк С. А. Полная управляемость и полная конструктивная идентифицируемость вполне регулярных алгебро-дифференциальных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 3. С. 311-327.

5. Li Y., Liu Y. Preprints of the 13th World Congress IFAC, San Francisco, USA, 30 June - 5 July 1996. Vol. D. P. 79-84.

MSC 93B05

Construction of program control for the differential-difference system with linearly increasing delay

V.S. Zhigalov, A.P. Zhabko

Saint-Petersburg State university

Abstract: In this paper, the issues of 0-controllability and constructive identifiability of linear differential-difference systems with linearly increasing delay are studied. To study these issues, the methods used for similar systems with a constant delay in the works of V.E. Khartovsky, A.V. Metelsky, and S.A. Minyuk were applied. The main result of the study is an extension of the known results to the case of systems with linearly increasing delay.

Keywords: differential-difference equations, linearly increasing delay, program control.

References

1. Khartovskii V. E. Zadachi identifikatsii i upravleniya vykhodom dlya sistem s zapazdyvaniyami [Identification and output control problems for time-delay systems] // Avtomatika i telemekhanika [Automation and Remote Control]. 2011. No. 5. P. 17-31. (in Russian)

2. Zhabko A. P., Chizhova O. N. Analiz ustoichivosti odnorodnogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya s lineinym zapazdyvaniem [Stability analysis of homogeneous differential-difference equation with linear delay] // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya [Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes]. 2015. Vol. 11, no. 3. P. 105-115. (in Russian)

3. Zhabko A. P., Chizhova O. N. Gibridnyi metod analiza ustoichivosti lineinykh differentsial'no-raznostnykh sistem s lineino vozrastayushchim zapazdyvaniem [Hybrid method for stability analysis of linear differential-difference systems with linearly increasing delay] // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki [Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences]. 2015. Vol. 20, no. 4. P. 843-850. (in Russian)

4. Metel'skii A. V., Minyuk S. A. Polnaya upravlyaemost' i polnaya konstruktivnaya identifitsiruemost' vpolne regulyarnykh algebro-differentsial'nykh sistem s zapazdyvaniem [Complete controllability and complete constructive identifiability of completely regular algebraic-differential systems with delay] // Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]. 2007. Vol. 43, no. 3. P. 311-327. (in Russian)

5. Li Y., Liu Y. Preprints of the 13th World Congress IFAC, San Francisco, USA, 30 June - 5 July 1996. Vol. D. P. 79-84.