

УДК 539.3:533.6

О стабилизации динамики упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании

Гладун А.В.

Ульяновский институт гражданской авиации
имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева

Аннотация: Рассмотрена задача нелинейной стабилизации динамики упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании в случае неустойчивости этого элемента. Нелинейное уравнение в частных производных, описывающее динамику упругого элемента при наличии некоторого управляющего воздействия, приводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода Галеркина. Полученная система с помощью дифференциально-геометрических методов исследуется на управляемость и для нее строится управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения.

Ключевые слова: упругий элемент, сверхзвуковое обтекание, уравнения с частными производными, метод Галеркина, дифференциально-геометрические методы, стабилизация.

1. Введение

Устойчивость упругих элементов – ключевое требование при проектировании конструкций, подвергающихся сверхзвуковому обтеканию газом. Сверхзвуковой поток может индуцировать в этих элементах неустойчивые колебания, ведущие к их разрушению или ухудшению рабочих характеристик конструкции. В работе [1] была рассмотрена задача нахождения диапазона значений параметров упругих элементов конструкций для которых гарантирована их устойчивость. Однако если эксплуатация предполагается в условиях, нарушающих устойчивость, возникает необходимость гасить колебания упругого элемента путем подходящего управляющего воздействия [2]. Такой подход может предотвратить разрушение и обеспечить необходимую функциональность конструкции.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача управления динамикой упругого элемента конструкции в виде пластины-полосы при одностороннем обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа в случае ее шарнирного закрепления на обоих концах. Динамика упругого элемента в сверхзвуковом потоке газа описывается дифференциальным уравнением с частными производными [3]

$$\left[Dw'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) \right]'' + \alpha \left[\dot{w}'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) - 3w'' w' \dot{w}' \right]'' + \\ + m\ddot{w} + Nw'' - \beta \ddot{w}'' + \gamma (\dot{w} + Vw') + f(x, t) = 0, \quad (1)$$

где $w(x, t)$ – прогиб пластины; x – продольная координата, $x \in [0, l]$, l – длина пластины; t – время; $f(x, t)$ – некоторое управляющее воздействие; V – скорость потока;

m, D, N, α, β – некоторые постоянные; $\gamma = \alpha_0 \rho_0 a_0$, ρ_0 – плотность потока, a_0 – скорость звука в однородном потоке; штрих обозначает производную по координате x , точка – производную по времени t . Постоянная $\alpha_0 = 1$ для одностороннего и $\alpha_0 = 2$ для двустороннего обтекания пластины.

Введем безразмерные координату $\bar{x}$, время $\bar{t}$ и функцию прогиба $\bar{w}$:

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{V}{l} t, \quad \bar{w} = \frac{w}{l}. \quad (2)$$

При использовании замены переменных (2) в уравнении (1) и утверждении за безразмерными переменными прежних обозначений, получаем после деления обеих частей уравнения на γl

$$\begin{aligned} \frac{D}{\gamma V l} \left[w'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) \right]'' + \frac{\alpha}{\gamma l^2} \left[\dot{w}'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) - 3 w'' w' \dot{w}' \right]'' + \\ + \frac{m V}{\gamma l} \ddot{w} + \frac{N}{\gamma V l} w'' - \frac{\beta}{\gamma l^3} \ddot{w}'' + \dot{w} + w' + \frac{1}{\gamma l} f(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Задача. Найти для случая динамической неустойчивости уравнения (3) управляющее воздействие $f(x, t)$, такое, что соответствующее ему нулевое решение уравнения $w(x, t) = 0$, $x \in [0, 1]$ будет асимптотически устойчивым.

В начальный момент времени $t = 0$ деформация и скорость точек пластины задаются равенствами:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= \sqrt{2} c_1 \sin(\pi x) + \sqrt{2} c_2 \sin(2\pi x), \quad x \in [0, 1], \\ \dot{w}(x, 0) &= \sqrt{2} c_3 \sin(\pi x) + \sqrt{2} c_4 \sin(2\pi x), \quad x \in [0, 1], \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – некоторые заданные постоянные.

3. Построение решений

Для построения управляющего воздействия и решения уравнения (3) методом Галеркина будем задавать функции $f(x, t)$ и $w(x, t)$ в виде [4]

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) g_k(x), \quad w(x, t) = \sum_{k=1}^n v_k(t) g_k(x),$$

где $\{g_k(x)\}_1^\infty$ – полная на $[0, 1]$ система нормированных базисных функций, соответствующих случаю шарнирного закрепления концов пластины

$$w(0, t) = w(1, t) = w''(0, t) = w''(1, t) = 0.$$

Выберем $g_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ и ограничимся случаем $n = 2$, тогда управляющее воздействие $f(x, t)$ запишется следующим образом:

$$f(x, t) = \sqrt{2} u_1(t) \sin(\pi x) + \sqrt{2} u_2(t) \sin(2\pi x), \quad (4)$$

где $u_1(t), u_2(t)$ – некоторые кусочно-непрерывные функции (далее управления), обеспечивающие решение поставленной задачи.

В результате применения процедуры метода Галеркина получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка для функций $v_1(t), v_2(t)$, содержащую управления $u_1(t), u_2(t)$. Для этой системы с помощью дифференциально-геометрических методов анализа нелинейных систем, описанных в монографии [5] найдены условия управляемости и система записана в каноническом виде, который позволяет построить стабилизирующее управление.

Литература

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. № 3(57). Вып. 1. С. 59-67.
2. Гладун А. В., Вельмисов П. А. Об управлении динамикой деформируемого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е. В. Воскресенского: материалы VIII Международной научной молодежной школы-семинара. Саранск, 16-20 июля 2018 г. Саранск: Изд-во СВМО, 2018. С. 142-149.
3. Вельмисов П. А., Гладун А. В. О построении стабилизирующего управления для упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // Математическое моделирование и краевые задачи: материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием. В 2 т. Т. 1. Самара, 27-30 мая 2019 г. Самара: СамГТУ, 2019. С. 229-232.
4. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 4. С. 89-97.
5. Краснощёченко В. И., Крищенко А. П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 520 с.

MSC 74F10

On stabilizing of dynamics of the elastic structural element in supersonic flow

A.V. Gladun

Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after
Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev

Abstract: The paper addresses the problem of nonlinear stabilization for the dynamics of an elastic structural element under supersonic flow conditions, in the case of its inherent instability. The nonlinear partial differential equation describing the dynamics of the elastic element under the action of a control input is reduced to a system of nonlinear ordinary differential equations using the Galerkin method. The resulting system is analyzed for controllability employing differential-geometric methods, and a control law is synthesized to ensure asymptotic stability of the zero solution.

Keywords: elastic element, supersonic flow, dynamics, controllability, stabilization, partial differential equations (PDEs), Galerkin method, differential-geometric methods, stabilization, nonlinear control, asymptotic stability.

References

1. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Issledovanie dinamiki i ustoychivosti uprugogo elementa konstruktсии pri sverkhzvukovom obtekanii [Study of dynamics and stability of elastic structural element under supersonic flow] // Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2011. No. 3(57). Iss. 1. P. 59-67. (in Russian)
2. Gladun A. V., Velmisov P. A. Ob upravlenii dinamikoy deformiruemogo elementa konstruktсии pri sverkhzvukovom obtekanii [On control of deformable structural element dynamics under supersonic flow] // Matematicheskoe modelirovanie, chislennyye metody i komplekсы programm imeni E. V. Voskresenskogo: materialy VIII Mezhdunarodnoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminara [Mathematical modeling, numerical methods and software complexes named after E. V. Voskresensky: proceedings of VIII International youth scientific school-seminar]. Saransk, July 16-20, 2018. Saransk: SVMO, 2018. P. 142-149. (in Russian)
3. Velmisov P. A., Gladun A. V. O postroenii stabiliziruyushchego upravleniya dlya uprugogo elementa konstruktсии pri sverkhzvukovom obtekanii [On constructing stabilizing control for elastic structural element under supersonic flow] // Matematicheskoe modelirovanie i kraevyye zadachi: materialy XI Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem [Mathematical modeling and boundary value problems: proceedings of XI All-Russian scientific conference with international participation]. In 2 vols. Vol. 1. Samara, May 27-30, 2019. Samara: SamGTU, 2019. P. 229-232. (in Russian)
4. Velmisov P. A., Gladun A. V. Ob upravlenii dinamikoy truboprovoda [On pipeline dynamics control] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2016. Vol. 18, no. 4. P. 89-97. (in Russian)

5. Krasnoshchchenko V. I., Krishchenko A. P. Nelineynye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza [Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis]. Moscow: BMSTU, 2005. 520 p. (in Russian)