

УДК 533.21:536.23:517.95.

Математическое моделирование динамики механической системы «трубопровод – датчик давления»

Выборнова Ю.В., Вельмисов П.А.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: В данной работе предложена нелинейная математическая модель механической системы «трубопровод – датчик давления», предназначенной для контроля давления в камере сгорания. С помощью метода Галеркина построено приближенное решение соответствующей начально-краевой задачи. Проведены численные эксперименты и получены графики перемещения чувствительного элемента датчика и температуры рабочей среды при различном задании законов изменения давления рабочей среды и температуры на входе в трубопровод.

Ключевые слова: датчик давления, трубопровод, чувствительный элемент, динамика, дифференциальные уравнения, метод Галеркина.

1. Нелинейная математическая модель измерения давления рабочей среды

Во многих отраслях науки и техники, включая аэрокосмическую и энергетическую, стоит задача повышения надёжности и долговечности конструкций, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, особенно при проектировании датчиков давления для работы в экстремальных условиях (например, при тепловом и вибрационном воздействиях). Такие устройства должны сохранять точность измерений, несмотря на тепловые и динамические нагрузки, вызванные воздействием внешней среды и внутренними колебаниями. В данной статье представлена нелинейная математическая модель, в которой исследуется влияние изменения давления и температуры в камере сгорания двигателя на перемещение поршня датчика давления. На рис. 1 показана схема соответствующей механической системы «трубопровод – датчик давления», где 1 – камера сгорания, в сечении $x = 0$ трубопровода (на выходе из камеры

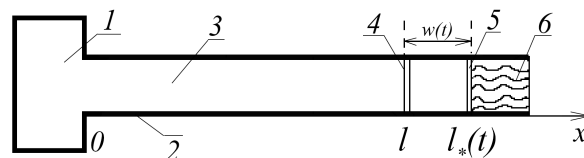


Рис. 1. Схема механической системы «трубопровод – датчик давления»

сгорания двигателя) задан закон изменения давления рабочей среды $P = P_0 + P_*(t)$ (P_0 – давление в состоянии покоя, $P_*(t)$ – избыточное давление); 2 – трубопровод, соединяющий камеру сгорания и датчик давления; 3 – рабочая среда; 4 – подвижный элемент (поршень), являющийся составной частью датчика давления и закрепленный с помощью системы упругих связей и демпферов; положение $x = l$ соответствует состоянию равновесия поршня; 5 – рабочее положение ($x = l_*(t) = l + w(t)$); $w(t)$ –

отклонение поршня от положения равновесия.

Основные уравнения математической модели представляют собой систему четырёх уравнений газовой динамики:

$$\begin{cases} \rho(u_t + uu_x) = -P_x, \\ \rho_t + \rho u_x + u\rho_x = 0, \\ \rho c_v(T_t + uT_x) + Pu_x = kT_{xx}, \\ P = R\rho T, \end{cases} \quad (1)$$

где $u(x, t)$, $\rho(x, t)$, $P(x, t)$, $T(x, t)$ – скорость, плотность, давление, температура рабочей среды в трубопроводе, $R = c_p - c_v$.

Выразим плотность из последнего уравнения $\rho = \frac{P}{RT}$ и подставим в остальные три уравнения:

$$\begin{aligned} P(u_t + uu_x) &= -RT P_x, \\ PT_t - PT_t + PTu_x + (P_x T - PT_x)u &= 0, \\ \frac{1}{\chi - 1} P(T_t + uT_x) + TPu_x &= kTT_{xx}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\chi = \frac{c_p}{c_v}$.

Уравнения математической модели (1) следует дополнить, в соответствии с изображенной схемой, граничными условиями:

$$\begin{cases} P(0, t) = P_0 + P_*(t), \\ u(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \\ P(l_*(t), t) = L(w(t)) \equiv m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma w(t), \\ T(0, t) = T_*(t), \\ T_x(l_*(t), t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

где $l_*(t) = l + w(t)$.

2. Численно-аналитическое решение задачи

Решение задачи строится с помощью метода Галеркина. Рассматривается два приближения решения. В первом приближении зададим u , P , T в виде, удовлетворяющем условиям (3)

$$\begin{cases} P = P_0 + P_*(t) + (L(w(t)) - P_0 - P_*(t))\frac{x}{l_*}, \\ T = T_*(t) + T_1(t)(x^2 - 2l_*x), \\ u = u_0(t) + (\dot{w}(t) - u_0(t))\frac{x}{l_*}. \end{cases} \quad (4)$$

Согласно методу Галеркина запишем условия ортогональности невязок уравнений (2) к базисным функциям, для этого умножаем полученные невязки на функцию $x(l_* - x)$, входящую в базисную систему поверочных функций вида $\{x^n(l_* - x)\}$, и интегрируем от 0 до l_* , тогда получим:

$$\left(\frac{1}{20}(P_0 + P_*(t)) + \frac{1}{30}L(w(t)) \right) \dot{u}_0(t) + \left(\frac{1}{30}(P_0 + P_*(t)) + \right.$$

$$+ \frac{1}{20}L(w(t)) \ddot{w}(t) + \left(\frac{1}{20}(P_0 + P_*(t)) + \frac{1}{30}L(w(t)) \right) u_0(t) \left(\dot{w}(t) - u_0(t) \right) \frac{1}{l_*} + \\ + R \left(\frac{1}{6}T_*(t) - \frac{7}{60}T_1(t)l_*^2 \right) \left(L(w(t)) - P_0 - P_*(t) \right) \frac{1}{l_*} = 0,$$

$$\dot{L}(w(t)) \left(\frac{1}{12}l_*^3T_*(t)\dot{w}(t) - \frac{1}{15}l_*^5T_1(t)\dot{w}(t) \right) + L(w(t)) \left(\frac{1}{12}l_*^2T_*(t)\dot{w}(t) + \frac{1}{15}l_*^4T_1(t)\dot{w}(t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12}l_*^3\dot{T}_*(t) + \frac{1}{15}l_*^5\dot{T}_1(t) + \frac{1}{20}l_*^4T_1(t)u_0(t) \right) - \frac{1}{12}l_*^3T_*(t)\dot{P}_*(t) - \\ - \frac{1}{20}l_*^5T_1(t)\dot{P}_*(t) + (P_0 + P_*(t)) \left(\frac{1}{20}l_*^2\dot{T}_1(t) - \frac{1}{12}l_*^3\dot{T}_*(t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{6}l_*^2T_*(t)u_0(t) + \frac{1}{6}l_*^4T_1(t)u_0(t) + \frac{1}{20}l_*^4T_1(t)\dot{w}(t) + \frac{1}{12}l_*^2T_*(t)\dot{w}(t) \right) = 0,$$

$$L(w(t)) \left(\frac{1}{\chi - 1} \left(-\frac{1}{15}l_*^5\dot{T}_1(t) + \frac{1}{12}l_*^3\dot{T}_*(t) - \frac{1}{30}l_*^4T_1(t)u_0(t) - \frac{2}{15}l_*^4T_1(t)\dot{w}(t) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{12}l_*^2T_*(t)(\dot{w}(t) - u_0(t)) - \frac{1}{15}l_*^4T_1(t)(\dot{w}(t) - u_0(t)) \right) + (P_0 + P_*(t)) \left(\frac{1}{\chi - 1} \left(\frac{1}{12}l_*^3\dot{T}_*(t) - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{20}l_*^5\dot{T}_1(t) - \frac{1}{10}l_*^4T_1(t)\dot{w}(t) - \frac{1}{15}l_*^4T_1(t)u_0(t) \right) + \frac{1}{12}l_*^2T_*(t)(\dot{w}(t) - u_0(t)) - \\ \left. \frac{1}{20}l_*^4T_1(t)(\dot{w}(t) - u_0(t)) \right) - \frac{1}{3}kl_*^4T_*(t)T_1(t) + \frac{7}{30}kl_*^5T_1^2(t) = 0.$$

Получили систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента в пакете Mathematica.

3. Численный эксперимент

Зададим следующие параметры для случая постоянного давления и периодического возмущения температуры в двигателе, и нулевых начальных условиях:

$$\chi = 1.43, \quad l = 3, \quad m = 0.1, \quad P_0 = 101325, \quad \gamma = 10^9, \quad k = 0.022, \quad (2)$$

$$R = 8.31, \quad \alpha = 10^8, \quad P_*(t) = 20P_0, \quad T_*(t) = 1293.15 + 10 \cos(3t). \quad (3)$$

Результаты расчетов изображены на рис. 2.

Для случая $\chi = 1.43$, $l = 3$, $m = 0.1$, $P_0 = 101325$, $\gamma = 10^9$, $k = 0.022$, $R = 8.31$, $\alpha = 10^8$, $P_*(t) = P_0(25 + 2 \cos 3t)$, $T_*(t) = 793.15$ результаты расчетов изображены на рис. 3.

Во втором приближении представим u, P, T в виде:

$$\begin{cases} P = P_0 + P_*(t) + (L(w(t)) - P_0 - P_*(t)) \frac{x}{l_*} + P_1(t)x(l_* - x), \\ T = T_*(t) + T_0(t)(x^2 - 2l_*x) + T_1(t) \left(x^3 - \frac{3}{2}l_*x^2 \right), \\ u = u_0(t) + (\dot{w}(t) - u_0(t)) \frac{x}{l_*} + u_1(t)x(l_* - x). \end{cases}$$

Повторив все этапы метода Галеркина в пакете Mathematica, в результате получим систему из 6 нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для

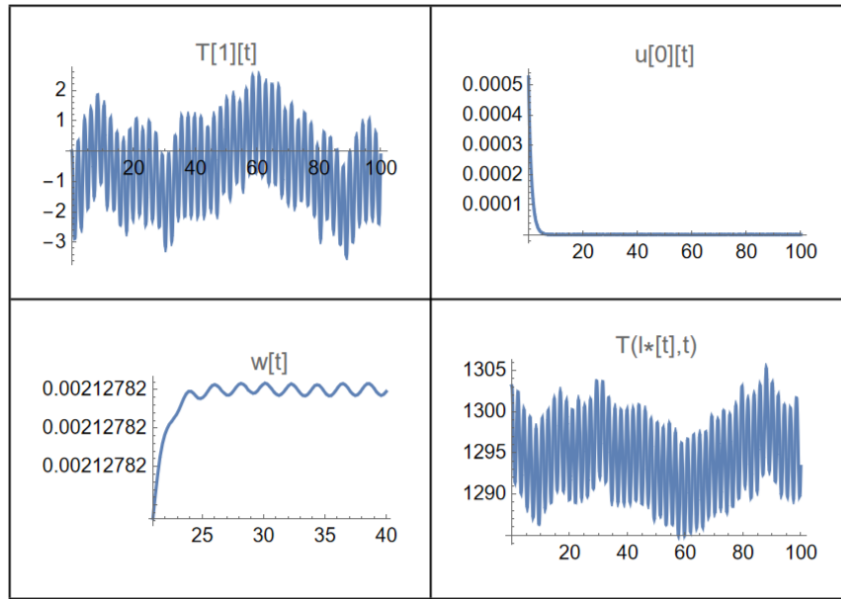


Рис. 2. Графики функций $T_1(t)$, $u_0(t)$, $w(t)$, $T(l_*, t)$ в первом приближении

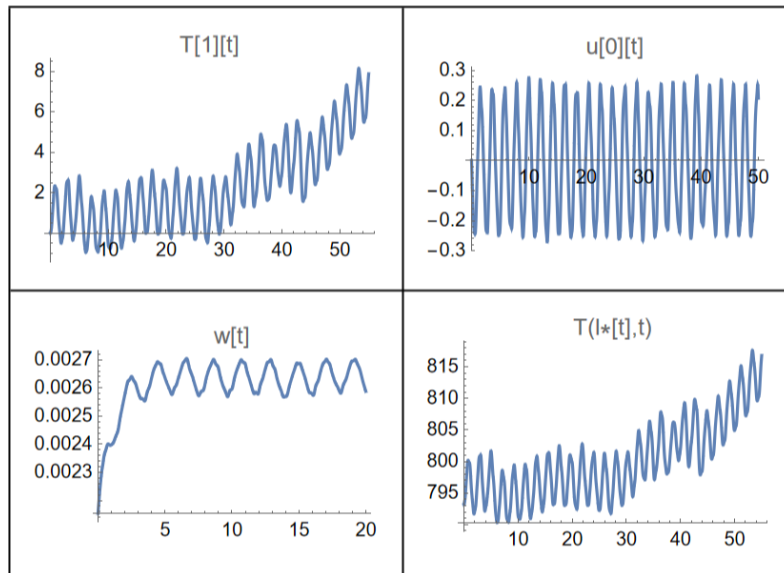


Рис. 3. Графики функций $T_1(t)$, $u_0(t)$, $w(t)$, $T(l_*, t)$ в первом приближении

неизвестных $w(t)$, $u_0(t)$, $u_1(t)$, $T_0(t)$, $T_1(t)$, $P_1(t)$, которые являются громоздкими и здесь не приводятся.

В результате численного эксперимента в программе Mathematica с аналогичными параметрами, получены графики температуры, скорости и перемещения чувствительного элемента датчика в зависимости от заданного закона изменения давления.

Для случая $\chi = 1.43$, $l = 3$, $m = 0.1$, $P_0 = 101325$, $\gamma = 10^9$, $k = 0.022$, $R = 8.31$, $\alpha = 10^8$, $P_*(t) = 20P_0$, $T_*(t) = 1293.15 + 10 \cos(3t)$ результаты расчетов изображены на рис. 4.

Для случая $\chi = 1.43$, $l = 3$, $m = 0.1$, $P_0 = 101325$, $\gamma = 10^9$, $k = 0.022$, $R = 8.31$, $\alpha = 10^8$, $P_*(t) = P_0(25 + 2 \cos 3t)$, $T_*(t) = 793.15$ результаты расчетов представлены на рис. 5.

Из рис. 2-5 следует, что результаты расчетов в первом и втором приближениях мало различаются.

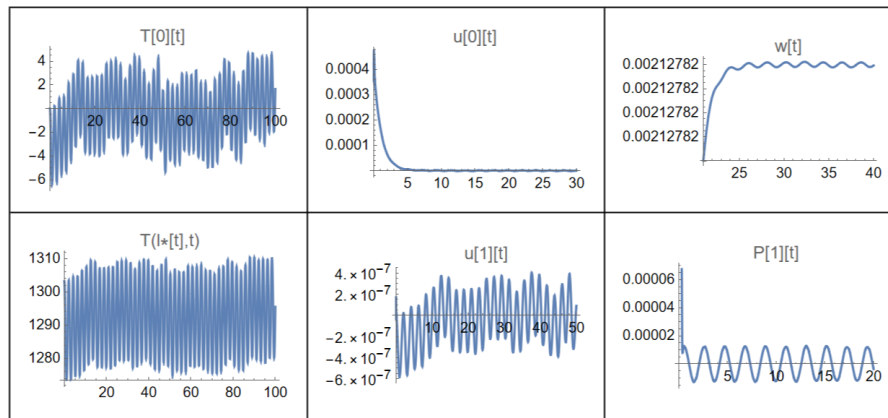


Рис. 4. Графики функций $T_0(t)$, $u_0(t)$, $w(t)$, $T(l_*, t)$, $u_1(t)$, $P_1(t)$ во втором приближении

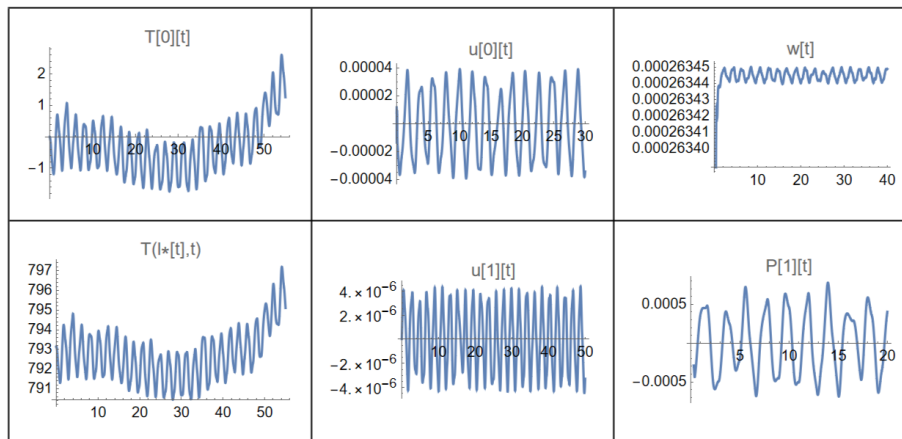


Рис. 5. Графики функций $T_0(t)$, $u_0(t)$, $w(t)$, $T(l_*, t)$, $u_1(t)$, $P_1(t)$ во втором приближении

Литература

1. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем контроля за изменением давления в газожидкостных средах // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем»: сб. тез. докл. междунар. конф. и междунар. шк. молодых ученых. Суздаль, 28 июня - 4 июля 2024. Владимир: Изд-во ВлГУ, 2024. С. 130-131.
2. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование динамических процессов в системах измерения давления в газожидкостных средах // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXV: материалы Международной Воронежской весенней математической школы. Воронеж, 26-30 апреля 2024 г. С. 81-83.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: пер. с англ. Москва: Мир, 1988. 352 с.

MSC 49K20,76N15,80A20.

Mathematical modeling of the dynamics of the mechanical system «pipeline – pressure sensor»

Yu.V. Vybornova, P.A. Velmisov
Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The paper considers a nonlinear mathematical model of the mechanical system «pipeline – pressure sensor» is proposed, designed to control the pressure in the combustion chamber. An approximate solution of the corresponding initial boundary value problem is constructed using the Galerkin method. Numerical experiments have been carried out and graphs of the movement of the sensor element and the temperature of the working medium have been obtained with different setting of the laws of change in the pressure of the working medium and the temperature at the inlet to the pipeline.

Keywords: pressure sensor, pipeline, sensing element, dynamics, differential equations, Galerkin's method.

References

1. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Matematicheskoe modelirovanie sistem kontrolya za izmeneniem davleniya v gazozhidkostnykh sredakh [Mathematical modeling of pressure monitoring systems in gas-liquid media] // Mezhdunarodnaya konferentsiya po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam. Mezhdunarodnaya shkola molodykh uchenykh "Modelirovanie i optimizatsiya slozhnykh sistem": sb. tez. dokl. mezhdunar. konf. i mezhdunar. shk. molodykh uchenykh. Suzdal', 28 iyunya - 4 iyulya 2024 [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems. International School of Young Scientists "Modeling and Optimization of Complex Systems": abstracts. Suzdal, June 28 - July 4, 2024]. Vladimir: VIGU, 2024. P. 130-131. (in Russian)
2. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov v sistemakh izmereniya davleniya v gazozhidkostnykh sredakh [Mathematical modeling of dynamic processes in pressure measurement systems in gas-liquid media] // Sovremennye metody teorii kraevykh zadach. Pontryaginskie chteniya - XXXV: materialy Mezhdunarodnoi Voronezhskoi vesennei matematicheskoi shkoly [Modern methods of boundary value problem theory. Pontryagin Readings - XXXV: proceedings of the International Voronezh Spring Mathematical School]. Voronezh, April 26-30, 2024. P. 81-83. (in Russian)
3. Fletcher K. Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moscow: Mir, 1988. 352 p. (in Russian)