

УДК 517.951; 519.635; 534.121

Оценка погрешности метода Галеркина при исследовании динамики упругой пластины

Анкилов М.А., Андреев А.С.

Ульяновский государственный университет

Аннотация: В данной работе на основе простейшей математической модели свободных колебаний упругой пластины разрабатывается аналитический метод исследования ее динамики. Исследуется случай шарнирного закрепления концов упругой пластины. Модель описывается дифференциальным уравнением в частных производных, решение которого отыскивается методом Бубнова-Галеркина. Цель исследования – на основе построения функционала типа Ляпунова определить погрешность полученного приближенного решения.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамика, упругая пластина, метод Галеркина.

1. Постановка задачи и функционал для дифференциального уравнения в частных производных

В работе проведено исследование дифференциального уравнения в частных производных

$$M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + \beta_0 w(x, t) = 0, \quad x \in [0, l] \quad (1)$$

с неизвестной функцией $w(x, t)$, описывающей деформацию упругой пластины длиной l . Здесь и в дальнейшем точка и штрих обозначают частные производные по переменным x и t соответственно. Постоянные коэффициенты D , M , β_0 описывают физические параметры пластины и ее основания.

Зададим граничные условия шарнирного закрепления концов пластины и начальные условия:

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad w''(0, t) = 0, \quad w''(l, t) = 0, \quad (2)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x). \quad (3)$$

Для функции $w(x, t)$, являющейся решением уравнения (1) с граничными условиями (2), производная от функционала

$$\Phi = \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t) \right\} dx \quad (4)$$

по переменной t будет равна нулю: $\dot{\Phi} = 0$. Интегрируя от 0 до t , получим равенство

$$\int_0^t \left\{ M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t) \right\} dx = \int_0^t \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1'^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx = \Omega_1. \quad (5)$$

С использованием неравенств Рэлея [1] и Коши-Буняковского

$$\int_0^l w''^2(x, t) dx \geq \frac{\pi}{l} \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad w^2(x, t) \leq l \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad (6)$$

согласно (5) доказана теорема 1.

Теорема 1. *Решение $w(x, t)$ краевой задачи (1), (2) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (3), и справедливо неравенство $w^2(x, t) \leq \frac{l^2 \Omega_1}{\pi D}$.*

2. Оценка остаточного члена метода Галеркина

Согласно методу Галеркина [2], решение краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$w_m(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) g_k(x), \quad (7)$$

где $g_k(x) = \sin \gamma_k x$, $\gamma_k = \frac{\pi k}{l}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, а функции $a_k(t)$ являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M \ddot{a}_k(t) + (D \gamma_k^4 + \beta_0) a_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, m} \quad (8)$$

с начальными условиями

$$a_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) g_k(x) dx, \quad \dot{a}_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(x) g_k(x) dx. \quad (9)$$

Тогда функция $w(x, t)$ в виде (7) будет удовлетворять условиям (2) и, решая задачу Коши (8), (9), получим приближенное решение (7) начально-краевой задачи (1)–(3):

$$w_m(x, t) = \sum_{k=1}^m \left(a_k(0) \cos(\nu_k t) + \frac{\dot{a}_k(0)}{\nu_k} \sin(\nu_k t) \right) g_k(x), \quad \nu_k = \sqrt{\frac{D \gamma_k^4 + \beta_0}{M}}. \quad (10)$$

Введем функцию Ляпунова для обыкновенного дифференциального уравнения (8):

$$\Psi = M \dot{a}_n^2(t) + (D \gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(t). \quad (11)$$

Тогда для функции $a_n(t)$, являющейся решением уравнения (8), получим $\dot{\Psi} = 0$. Интегрируя от 0 до t , получим равенство

$$M \dot{a}_n^2(t) + (D \gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(t) = M \dot{a}_n^2(0) + (D \gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(0) = \Omega_{2n}. \quad (12)$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2. *Решение $a_n(t)$ уравнения (8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (9) и справедливо неравенство $(D \gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(t) \leq \Omega_{2n}$.*

Следовательно, получим оценку

$$w_m^2(x, t) \leq 2 \sum_{k=1}^m a_k^2(t) g_k^2(x) \leq \sum_{k=1}^m \frac{2 (M \dot{a}_k^2(0) + (D \gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(0))}{(D \gamma_k^4 + \beta_0)} g_k^2(x). \quad (13)$$

Рассмотрим остаточный член $R_m(x, t)$ разложения (7):

$$w(x, t) = w_m(x, t) + R_m(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \sin \gamma_k x + R_m(x, t). \quad (14)$$

Подставляя $w(x, t)$ в виде (14) в уравнение (1), с учетом (8) получим

$$M \ddot{R}_m(x, t) + D R_m''''(x, t) + \beta_0 R_m(x, t) = 0. \quad (15)$$

Подставляя $w(x, t)$ в виде (14) в граничные условия (2) и начальные условия (3), получим

$$R_m(0, t) = 0, \quad R_m(l, t) = 0, \quad R_m''(0, t) = 0, \quad R_m''(l, t) = 0, \quad (16)$$

$$R_m(x, 0) = f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x, \quad \dot{R}_m(x, 0) = f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x, \quad (17)$$

где $a_k(0), \dot{a}_k(0)$ определяются согласно (9).

Для дифференциального уравнения в частных производных (15) с граничными и начальными условиями (16), (17) введем функционал

$$T = \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + D R_m''^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx, \quad (18)$$

и аналогично исследованию функционала (4) получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + D R_m''^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx &= \int_0^l \left\{ M \left(f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ &+ D \left(f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left(f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \left. \right\} dx = \Omega_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая ортогональность функции $R_m(x, t)$ к первым m функциям $\{g_k(x)\}_{k=1}^m$, получим неравенство Рэлея [1] и неравенство Коши-Буняковского

$$\int_0^l R_m''^2(x, t) dx \geq \frac{\pi(m+1)}{l} \int_0^l R_m'^2(x, t) dx, \quad R_m^2(x, t) \leq l \int_0^l R_m'^2(x, t) dx. \quad (20)$$

С учетом (19), (20) доказана теорема.

Теорема 3. Если функция $R_m(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (16), то решение $R_m(x, t)$ уравнения (15) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (17) и справедливо неравенство $R_m^2(x, t) \leq \frac{l^2 \Omega_3}{D \pi(m+1)}$.

В отличие от работы [3] в данном исследовании предложен аналитический метод оценки погрешности метода Галеркина.

Литература

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. Москва: Наука, 1968. 503 с.
2. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. 352 с.
3. Анкилов М. А., Андреев А. С. Численно-аналитический метод исследования динамики упругой пластины // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа". Воронеж, 2025. С. 53-55.

MSC 74S30

Estimation of the error of the Galerkin method in the study of the dynamics of an elastic plate

M.A. Ankilov, A.S. Andreev

Ulyanovsk State University

Abstract: In this paper, based on the simplest mathematical model of free vibrations of an elastic plate, an analytical method for studying its dynamics is developed. The case of hinged fastening of the ends of the elastic plate is investigated. The model is described by a differential equation in partial derivatives, the solution of which is found by the Bubnov-Galerkin method. The purpose of the study is to determine the error of the obtained approximate solution based on the construction of a Lyapunov-type functional.

Keywords: mathematical modeling, dynamics, elastic plate, Galerkin method.

References

1. Collatz L. Zadachi na sobstvennye znacheniya [Eigenvalue Problems]. Moscow: Nauka, 1968. 503 p. (in Russian)
2. Fletcher K. Chislennye metody na osnove metoda Galerkina [Numerical Methods Based on Galerkin Method]. Moscow: Mir, 1988. 352 p. (in Russian)
3. Ankilov M. A., Andreev A. S. Chislenno-analiticheskii metod issledovaniya dinamiki uprugoi plastiny [Numerical-Analytical Method for Studying Elastic Plate Dynamics] // Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy: materialy mezhdunarodnoi konferentsii "Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola" [Modern Methods of Function Theory and Related Problems: Proceedings of International Conference "Voronezh Winter Mathematical School"]. Voronezh, 2025. P. 53-55. (in Russian)