

УДК 517.9:539.3:532.5

Исследование динамической устойчивости упругой стенки воздуховода

Анкилов Г.А., Вельмисов П.А.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: На основе построенной трехмерной математической модели, описываемой системой дифференциальных уравнений в частных производных, в работе исследуется динамическая устойчивость упругой стенки воздуховода, через который подается поток газа. Для исследования устойчивости решений соответствующих начально-краевых задач аэрогидроупругости построены функционалы в моделях сжимаемой и несжимаемой среды. На основе свойств этих функционалов получены условия устойчивости и произведена оценка влияния сжимаемости потока газа на размеры областей устойчивости для конкретных параметров механической системы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, динамическая устойчивость, аэрогидроупругость, воздуховод, упругая пластина, функционал.

1. Постановка задачи

Рассматривается математическая модель движения газа в воздуховоде (рис. 1)

$$J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < l, 0 < y < h, 0 < z < h\}$$

с одной упругой стенкой при $y = 0$. Остальные стенки при $y = h$, $z = 0$, $z = h$ считаются недеформируемыми.

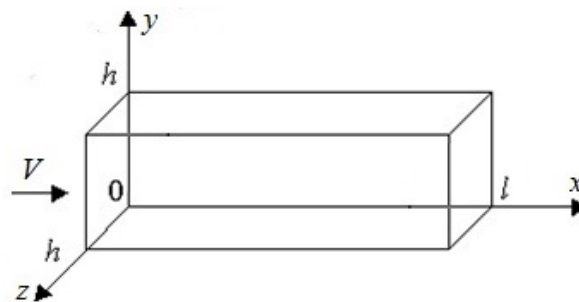


Рис. 1. Модель воздуховода квадратного сечения

В модели сжимаемой среды потенциал скорости возмущенного потока газа $\phi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \phi_{tt}(x, y, z, t) + 2V\phi_{xt}(x, y, z, t) + V^2\phi_{xx}(x, y, z, t) = \\ = a^2(\phi_{xx}(x, y, z, t) + \phi_{yy}(x, y, z, t) + \phi_{zz}(x, y, z, t)), \quad (x, y, z) \in J. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем индексы снизу обозначают частные производные по соответствующим переменным.

В модели несжимаемой среды потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\phi_{xx}(x, y, z, t) + \phi_{yy}(x, y, z, t) + \phi_{zz}(x, y, z, t) = 0, \quad (x, y, z) \in J. \quad (2)$$

С учетом аэрогидродинамического воздействия запишем линейное уравнение, описывающее прогиб $w(x, z, t)$ упругой пластины:

$$\begin{aligned} Mw_{tt}(x, z, t) + D(w_{xxxx}(x, z, t) + 2w_{xxzz}(x, z, t) + w_{zzzz}(x, z, t)) + \\ + \beta_2(w_{xxxxt}(x, z, t) + 2w_{xxzzt}(x, z, t) + w_{zzzzt}(x, z, t)) + N_{(x)}w_{xx}(x, z, t) + \\ + N_{(z)}w_{zz}(x, z, t) + \beta_1w_t(x, z, t) + \beta_0w(x, z, t) = \rho(\phi_t(x, 0, z, t) + V\phi_x(x, 0, z, t)), \\ (x, z) \in T_1 = \{(x, z) \in R^2 : 0 < x < l, 0 < z < h\}. \end{aligned} \quad (3)$$

где $M, D, \beta_0, \beta_1, \beta_2, N_{(x)}, N_{(z)}$ – постоянные коэффициенты, описывающие физические параметры пластины.

Из условий непротекания газа через стенки воздуховода получим граничные условия

$$\phi_y(x, h, z, t) = 0, \quad (x, z) \in T_1; \quad (4)$$

$$\phi_y(x, 0, z, t) = w_t(x, z, t) + Vw_x(x, z, t), \quad (x, z) \in T_1; \quad (5)$$

$$\phi_z(x, y, 0, t) = 0, \quad \phi_z(x, y, h, t) = 0, \quad (x, y) \in T_2 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < l, 0 < y < h\}. \quad (6)$$

Пусть на входе и выходе из воздуховода задан закон изменения потенциала скорости газа, тогда граничные условия примут вид

$$\phi(0, y, z, t) = 0, \quad \phi(l, y, z, t) = 0, \quad (y, z) \in T_3 = \{(y, z) \in R^2 : 0 < y < h, 0 < z < h\}. \quad (7)$$

В случае жесткого закрепления краев пластины $x = 0, x = l, z = 0, z = h$ граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} w(0, z, t) = 0, \quad w_x(0, z, t) = 0, \quad w(l, z, t) = 0, \quad w_x(l, z, t) = 0, \\ w(x, 0, t) = 0, \quad w_z(x, 0, t) = 0, \quad w(x, h, t) = 0, \quad w_z(x, h, t) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

2. Исследование устойчивости для сжимаемой среды

Произведено обобщение результатов, полученных в [1] для плоских моделей, и построен функционал для трехмерной модели (1), (3)-(8):

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \iiint_J (\phi_t^2 + (a^2 - V^2)\phi_x^2 + a^2\phi_y^2 + a^2\phi_z^2) dx dy dz + \\ + 2a^2V \iint_{T_1} \phi(x, 0, z, t)w_x(x, z, t) dx dz + \\ + \frac{a^2}{\rho} \iint_{T_1} (Mw_t^2 + Dw_{xx}^2 + 2Dw_{xz}^2 + Dw_{zz}^2 - N_{(x)}w_x^2 - N_{(z)}w_z^2 + \beta_0w^2) dx dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Доказано, что при выполнении условий

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad V < a \quad (10)$$

для задачи (1), (3)-(8) функционал имеет неположительную производную $\dot{\Phi}(t) \leq 0$, а, следовательно, справедливо неравенство

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (11)$$

Получим условия неотрицательности самого функционала $\Phi(t) \geq 0$. Для этого, используя неравенства Релея и Коши-Буняковского, получим оценку

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iiint_J \left(\phi_t^2(x, y, z, t) + \frac{\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) + 8a^2 l^2}{4h^2 l^2} \phi^2(x, y, z, t) - \right. \\ & - \frac{4a^2}{h^2} \phi(x, y, z, t) \phi(x, 0, z, t) + \frac{2a^2}{h^2} \phi^2(x, 0, z, t) + \frac{2a^2 V}{h} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) + \\ & + \frac{a^2}{\rho h} \left(\frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - N_{(x)} \right) w_x^2(x, z, t) \Big) dx dy dz + \\ & + \frac{a^2}{\rho} \iint_{T_1} \left(\frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2} - N_{(z)} \right) w_z^2(x, z, t) dx dz. \quad (12) \end{aligned}$$

Пусть выполняются условия

$$N_{(x)} < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2}, \quad N_{(z)} \leq \frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2}. \quad (13)$$

Тогда условие неотрицательности квадратичной формы относительно $\phi(x, y, z, t)$, $\phi(x, 0, z, t)$, $w_x(x, z, t)$ в (12) примет вид:

$$\begin{aligned} 2\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) (\pi^2 D (4h^2 + l^2) - h^2 l^2 N_{(x)}) - \\ - V^2 h^3 l^2 \rho (\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) + 8a^2 l^2) > 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Согласно (11), (12) доказана теорема.

Теорема 1. Решение $w(x, z, t)$ задачи (1), (3)-(8) устойчиво, а решение $\phi(x, y, z, t)$ и частные производные $\phi_t(x, y, z, t)$, $w_x(x, z, t)$, $w_z(x, z, t)$ устойчивы в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных при выполнении условий (10), (13), (14).

3. Исследование устойчивости для несжимаемой среды

Для задачи (2)-(8) построен функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iiint_J (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) dx dy dz + 2V \iint_{T_1} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) dx dz + \\ & + \frac{1}{\rho} \iint_{T_1} (M w_t^2 + D w_{xx}^2 + 2D w_{xz}^2 + D w_{zz}^2 - N_{(x)} w_x^2 - N_{(z)} w_z^2 + \beta_0 w^2) dx dz. \quad (15) \end{aligned}$$

Пусть выполняются условия (10), тогда получим также неравенство (11). Оценка функционала (15) примет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iiint_J \left(\frac{\pi^2 (4h^2 + l^2) + 8l^2}{4h^2 l^2} \phi^2(x, y, z, t) - \frac{4}{h^2} \phi(x, y, z, t) \phi(x, 0, z, t) + \frac{2}{h^2} \phi^2(x, 0, z, t) + \right. \\ & + \frac{2V}{h} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) + \frac{1}{\rho h} \left(\frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - N_{(x)} \right) w_x^2(x, z, t) \Big) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{\rho} \iint_{T_1} \left(\frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2} - N_{(z)} \right) w_z^2(x, z, t) dx dz. \quad (16) \end{aligned}$$

Пусть выполняются условия (13). Тогда условие неотрицательности квадратичной формы относительно $\phi(x, y, z, t)$, $\phi(x, 0, z, t)$, $w_x(x, z, t)$ в (16) примет вид:

$$2\pi^2 (4h^2 + l^2) (\pi^2 D (4h^2 + l^2) - h^2 l^2 N_{(x)}) - V^2 h^3 l^2 \rho (\pi^2 (4h^2 + l^2) + 8l^2) > 0, \quad (17)$$

а, следовательно, доказана теорема.

Теорема 2. *Решение $w(x, z, t)$ задачи (2)-(8) устойчиво, а решение $\phi(x, y, z, t)$ и частные производные $w_x(x, z, t)$, $w_z(x, z, t)$ устойчивы в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных при выполнении условий (10), (13), (17).*

Для конкретных значений параметров механической системы произведено сравнение условий (14) и (17) и численно найдена разность между левыми частями этих неравенств.

Литература

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. Ульяновск: УлГТУ, 2019. 201 с.

MSC 74F10

Study of dynamic stability of elastic air duct wall

G.A. Ankilov, P.A. Velmisov

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: Based on the constructed three-dimensional mathematical model described by a system of partial differential equations, the paper investigates the dynamic stability of the elastic wall of an air duct through which a gas flow is supplied. To study the stability of solutions to the corresponding initial-boundary value problems of aerohydroelasticity, functionals are constructed in models of compressible and incompressible media. Based on the properties of these functionals, stability conditions are obtained and an assessment is made of the effect of gas flow compressibility on the sizes of stability regions for specific parameters of the mechanical system.

Keywords: partial differential equations, dynamic stability, aerohydroelasticity, air duct, elastic plate, functional.

References

1. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Funktsionaly Lyapunova v nekotorykh zadachakh aerogidrouprugosti [Lyapunov functionals in some problems of aeroelasticity]. Ulyanovsk: UIGTU, 2019. 201 p. (in Russian)