

УДК 539.3

Дифференциальное уравнение совместности деформаций Генки в координатах Эйлера*

Андрианов И.К., Феоктистов С.И.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

Аннотация: В исследовании рассмотрена проблема несогласованности координат, в которых записаны дифференциальные уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций для плоской осесимметричной задачи упругопластического деформирования оболочек.

Ключевые слова: деформация Генки, координаты Эйлера, дифференциальное уравнение совместности деформаций, осесимметричные оболочки.

При проведении математической постановки задачи упругопластического деформирования осесимметричных оболочек основными уравнениями являются дифференциальные уравнения равновесия, физические соотношения, дифференциальные уравнения совместности деформаций и др. Дифференциальное уравнение совместности деформаций представляется одним из фундаментальных в механике деформируемого твердого тела, поскольку отражает условие неразрывности среды в процессе деформирования. При этом важным представляется согласованность координат, в которых записываются дифференциальные уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций. Для малых упругопластических деформаций в цилиндрической системе координат плоской осесимметричной задачи дифференциальное уравнение совместности относительных деформаций имеет вид:

$$\frac{d\varepsilon_{\theta\theta}}{d\rho} = \frac{\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\rho\rho}}{\rho},$$

где $\varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{\rho\rho}$ – относительные окружная и радиальная деформации, ρ – радиальная координата.

Данное уравнение записано в координатах Лагранжа и, в соответствии с работами [1, 2], не согласовано с дифференциальным уравнением равновесия для плоской осесимметричной задачи, записанным в координатах Эйлера. Кроме того, здесь используются относительные деформации, применяемые в качестве меры малых деформаций. Для учета больших деформаций при решении упругопластических задач в главных осях широко применяется деформация Генки. Мера деформаций Генки является нелинейной, обладает свойством аддитивности и может быть использована при описании больших деформаций в главных осях. В работе [3] было представлено дифференциальное уравнение совместности деформаций Генки, но оно записано в координатах Лагранжа. Для устранения противоречий координат и учета больших деформаций согласно работе [2] было представлено дифференциальное уравнение совместности деформаций Генки, записанное в координатах Эйлера:

$$\frac{de_{\theta\theta}}{d\rho} = \frac{1 - \exp(e_{\theta\theta} - e_{\rho\rho})}{\rho},$$

*Исследование выполнено за счет гранта РНФ N 25-79-10135 «Разработка моделей гидравлического автофреттирования осесимметричных оболочек с учетом деформационной анизотропии и вторичных пластических деформаций».

где $e_{\rho\rho} = \ln \frac{d\rho}{d\overset{\circ}{\rho}}$, $e_{\theta\theta} = \ln \frac{\rho}{\overset{\circ}{\rho}}$ – радиальная и окружная деформации Генки, $\overset{\circ}{\rho}$, ρ – радиальные координаты в отсчетной и актуальной системах координат.

Литература

1. Смирнов-Аляев Г. А., Розенберг В. М. Теория пластических деформаций металлов. Механика конечного формоизменения. Ленинград: Машгиз, 1956. 367 с.
2. Феоктистов С. И., Андрианов И. К. Уравнения совместности логарифмических деформаций в координатах Эйлера для решения осесимметричных процессов обработки металлов давлением // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2021. № 7 (55). С. 26-30. DOI: 10.17084/20764359-2021-55-26.
3. Durban D., Kubi M. A General Solution for the Pressurized Elastoplastic Tube // Journal of Applied Mechanics. 1992. Vol. 59, no. 1. P. 20-26. DOI: 10.1115/1.2899431.

MSC 74K25

Differential equation of the compatibility of Hencky strains in Euler coordinates

I.K. Andrianov, S.I. Feoktistov

Komsomolsk-na-Amure State University

Abstract: The study considers the problem of coordinate inconsistency, in which differential equations of equilibrium and equations of joint deformations for the plane axisymmetric problem of elastic plastic deformation of shells are written.

Keywords: Hencky strain, Euler coordinates, equation of compatibility of strains, axisymmetric shells

References

1. Smirnov-Alyayev G. A., Rosenberg V. M. Teoriya plasticheskikh deformatsiy metallov. Mekhanika konechnogo formoizmeneniya [Theory of plastic deformations of metals. Mechanics of finite forming]. Leningrad: Mashgiz, 1956. 367 p. (in Russian)
2. Feoktistov S. I., Andrianov I. K. Uravneniya sovmestnosti logarifmicheskikh deformatsiy v koordinatakh Eylera dlya resheniya osesimmetrichnykh protsessov obrabotki metallov davleniem [Compatibility equations of logarithmic deformations in Euler coordinates for solving axisymmetric metal forming processes] // Uchenye zapiski Komsomolskogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2021. No. 7 (55). P. 26-30. DOI: 10.17084/20764359-2021-55-26. (in Russian)
3. Durban D., Kubi M. A General Solution for the Pressurized Elastoplastic Tube // Journal of Applied Mechanics. 1992. Vol. 59, no. 1. P. 20-26. DOI: 10.1115/1.2899431.