УДК 517.929.4

Оценка перерегулирования дифференциально-разностных систем нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями

Евтина Д.С., Жабко А.П.

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация: В работе предложен метод оценки решений систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части. На практике такие запаздывания встречаются в задачах оптимального управления для динамических систем с задержкой информации различной природы. Случай систем с соизмеримыми запаздываниями уже был рассмотрен в других работах и приводился к системе с единственным запаздыванием. Случай же несоизмеримых запаздываний следует исследовать отдельно. Управляемые системы характеризуются двумя такими важными величинами, как запас устойчивости и перерегулирование. Представленный подход к оценке решений рассматриваемых систем позволяет найти величину перерегулирования. Полученный результат можно обобщить на системы с несколькими несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части, а также на случай других видов систем (например, почти периодических систем).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, системы с запаздыванием, запаздывание нейтрального типа, несоизмеримые запаздывания.

1. Введение

Исследованию систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и их приложений посвящено множество работ [1,2]. На сегодняшний день системы уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа представляют большой интерес для исследований. Система с одним запаздыванием в нейтральной части рассмотрена в работе [3]. Известно также [3], что, когда соотношение запаздываний соизмеримо, систему можно свести к системе с одним запаздыванием. К сожалению, подход к оценке решений систем с запаздыванием нейтрального типа, представленный в работе [3], приводит к объёмным выкладкам для случая системы с несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части. Исходя из этого, было решено разработать собственный подход к оценке решений таких систем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую систему с запаздыванием нейтрального типа:

$$\frac{d}{dt}\Big[x(t) - D_1 x(t-\tau) - D_2 x(t-h)\Big] = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int\limits_{-\tau}^{0} Q(\theta) x(t+\theta) d\theta, \qquad (1)$$

где A_0, A_1 и $D_1 \neq 0_{n\times n},\ D_2 \neq 0_{n\times n}$ – заданные матрицы размерности $n \times n$, а компоненты матрицы $Q_{n\times n}(\theta)$ – ограниченные кусочно-постоянные функции. Далее будем считать, что матрицы в нейтральной части системы коммутируют, т.е. $D_1D_2 = D_2D_1$, и система (1) экспоненциально устойчива [1]. Также положим $\tau \geqslant h$.

В случае, когда соотношение запаздываний τ и h есть рациональное число, система сводится к системе с одним запаздыванием [2]. В нашем случае данное соотношение иррационально, что и означает, что запаздывания несоизмеримы.

Так как система (1) стационарна, будем считать начальный момент времени $t_0 = 0$. Тогда каждое из решений системы (1) определяется начальной функцией φ из семейства $\mathcal{C}^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n):\ x(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [-\tau, 0]$.

Наша задача – провести оценку решений системы (1).

3. Основной результат

Известно [4], что, если система (1) экспоненциальна устойчива и матрицы D_1 и D_2 в нейтральной части перестановочны, то выполняется условие $\|D_1\| + \|D_2\| < 1$.

Выразим решения системы (1) в интегральной форме:

$$x(t) = D_1x(t-\tau) + D_2x(t-h) + f(t), \tag{2}$$

где

$$f(t) = x(0) - D_1x(-\tau) - D_2x(-h) + A_0\int\limits_0^t x(\xi)d\xi + A_1\int\limits_0^t x(\xi-h)d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_{-\tau}^0 Q(\theta)x(\xi+\theta)d\theta d\xi.$$

Введём оператор запаздывания $e^{-pr} \circ f(t) = f(t-r)$. Тогда множество

$$K = \left\{Ae^{-ph} + Be^{-p\tau} : A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, (Ae^{-ph} + Be^{-p\tau}) \circ f(t) = Af(t-h) + Bf(t-\tau)\right\}$$

образует коммутативное кольцо операторов.

После применения оператора запаздывания к правой части равенства (2) $k-1$ раз можем привести решения системы (1) к следующему виду:

$$x(t) = (D_1e^{-p\tau} + D_2e^{-ph})^k \circ x(t) + \sum_{j=1}^{k} f_j(t),$$

где $f_1(t) = f(t)$, а $f_j(t),\ j = \overline{2,k}$, задаются рекуррентно:

$$f_j(t) = D_1f_{j-1}(t-\tau) + D_2f_{j-1}(t-h).$$

Выразим решения через начальные функции. Рассмотрим такое значение k, которое будет удовлетворять условиям:

$$t - \tau \leqslant m\tau + (k-m)h \leqslant t, \quad m = \overline{0,k}. \tag{3}$$

Получим следующие оценки из неравенства (3):

$$\frac{t}{\tau} - 1 \leqslant k_1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{t}{h}\right] = k_2,$$

$$k \leqslant m \leqslant k + \left[\frac{t-kh}{\tau-h}\right] \leqslant k + \left[\frac{\tau}{h}\right],\ \left[\frac{\tau}{h}\right] = \overline{m}.$$

Лемма 1. *Решения системы (1) представимы в виде*

$$x(t) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \left(\sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \varphi\big(t - m\tau - (k-m)h\big) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{\overline{m}} C_{k-1}^m D_1^m D_2^{k-1-m} f\big(t - m\tau - (k-1-m)h\big) \right).$$

Следствие 1. *Решения системы (1) допускают оценку*

$$\|x(t)\| \leqslant \sum_{k=k_1}^{k_2} \left(\sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m \|D_1\|^m \|D_2\|^{k-m} \|\varphi\big(t - m\tau - (k-m)h\big)\| + \|f_k(t)\| \right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=k_1}^{k_2} \left[\Big(\|D_1\| + \|D_2\| \Big)^k \|\varphi\|_\tau + \|f_k(t)\| \right],$$

где $\|\varphi\|_\tau = \sup\limits_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|$.

4. Заключение

В результате исследования разработан метод оценки решений систем дифференциальных уравнений с двумя несоизмеримыми запаздываниями нейтрального типа. Полученная оценка на практике позволит найти величину перерегулирования управляемой системы, что, в свою очередь, позволит оптимизировать выбор управления. Данный подход в будущем планируется применить для систем, у которых более двух несоизмеримых запаздываний, для разностных систем, а также для систем с периодическими коэффициентами, период которых несоизмерим с запаздыванием.

Литература

1. Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

2. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва: Наука, 1964. 128 с.

3. Kharitonov V. L. Exponential estimate for a simple neutral time delay system // Course of lectures given in St. Petersburg State University. 2012. 19 p.

4. Евтина Д. С., Жабко А. П. Исследование устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздыванием нейтрального типа // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». 2024. Т. 2. С. 67-69.

MSC 34K40

Estimation of solutions of neutral type differential-difference systems with two incommensurate delays

D.S. Evtina, A.P. Zhabko

Saint Petersburg State University

Abstract: This paper proposes a method for estimating solutions of systems of differential-difference equations of neutral type with two incommensurable delays in the neutral part. In practice, such delays occur in optimal control problems for dynamic systems with information delay of various nature. Systems with commensurable delays have already been considered in other works and were reduced to a system with a single delay. However, the case of incommensurable delays needs to be analyzed separately. Control systems are characterized by two important quantities: stability margin and overshoot. Presented approach allows finding the second one for the considered systems. The result can also be extended to systems with multiple incommensurable delays in the neutral part, as well as to other types of systems (such as almost periodic systems).

Keywords: differential equations, time-delay systems, neutral type delay, incommensurate delays.

References

1. Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

2. Elsgoltz L. E. Vvedenie v teoriyu differentsialnykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument]. Moscow: Nauka, 1964. 128 p. (in Russian)

3. Kharitonov V. L. Exponential estimate for a simple neutral time delay system // Course of lectures given in St. Petersburg State University. 2012. 19 p.

4. Evtina D. S., Zhabko A. P. Issledovanie ustoichivosti sistem differentsialnykh uravneniy s zapazdyvaniem neytralnogo tipa [Stability analysis of neutral type delay differential equations] // Materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Ufimskaya osennaya matematicheskaya shkola» [Proceedings of the international scientific conference "Ufa Autumn Mathematical School"]. 2024. Vol. 2. P. 67-69. (in Russian)