

УДК 519.63

О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с квадратичным гомоклиническим касанием к негиперболической неподвижной точке*

Гордеева О.В., Гордеев В.Е.

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

Аннотация: В работе рассматривается двухпараметрическое семейство f_μ , где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, двумерных диффеоморфизмов такое, что при $\mu = 0$ диффеоморфизм f_0 имеет неподвижную точку произвольного конечного порядка вырождения $n \geq 1$, сильноустойчивое и неустойчивое многообразие которой касаются квадратично. При $\mu_1 > 0$ неподвижная точка становится грубой седловой. Изучаются некоторые бифуркации однообходных периодических траекторий, показывается, что отображение первого возвращения сводится к хорошо известному отображению параболы.

Ключевые слова: седло-узел, негиперболическое седло, гомоклиническая траектория, отображение параболы.

Настоящая работа дополняет известный результат Н.К. Гаврилова [1] и Л.П. Шильникова [2] о каскаде периодических стоков, установленный для случая квадратичного касания многообразий грубой седловой точки.

Мы рассматриваем двухпараметрическое семейство f_μ двумерных диффеоморфизмов, где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$:

– Диффеоморфизм f_μ при $\mu_1 \geq 0$ имеет неподвижную точку O с мультипликаторами $0 < \lambda < 1, \gamma = 1 + \mu_1$;

– При $\mu_1 = 0$ точка O имеет вырождение $n \geq 1$ и ее Ляпуновская величина положительная, при n -нечетном типа седло-узел, при n -четном – сложное седло соответствующего порядка вырождения;

– При $\mu_1 \geq 0$ инвариантноустойчивое и инвариантнонеустойчивое многообразия неподвижной точки O таковы, что при $\mu_2 = 0$ они касаются в точках гомоклинической траектории Γ_0 , касание квадратичное.

В этом случае локальное отображение T_0 , т.е. ограничение диффеоморфизма f_μ на достаточно малую окрестность U_0 точки O , с помощью некоторой C^{r-1} -гладкой замены координат может быть приведено к виду

$$T_0 : \bar{x} = \lambda x(1 + h(x, y, \mu_1)), \quad \bar{y} = (1 + \mu_1)y + y^{n+1} + P(y, \mu), \quad (1)$$

где $\lambda = \lambda(\mu)$ и $0 < \lambda < 1$, $h(0, 0, \mu_1) \equiv 0$, $P(y, \mu_1) = O(y^{n+2})$. В этих координатах мы полагаем, что $U_0\{(x, y) \mid |x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon\}$ для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$, не зависящего от μ . Мы рассматриваем случай, когда $\mu_1 \geq 0$. Тогда неподвижная точка $O(0, 0)$, которая при $\mu_1 = 0$, является либо седло-узлом, либо сложным седлом вырождения порядка $n \geq 1$, при $\mu_1 > 0$ всегда является гиперболическим седлом (с мультипликаторами λ и $1 + \mu_1$).

Основная задача работы состоит в изучении однообходных периодических траекторий диффеоморфизма f_μ при $\mu_1 \geq 0$. Результатом работы является следующая

*Работа поддержана грантом РНФ 24-11-00339.

Теорема 1. *На полуплоскости параметров $(\mu_1 \geq 0, \mu_2)$ в любой достаточно малой окрестности $\mu = 0$, существует счетное множество непересекающихся полосок Δ_k , накапливающихся к оси $\mu_2 = 0$ при $k \rightarrow \infty$ таких, что f_μ имеет асимптотически устойчивую периодическую траекторию при $\mu \in \Delta_k$, а границами интервалов являются кривые, отвечающие седло-узловой и бифуркациям удвоения периода.*

Литература

1. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, I // Математический сборник. 1972. Т. 88, № 4. С. 475-492.
2. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, II // Математический сборник. 1973. Т. 90, № 1. С. 139-156.

MSC 37Gxx

On bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with quadratic homoclinic tangency to a nonhyperbolic fixed point

O.V. Gordeeva, V.E. Gordeev

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Abstract: We consider a two-parameter family f_μ of two-dimensional diffeomorphisms, where $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, such that for $\mu = 0$ the diffeomorphism f_0 has a nonhyperbolic fixed point of arbitrary finite order $n \geq 1$ of degeneracy, the invariant stable and unstable manifolds of this point has quadratically tangent and for $\mu_1 > 0$ the fixed point becomes a hyperbolic saddle. We study some bifurcations of the single-round periodic orbits. It is shown that the first return map reduces to the well-known parabola map.

Keywords: saddle-node, nonhyperbolic saddle, homoclinic orbit, parabola map

References

1. Gavrilov N. K., Shilnikov L. P. O trekhmernykh dinamicheskikh sistemakh, blizkikh k sistemam s negruboi gomoklinicheskoi krivoi, I [On three-dimensional dynamical systems close to systems with a non-rough homoclinic curve, I] // Matematicheskii sbornik. 1972. Vol. 88, no. 4. P. 475-492. (in Russian)
2. Gavrilov N. K., Shilnikov L. P. O trekhmernykh dinamicheskikh sistemakh, blizkikh k sistemam s negruboi gomoklinicheskoi krivoi, II [On three-dimensional dynamical systems close to systems with a non-rough homoclinic curve, II] // Matematicheskii sbornik. 1973. Vol. 90, no. 1. P. 139-156. (in Russian)