

УДК 517.958

Разрешимость начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды в классе суммируемых функций в сетеподобной области

Гусельникова И.В.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Аннотация: Представлен метод анализа эволюционных моделей процессов переноса в сетеподобных областях. Исследование ведется на примере задачи Дирихле для параболического уравнения в слабой постановке, т.е. используется не само дифференциальное уравнение, а соответствующее ему интегральное тождество. Предлагаемый метод применим с небольшими видоизменениями в случае эллиптических, гиперболических и других задач для векторных функций. Примером последнего является широко используемая в описании сетеподобных гидродинамических процессов линеаризованная система Навье-Стокса.

Ключевые слова: сетеподобная область, эволюционная модель процесса переноса, система Навье-Стокса, разрешимость начально-краевых задач.

1. Обозначения, основные понятия

Связная сетеподобная область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^n$ ($\partial\mathfrak{S}$ – граница $\mathfrak{S}$) (см. [1, 2]) представляет собой совокупность ограниченных подобластей $\mathfrak{S}_j$, $j = \overline{1, N}$ ($\partial\mathfrak{S}_j$ – границы подобластей) и совокупность поверхностей $S_j \subset \partial\mathfrak{S}_j$, $j = \overline{1, N}$, являющихся общими границами смежных подобластей (S_j – двухсторонние поверхности взаимного примыкания подобластей, через S_j^+ , S_j^- обозначены эти стороны). Таким образом, сетеподобная область $\mathfrak{S}$ структурирована по типу геометрического графа [3]:

$$\mathfrak{S} = \left(\bigcup_{j=1}^N \mathfrak{S}_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^N S_j \right), \quad \partial\mathfrak{S} = \left(\bigcup_{j=1}^N \partial\mathfrak{S}_j \right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N S_j \right).$$
Везде далее предполагается, что поверхности S_j гладкие, каждая подобласть $\mathfrak{S}_j$ звездная относительно шара из $\mathfrak{S}_j$.

Используются классические пространства действительных, измеримых по Лебегу функций $u(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: $L_2(\mathfrak{S})$ – пространство (классов) вещественных измеримых функций $u(x)$, здесь $(u, v)_{\mathfrak{S}} = \int_{\mathfrak{S}} u(x)v(x)dx$, $\|u\|_{\mathfrak{S}} = \sqrt{(u, u)_{\mathfrak{S}}}$;

$L_{\infty}(\mathfrak{S})$ – пространство (классов) измеримых, существенно ограниченных функций $u(x)$ на $\mathfrak{S}$, здесь $\|u\|_{\mathfrak{S}} = \text{vrai} \max_{x \in \mathfrak{S}} |u(x)|$; $W_2^1(\mathfrak{S})$ – соболевское пространство функций

$\frac{\partial u(x)}{\partial x_{\iota}} \in L_2(\mathfrak{S}) \quad (\iota = \overline{1, n}), \text{ здесь}$

$$(u, v)_{\mathfrak{S}}^1 = \int_{\mathfrak{S}} \left(u(x)v(x) + \sum_{\iota=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_{\iota}} \frac{\partial v(x)}{\partial x_{\iota}} \right) dx,$$

$$\|u\|_{\mathfrak{S}} = \sqrt{(u, u)_{\mathfrak{S}}^1},$$

$W_{2,0}^1(\mathfrak{F}) = \{u : u \in W_2^1(\mathfrak{F}), u|_{x \in \partial\mathfrak{F}} = 0\}$ – ядро $W_2^1(\mathfrak{F})$.

При этом $\int_{\mathfrak{F}} u(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{\mathfrak{F}_j} u(x) dx$.

Введем пространства функций $u(x)$ со свойствами, описывающими условия взаимного примыкания подобластей $\mathfrak{F}_j$ области $\mathfrak{F}$. Рассмотрим дифференциальное выражение вида $\mathcal{A}u = - \sum_{\kappa, \iota=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} \left(a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\iota}} \right)$, которое определяет эллиптический оператор (линейный положительный оператор) краевых задач математических моделей процессов переноса сплошных сред в сетевом носителе, описываемом сетеподобной областью $\mathfrak{F}$; здесь $a_{\kappa\iota}(x)$ ($\kappa, \iota = \overline{1, n}$) – ограниченные функции пространства $L_2(\mathfrak{F})$.

Условия взаимного примыкания подобластей $\mathfrak{F}_j$ в терминах выражения $\mathcal{A}u$ будут определяться соотношениями (см. [1])

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad \int_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_{\Lambda}} dS + \int_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_{\Lambda}} dS = 0 \quad (1)$$

на сторонах S_j^+ и S_j^- каждой поверхности примыкания S_j (здесь и везде ниже $j = \overline{1, N}$), $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_{\Lambda}} = \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_{\iota}} \cos(\bar{n}, x_{\kappa})$ на S_j^+ или S_j^- , $\cos(\bar{n}, x_{\kappa})$ – κ -й направляющий косинус внешней нормали $\bar{n} := \bar{n}(x)$ к границе $S_j \subset \partial\mathfrak{F}_j$ (т. е. S_j^+ или S_j^- соответственно).

Замечание 1. Если (1) рассматривать применительно к тепловому процессу, то первое соотношение означает равенство температур среды по обе стороны S_j^+ и S_j^- поверхностей примыкания S_j , второе – баланс тепловых потоков на S_j .

Для $\mathcal{A}u$ соотношением $\rho(u, \eta) = \int_{\mathfrak{F}} \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_{\iota}} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_{\kappa}} dx$ зададим билинейную непрерывную симметричную форму относительно $u(x), \eta(x)$, определенную на $W_2^1(\mathfrak{F}) \times W_2^1(\mathfrak{F})$. При этом будем считать выполненными следующие условия:

$$a_{\kappa\iota}(x) = a_{\iota\kappa}(x), a_* \xi^2 \leq \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x) \xi_{\kappa} \xi_{\iota} \leq a^* \xi^2, \quad (2)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, $\xi^2 = \sum_{\kappa=1}^3 \xi_{\kappa}^2$, а положительные постоянные a_* , a^* и функции $a_{\kappa\iota}(x) \in L_2(\mathfrak{F})$ заданы; соотношения в (2) выполняются почти всюду на $\mathfrak{F}$.

Замечание 2. В силу (2) имеет место неравенство $\rho(u, u) \geq a_* \|u\|_{W_2^1(\mathfrak{F})}^2$ для любого $u \in W_2^1(\mathfrak{F})$. Откуда вытекает существование единственного элемента $u \in W_2^1(\mathfrak{F})$, для которого (лемма Лакса-Мильграма [4]) выполнено соотношение $\rho(u, \eta) = L(\eta)$, ($L(\eta) = (f, \eta)$, $f(x) \in L_2(\mathfrak{F})$) для любых $\eta \in W_2^1(\mathfrak{F})$ таких, что $\eta(x) = 0$ при $x \in \partial\mathfrak{F}$. В этом случае это соотношение (или интегральное тождество) является заданием уравнения $\mathcal{A}u = f$ в слабой постановке.

Пусть далее $\mathcal{X}_0(\mathfrak{F}) = \{u : u(x) \in \tilde{C}^1(\overline{\mathfrak{F}}), u(x)|_{\partial\mathfrak{F}} = 0\}$, $\tilde{C}^1(\overline{\mathfrak{F}})$ – множество функций, дифференцируемых на $\overline{\mathfrak{F}_j}$ ($j = \overline{1, N}$) и удовлетворяющих условиям (1).

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{F})$ – замыкание $\mathcal{X}_0(\mathfrak{F})$ в норме $W_2^1(\Omega)$.

2. Начально-краевая задача переноса сплошной среды

Введем пространство состояний $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ начально-краевой задачи и вспомогательное пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$, $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$, $T < \infty$.

Определение 2. Пространство $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ – замыкание в норме, определенной соотношением $\|y\|_{\mathfrak{S}_T}^{1,0} = \left(\int_{\mathfrak{S}_T} \left(y^2 + \sum_{i=1}^n y_{x_i}^2 \right) dx dt \right)^{1/2}$, совокупности функций $y(x, t)$, следы которых $y(x, t_0)$ при $t_0 \in (0, T)$ принадлежат $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ и непрерывны по t_0 в норме $W_2^1(\mathfrak{S})$.

Замечание 3. Если в определении 2 норму $\|y\|_{\mathfrak{S}_T}^{1,0}$ заменить другим соотношением, например,

$$\|y\|_{\mathfrak{S}_T}^1 = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{S}_k \times (0, T)} (y^2 + y_t^2 + \sum_{i=1}^n y_{x_i}^2) dx dt \right)^{1/2},$$

то определено пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T) \subset \tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$.

В пространстве $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ ищется решение $y(x, t)$ начально-краевой задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = f(x, t), \quad y|_{t=0} = \phi(x), \quad y|_{x \in \partial \Gamma_T} = 0, \quad (3)$$

где $f(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$, $\phi(x) \in L_2(\mathfrak{S})$.

Определение 3. Функция $y(x, t) \in \tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ – слабое решение задачи (3), если справедливо интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{S}_T} y(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt - \int_{\mathfrak{S}_T} \left(\sum_{\kappa, i=1}^n a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x_\kappa} \right) dx dt = \\ = - \int_{\mathfrak{S}} \phi(x) \eta(x, 0) dx - \int_{\mathfrak{S}_T} f(x, t) \eta(x, t) dx dt \end{aligned}$$

при любой $\eta(x, t) \in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$, $\eta(x, T) = 0$.

Теорема 1. Если выполнены условия (2) и $f(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$, $\phi(x) \in L_2(\mathfrak{S})$, то начально-краевая задача (3) разрешима в $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$.

3. Пример, линеаризованная система Навье-Стокса

В качестве иллюстрации используемого подхода и результатов теоремы 1 для вектор-функции $Y(x, t) = \{y_1(x, t), y_2(x, t), y_3(x, t)\}$, где $x, t \in \mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$, $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^3$ ($\mathfrak{S} = \bigcup_{i=1}^N \mathfrak{S}_i$), $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, вводятся пространства векторных функций $(L_{2,1}(\mathfrak{S}_T))^3$, $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T))^3$, $(\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T))^3$, аналогичных пространствам $L_{2,1}(\mathfrak{S})$, $\tilde{W}^1(\mathfrak{S})$, $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$. Рассматривается

линеаризованная система Навье-Стокса (используются общепринятые обозначения, см. [5, с. 383]):

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2} + \text{grad} p = F(x, t), \quad \text{div} Y = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right). \quad (4)$$

Условия взаимного примыкания подобластей $\mathfrak{S}_j$, $j = \overline{1, N}$, описываются соотношениями

$$Y(x, t)|_{x \in S_j^+} = Y(x, t)|_{x \in S_j^-}, \quad \int_{S_j^+} \frac{\partial Y(x, t)}{\partial \bar{n}_j^+} dS + \int_{S_j^-} \frac{\partial Y(x, t)}{\partial \bar{n}_j^-} dS = 0, \quad (5)$$

на двухсторонних поверхностях взаимного примыкания подобластей S_j , для произвольного $t \in (0, T)$ (см. аналогичные условия (1) и пояснения пункта 1); через $\bar{n}_j^+$ и $\bar{n}_j^-$ обозначены внешние нормали к S_j^+ и S_j^- , $F(x, t) = \{F_1(x, t), F_2(x, t), F_3(x, t)\}$ – вектор внешних воздействий на систему (4), $p(x, t)$ – давление в гидросистеме. Начальные и граничные условия

$$Y(x, t)|_{t=0} = Y_0(x), \quad x \in \mathfrak{S}, \quad Y(x, t)|_{x \in \partial \mathfrak{S}} = 0, \quad (6)$$

вместе с соотношениями (4), (5) определяют начально-краевую задачу (4)–(6) для функций $Y(x, t)$, $p(x, t)$ в замкнутой области $\bar{\mathfrak{S}}_T$: $\bar{\mathfrak{S}}_T = (\mathfrak{S} \cup \partial \mathfrak{S}) \times [0, T]$.

Определение 4. Пара $\{Y(x, t), p(x, t) : Y(x, t) \in (\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T))^3, p(x, t) \in C(\mathfrak{S}_T)\}$, называется слабым решением краевой задачи (4)–(6) для системы Навье-Стокса, если для функции $Y(x, t)$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} - \int_{\mathfrak{S}_T} Y(x, \tau) \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau + \nu \int_{\mathfrak{S}_T} \frac{\partial Y(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial x} dx d\tau = \\ = (Y_0(x), \eta(x, 0)) + \int_{\mathfrak{S}_T} F(x, \tau) \eta(x, \tau) dx d\tau \end{aligned}$$

при любой функции $\eta(x, t) \in (\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T))^3$, $\eta(x, T) = 0$.

Замечание 4. Из определения 4 следует, что отыскание решения $Y(x, t)$ задачи (4)–(6) является первичным, для функции $p(x, t)$ достаточно знать принадлежность ее классу $C(\mathfrak{S}_T)$, однако во многих прикладных задачах $p(x, t)$ считается известной.

Теорема 2. Пусть $Y_0(x) \in (W_0^1(\mathfrak{S}))^3$, $F(x, t) \in (L_{2,1}(\mathfrak{S}_T))^3$. Эволюционная система Навье-Стокса (4), (5) с условиями (6) слабо разрешима в пространстве $(\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T))^3$.

Литература

1. Провоторов В. В., Сергеев С. М. Математическое моделирование физических процессов в композиционных средах // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29, вып. 146. С. 188-203.
2. Барановский Е. С., Провоторов В. В., Артемов М. А., Жабко А. П. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results // Symmetry. 2021. Vol. 13, Article ID 1300.

3. Провоторов В. В., Волкова А. С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Научная книга, 2014. 188 с.
4. Lax P. D., Milgram N. Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential // Annals of Mathematics Studies. 1954. Vol. 33. P. 167-190.
5. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Москва: Мир, 1973. 414 с.

MSC 74G55

Solvability of the initial boundary value problem for the continuum transfer equation in the class of summable functions in a network-like domain

I.V. Guselnikova

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University

Abstract: A method for analyzing evolutionary models of transport processes in network-like domains is presented. The study is conducted using the Dirichlet problem for a parabolic equation in a weak formulation, where the differential equation itself is replaced by an integral identity. The proposed method is applicable with slight modifications in the case of elliptic, hyperbolic, and other problems for vector functions. An example of the latter is the linearized Navier-Stokes system, which is widely used in the description of network-like hydrodynamic processes.

Keywords: network-like domain, evolutionary model of the transfer process, Navier-Stokes system, solvability of initial boundary value problems.

References

1. Provotorov V. V., Sergeev S. M. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v kompozitsionnykh sredakh [Mathematical modeling of physical processes in composite media] // Vestnik Rossiiskikh universitetov. Matematika. 2024. Vol. 29, iss. 146. P. 188-203. (in Russian)
2. Baranovskii E. S., Provotorov V. V., Artemov M. A., Zhabko A. P. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results // Symmetry. 2021. Vol. 13, Article ID 1300.
3. Provotorov V. V., Volkova A. S. Nachalno-kraevye zadachi s raspredelennymi parametrami na grafe [Initial-boundary value problems with distributed parameters on graphs]. Voronezh: Nauchnaya kniga, 2014. 188 p. (in Russian)
4. Lax P. D., Milgram N. Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential // Annals of Mathematics Studies. 1954. Vol. 33. P. 167-190.
5. Lions J. L. Optimalnoe upravlenie sistemami, opisываемыми уравнениями с частными производными [Optimal control of systems governed by partial differential equations]. Moscow: Mir, 1973. 414 p. (in Russian)