УДК 517.9:539.3:532.5

Два способа исследования динамики упругой стенки канала квадратного сечения на основе метода Фурье

Жаркова А.С., Анкилов А.В.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: В работе исследуется динамика стенки трехмерного канала квадратного сечения, через который протекает поток идеальной несжимаемой жидкости в условиях задания закона изменения давления на входе и выходе. Рассматривается канал, жестко закрепленный с трех сторон и с незакрепленной четвертой упругой стороной (пластиной). На основе построенной математической модели, описываемой системой дифференциальных уравнений в частных производных, исследуется динамика незакрепленной упругой стенки канала с учетом взаимодействия с потоком жидкости в модели несжимаемой среды. Поведение упругого материала пластины описывается линейной моделью. Решение аэрогидродинамической части задачи в модели несжимаемой среды основано на представлении искомой функции давления газа в виде частичных сумм двойных рядов, для определения коэффициентов которых применены два способа. При этом аэрогидродинамическая нагрузка определяется через функцию, описывающую неизвестный прогиб стенки, для определения которой поставлена начально-краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных, решенная с помощью метода Галеркина.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, динамика, аэрогидроупругость, канал, упругая пластина, метод Фурье, метод Галеркина.

1. Постановка задачи для потенциала скорости

Работа является продолжением исследований [1–4]. В отличие от перечисленных работ рассматривается движение жидкости уже в трехмерном канале $J = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 < x < l, 0 < y < h,\ 0 < z < h\}$. Скорость невозмущенного потока идеальной несжимаемой жидкости равна V и направлена вдоль оси Ox. Предполагается, что упругой является только стенка при $y = 0$, т.е. l и h – длина и ширина пластины в недеформированном состоянии, а остальные стенки канала считаются недеформируемыми.

Если на входе и выходе из канала заданы законы изменения давления жидкости $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ соответственно, то краевая задача для неизвестных потенциала скорости возмущенного потока жидкости $\phi\,(x, y, z, t)$ и прогиба жестко закрепленной по краям пластины $w\,(x, z, t)$ примет вид:

$$\phi_{xx}\,(x, y, z, t) + \phi_{yy}\,(x, y, z, t) + \phi_{zz}\,(x, y, z, t) = 0, \quad (x, y, z) \in J; \tag{1}$$

$$\phi_y\,(x, 0, z, t) = w_t\,(x, z, t) + V w_x\,(x, z, t)\,,\ (x, z) \in T_1 = \left\{(x, z) \in R^2 : 0 < x < l,\ 0 < z < h\right\}; \tag{2}$$

$$\phi_y\,(x, h, z, t) = 0, \quad (x, z) \in T_1; \tag{3}$$

$$\phi_z(x, y, 0, t) = \phi_z\,(x, y, h, t) = 0, \quad (x, y) \in T_2 = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 < x < l,\ 0 < y < h\right\}; \tag{4}$$

$$\phi_t\,(0, y, z, t) + V\phi_x\,(0, y, z, t) = \phi_1(t), \quad (y, z) \in T_3 = \left\{(y, z) \in R^2 : 0 < y < h,\ 0 < z < h\right\}; \tag{5}$$

$$\phi_t\left(l,y,z,t\right)+V\phi_x\left(l,y,z,t\right)=\phi_2(t),\quad (y,z)\in T_3; \tag{6}$$

$$\bar{P}(x,z,t)=-\rho\left(\phi_t\left(x,0,z,t\right)+V\phi_x\left(x,0,z,t\right)\right),\quad (x,z)\in T_1; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} Mw_{tt}\left(x,z,t\right)+D\left(w_{xxxx}\left(x,z,t\right)+2w_{xxzz}\left(x,z,t\right)+w_{zzzz}\left(x,z,t\right)\right)+ \\ +\beta_2\left(w_{xxxxt}\left(x,z,t\right)+2w_{xxzzt}\left(x,z,t\right)+w_{zzzzt}\left(x,z,t\right)\right)+N_{(x)}w_{xx}\left(x,z,t\right)+ \\ +N_{(z)}w_{zz}\left(x,z,t\right)+\beta_1 w_t\left(x,z,t\right)+\beta_0 w\left(x,z,t\right)=\bar{P}(x,z,t); \end{gathered} \tag{8}$$

$$w(0,z,t)=0,\quad w_x(0,z,t)=0,\quad w(l,z,t)=0,\quad w_x(l,z,t)=0; \tag{9}$$

$$w(x,0,t)=0,\quad w_z(x,0,t)=0,\quad w(x,h,t)=0,\quad w_z(x,h,t)=0. \tag{10}$$

Индексы снизу обозначают частные производные по соответствующим переменным. Функция $\bar{P}(x,z,t)$ описывает аэродинамическое воздействие на пластину в точке (x,z) в момент времени t; M, D, β_0, β_1, β_2, $N_{(x)}$, $N_{(z)}$ – постоянные параметры системы.

2. Постановка задачи для давления и решение аэродинамической части задачи методом Фурье

Запишем задачу (1)–(7) для функции давления жидкости $P(x,y,z,t)$:

$$P(x,y,z,t)=\phi_t(x,y,z,t)+V\phi_x(x,y,z,t); \tag{11}$$

$$P_{xx}(x,y,z)+P_{yy}(x,y,z)+P_{zz}(x,y,z)=0,\qquad (x,y,z)\in J; \tag{12}$$

$$P_y(x,0,z,t)=w_{tt}(x,z,t)+2Vw_{xt}(x,z,t)+V^2w_{xx}(x,z,t),\qquad (x,z)\in T_1; \tag{13}$$

$$P_y(x,h,z,t)=0,\qquad (x,z)\in T_1; \tag{14}$$

$$P_z(x,y,0,t)=P_z(x,y,h,t)=0,\quad (x,y)\in T_2; \tag{15}$$

$$P(0,y,z,t)=\phi_1(t),\quad (y,z)\in T_3; \tag{16}$$

$$P(l,y,z,t)=\phi_2(t),\quad (y,z)\in T_3; \tag{17}$$

$$\bar{P}(x,z,t)=-\rho P(x,0,z,t),\quad (x,z)\in T_1. \tag{18}$$

Согласно методу Фурье функцию давления $P(x,y,z,t)$ представим в виде

$$\begin{gathered} P(x,y,z,t)=\phi_1(t)+\frac{x}{l}\left(\phi_2(t)-\phi_1(t)\right)+2\sum_{m=1}^{S}P_m(t)\sin\nu_m x\operatorname{ch}\nu_m(h-y)+ \\ +2\sum_{m=1}^{S}\sum_{r=1}^{S}P_{rm}(t)\sin\nu_m x\cos\mu_r z\operatorname{ch}\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}(h-y),\qquad \nu_m=\frac{m\pi}{l},\quad \mu_r=\frac{r\pi}{h}. \end{gathered} \tag{19}$$

Для уравнения Лапласа (12) справедливы краевые условия (14)–(17). Требуется выполнение условий (13) и (18), поэтому для определения неизвестных функций $P_m(t)$ и $P_{rm}(t)$ рассмотрим два способа.

1 способ. Для удовлетворения условия (18) подставим $P(x,y,z,t)$ в виде (19) в это условие:

$$\phi_1(t)+\frac{x}{l}\left(\phi_2(t)-\phi_1(t)\right)+2\sum_{m=1}^{S}P_m(t)\sin\nu_m x\operatorname{ch}\nu_m h+$$

$$+2\sum_{m=1}^{S}\sum_{r=1}^{S}P_{rm}(t)\sin\nu_m x\cos\mu_r z\operatorname{ch}\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}h=-\frac{1}{\rho}\bar{P}(x,z,t).\quad(20)$$

Умножая обе части (20) на $\sin\nu_k x$ и на $\sin\nu_k x\cos\mu_j z$, затем интегрируя от 0 до l по переменной x и от 0 до h по переменной z, найдем функции $P_m(t)$ и $P_{rm}(t)$. При этом (19) примет вид:

$$P(x,y,z,t)=\phi_1(t)+\frac{x}{l}\left(\phi_2(t)-\phi_1(t)\right)-2\sum_{m=1}^{S}\frac{(-1)^{m+1}\sin\nu_m x\operatorname{ch}\nu_m(h-y)}{h\,l\nu_m\operatorname{ch}\nu_m h}\left(\phi_2(t)-\phi_1(t)\right)-$$
$$-2\sum_{m=1}^{S}\frac{\sin\nu_m x\operatorname{ch}\nu_m(h-y)}{\rho h\,l\operatorname{ch}\nu_m h}\iint_{T_1}\bar{P}(x,z,t)\sin\nu_m x dxdz-$$
$$-4\sum_{m=1}^{S}\sum_{r=1}^{S}\frac{\sin\nu_m x\cos\mu_r z\operatorname{ch}\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}(h-y)}{\rho\,hl\operatorname{ch}\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}h}\iint_{T_1}\bar{P}(x,z,t)\sin\nu_m x\cos\mu_r z dxdz.\quad(21)$$

Подставляя (8) в правую часть (21) и полученную функцию в граничное условие (13), получим уравнение для определения неизвестной функции деформации $w(x,z,t)$

$$w_{tt}(x,z,t)+2Vw_{xt}(x,z,t)+V^2w_{xx}(x,z,t)=\frac{2}{hl}\sum_{m=1}^{S}(-1)^{m+1}\left(\phi_2(t)-\phi_1(t)\right)\sin\nu_m x\operatorname{th}\nu_m h+$$
$$+\frac{4}{\rho\,hl}\sum_{m=1}^{S}\sum_{r=1}^{S}\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}\sin\nu_m x\cos\mu_r z\operatorname{th}\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}h\cdot\iint_{T_1}\left(Mw_{tt}(x,z,t)+\right.$$
$$+D\left(w_{xxxx}(x,z,t)+2w_{xxzz}(x,z,t)+w_{zzzz}(x,z,t)\right)+N_{(x)}w_{xx}(x,z,t)+N_{(z)}w_{zz}(x,z,t)+$$
$$+\beta_2\left(w_{xxxxt}(x,z,t)+2w_{xxzzt}(x,z,t)+w_{zzzzt}(x,z,t)\right)+\beta_1 w_t(x,z,t)+\beta_0 w(x,z,t))\cdot$$
$$\cdot\sin\nu_m x\cos\mu_r z dzdx+\frac{2}{\rho h\,l}\sum_{m=1}^{S}\nu_m\sin\nu_m x\operatorname{th}\nu_m h\iint_{T_1}\left(Mw_{tt}(x,z,t)+\right.$$
$$+D\left(w_{xxxx}(x,z,t)+2w_{xxzz}(x,z,t)+w_{zzzz}(x,z,t)\right)+N_{(x)}w_{xx}(x,z,t)+N_{(z)}w_{zz}(x,z,t)+$$
$$+\beta_2\left(w_{xxxxt}(x,z,t)+2w_{xxzzt}(x,z,t)+w_{zzzzt}(x,z,t)\right)+$$
$$+\beta_1 w_t(x,z,t)+\beta_0 w(x,z,t))\sin\nu_m x dzdx,\qquad(x,z)\in T_1.\quad(22)$$

2 способ. Для удовлетворения условия (13), подставим $P(x,y,z,t)$ в виде (19) в это условие:

$$-2\sum_{m=1}^{S}P_m(t)\nu_m\sin\nu_m x\operatorname{sh}\nu_m h-2\sum_{m=1}^{S}\sum_{r=1}^{S}P_{rm}(t)\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}\sin\nu_m x\cos\mu_r z\operatorname{sh}\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}h=$$
$$=w_{tt}(x,z,t)+2Vw_{xt}(x,z,t)+V^2w_{xx}(x,z,t),\qquad(x,z)\in T_1.\quad(23)$$

Тогда функция (19) примет вид

$$P(x,y,z,t)=\phi_1(t)+\frac{x}{l}\left(\phi_2(t)-\phi_1(t)\right)-\frac{2}{h\,l}\sum_{m=1}^{S}\frac{\sin\nu_m x\operatorname{ch}\nu_m(h-y)}{\nu_m\operatorname{sh}\nu_m h}\iint_{T_1}\left(w_{tt}(x,z,t)+\right.$$

$$+2Vw_{xt}(x,z,t)+V^2w_{xx}(x,z,t)\big)\sin\nu_m x dx dz - \frac{4}{hl}\sum_{m=1}^{S}\sum_{r=1}^{S}\frac{\sin\nu_m x\cos\mu_r z\,\mathrm{ch}\,\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}(h-y)}{\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}h}\cdot$$

$$\cdot\iint\limits_{T_1}\big(w_{tt}(x,z,t)+2Vw_{xt}(x,z,t)+V^2w_{xx}(x,z,t)\big)\sin\nu_m x\cos\mu_r z dx dz.$$

Подставляя полученное выражение в (18), найдем правую часть уравнения (8). Оно примет вид

$$Mw_{tt}(x,z,t)+D\left(w_{xxxx}(x,z,t)+2w_{xxzz}(x,z,t)+w_{zzzz}(x,z,t)\right)+N_{(x)}w_{xx}(x,z,t)+$$
$$+N_{(z)}w_{zz}(x,z,t)+\beta_2\left(w_{xxxxt}(x,z,t)\ +2w_{xxzzt}(x,z,t)+w_{zzzzt}(x,z,t)\right)+\beta_1 w_t(x,z,t)+$$
$$+\beta_0 w(x,z,t)=-\rho\Big(\phi_1(t)+\frac{x}{l}\left(\phi_2(t)-\phi_1(t)\right)\Big)+\frac{2\rho}{h\,l}\sum_{m=1}^{S}\frac{\sin\nu_m x\,\mathrm{cth}\,\nu_m h}{\nu_m}\cdot$$
$$\cdot\iint\limits_{T_1}\big(w_{tt}(x,z,t)+2Vw_{xt}(x,z,t)+V^2w_{xx}(x,z,t)\big)\sin\nu_m x dx dz+$$
$$+\frac{4\rho}{hl}\sum_{m=1}^{S}\sum_{r=1}^{S}\frac{\sin\nu_m x\cos\mu_r z\,\mathrm{cth}\,\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}h}{\sqrt{\nu_m^2+\mu_r^2}}\cdot$$
$$\cdot\iint\limits_{T_1}\big(w_{tt}(x,z,t)+2Vw_{xt}(x,z,t)+V^2w_{xx}(x,z,t)\big)\sin\nu_m x\cos\mu_r z dx dz. \quad (24)$$

Решение начально-краевых задач (22), (9), (10) и (24), (9), (10) ищется методом Галеркина [5] в виде

$$w(x,z,t)=\sum_{n=1}^{S}\sum_{q=1}^{S}Q_{nq}(t)g_n(x)s_q(z). \quad (25)$$

Согласно краевым условиям (9), (10) функции $g_n(x), s_q(z)$ должны удовлетворять условиям

$$g_n(0)=0, \quad g_{nx}(0)=0, \quad g_n(l)=0, \quad g_{nx}(l)=0, \quad (26)$$

$$s_q(0)=0, \quad s_{qz}(0)=0, \quad s_q(h)=0, \quad s_{qz}(h)=0. \quad (27)$$

Если системы функций $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{s_q(z)\}_{q=1}^{\infty}$ полны на отрезках $[0,l]$ и $[0,h]$ соответственно, то ряд (25) абсолютно и равномерно сходится в области T_1.

Подставляя функцию $w(x,z,t)$ в виде (25) в (22), (10) и (24), (10), умножая на $g_i(x)s_j(z)$, $i,j=\overline{1,S}$ и интегрируя по области T_1, получим две задачи Коши для отыскания неизвестных функций $Q_{nq}(t)$.

Литература

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2009. 220 с.

2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2013. 322 с.

3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. Ульяновск: УлГТУ, 2015. 146 с.

4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. Ульяновск: УлГТУ, 2019. 201 с.

5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. 352 с.

MSC 74F10

Two methods based on the Fourier method for studying the dynamics of an elastic wall of a square channel

A.S. Zharkova, A.V. Ankilov
Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The paper studies the dynamics of the wall of a three-dimensional square channel with an ideal incompressible fluid flow through it. The case of specifying a pressure change law at the inlet and outlet is considered. The channel is rigidly fixed on three sides and with an unfixed fourth elastic side (plate). Based on the constructed mathematical model described by a system of partial differential equations, the dynamics of an unfixed elastic channel wall is studied taking into account the interaction with the fluid flow in the incompressible medium model. The behavior of the elastic material of the plate is described by a linear model. The solution to the aerohydrodynamic part of the problem in the incompressible medium model is based on representing the desired gas pressure function as partial sums of double series, for finding the coefficients of which two methods are considered. In this case, the aerohydrodynamic load is determined through a function describing the unknown wall deflection, for which a partial differential equation is obtained, the solution of which is carried out using the Galerkin method.

Keywords: partial differential equations, dynamics, aerohydroelasticity, air duct, elastic plate, Fourier method, Galerkin method.

References

1. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Dinamika i ustoichivost uprugikh plastin pri aerogidrodinamicheskom vozdeistvii [Dynamics and stability of elastic plates under aero-hydrodynamic impact]. Ulyanovsk: UlGTU, 2009. 220 p. (in Russian)

2. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamicheskoi ustoichivosti deformiruemykh elementov konstruktsii pri aerogidrodinamicheskom vozdeistvii [Mathematical modeling in problems of dynamic stability of deformable structural elements under aero-hydrodynamic impact]. Ulyanovsk: UlGTU, 2013. 322 p. (in Russian)

3. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Funktsionaly Lyapunova v nekotorykh zadachakh dinamicheskoi ustoichivosti aerouprugikh konstruktsii [Lyapunov functionals in some problems of dynamic stability of aeroelastic structures]. Ulyanovsk: UlGTU, 2015. 146 p. (in Russian)

4. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Funktsionaly Lyapunova v nekotorykh zadachakh aerogidrouprugosti [Lyapunov functionals in some problems of aero-hydroelasticity]. Ulyanovsk: UlGTU, 2019. 201 p. (in Russian)

5. Fletcher K. Chislennye metody na osnove metoda Galerkina [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moscow: Mir, 1988. 352 p. (in Russian)