

УДК 519.63

Об одной краевой задаче на плоскости

Агаркова Н.Н.

Белгородский государственный научный исследовательский институт

Аннотация: Рассматривается краевая задача с условиями Дирихле и Неймана для модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения на плоскости с разрезами вдоль координатных осей. Решение ищется в пространстве Соболева–Слободецкого. Используя специальную волновую факторизацию эллиптического символа краевая задача сводится к эквивалентной системе линейных интегральных уравнений.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, краевая задача, плоскость с разрезами.

1. Постановка задачи

Мы изучаем разрешимость эллиптических псевдодифференциальных уравнений

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in D, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} u|_{x_1=0-} - u|_{x_1=0+} = f_1(x_2), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=0-} - \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=0+} = g_1(x_2), \\ u|_{x_2=0-} - u|_{x_2=0+} = f_2(x_1), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2=0-} - \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2=0+} = g_2(x_1), \end{cases} \quad (2)$$

в пространстве $H^s(D)$, где $D \subset \mathbb{R}^2$ – плоская область вида $D = \bigcup_{j=1}^4 K_j$, $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$, $K_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 < 0, x_2 > 0\}$, $K_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 < 0, x_2 < 0\}$, $K_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 < 0\}$, A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$. Этот оператор в области D определяется формулой

$$(Au)(x) = \int_D \int_{\mathbb{R}^2} A(\xi) u(y) e^{i(y-x) \cdot \xi} dy d\xi, \quad x \in D.$$

Мы рассматриваем символ $A(\xi)$, удовлетворяющий условию

$$c_1 < |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| < c_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad c_1, c_2 > 0,$$

число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется порядком оператора A .

Оператор A является линейным ограничением оператора, действующим в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^m)$ [1].

Пространство $H^s(D)$ состоит из функций пространства $H^s(\mathbb{R}^2)$ с носителями в $\overline{D}$. Норма в пространстве $H^s(D)$ индуцируется нормой пространства $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Решение задачи (1), (4) предполагает решение следующих четырех уравнений

$$(Au_j)(x) = 0, \quad x \in K_j, \quad (3)$$

с граничными условиями (4). Решением уравнения (2) является сумма слагаемых

$$u = \sum_{j=1}^4 u_j,$$

таких, что $u_j \in H^s(K_j)$, $j = \overline{1, 4}$. Каждый образ Фурье $\tilde{u}_j \in \tilde{H}^s(K_j)$ является граничным значением аналитической функции в радиальной трубчатой области $T(K_j)$ над K_j [3].

Ключевую роль в построении решения играет понятие волновой факторизации эллиптического символа [6], которая предполагает представление символа в виде произведения двух сомножителей, допускающих аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области над соответствующими квадрантами и удовлетворяющих определенным оценкам (индекс волновой факторизации).

Обозначим волновую факторизацию символа $A(\xi)$ относительно K_1, K_2 следующим образом

$$A(\xi) = A_{n,\neq}(\xi) \cdot A_{n,=}(\xi), \quad n = 1, 2.$$

2. Исследование краевой задачи

Введем следующие обозначения

$$A_{1,\neq}^{-1}(\xi) \equiv L(\xi), \quad A_{2,\neq}^{-1}(\xi) \equiv M(\xi), \quad A_{1,=}^{-1}(\xi) \equiv P(\xi), \quad A_{2,=}^{-1}(\xi) \equiv Q(\xi),$$

и далее

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) d\xi_1 &= l_1(\xi_2), & \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) d\xi_2 &= l_2(\xi_1), & \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 L(\xi) d\xi_1 &= l_3(\xi_2), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} p\xi_2 L(\xi) d\xi_2 &= l_4(\xi_1), & \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) d\xi_1 &= m_1(\xi_2), & \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) d\xi_2 &= m_2(\xi_1), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 M(\xi) d\xi_1 &= m_3(\xi_2), & \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 M(\xi) d\xi_2 &= m_4(\xi_1), & \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi) d\xi_1 &= p_1(\xi_2), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi) d\xi_2 &= p_2(\xi_1), & \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 P(\xi) d\xi_1 &= p_3(\xi_2), & \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 P(\xi) d\xi_2 &= p_4(\xi_1), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi) d\xi_1 &= q_1(\xi_2), & \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi) d\xi_2 &= q_2(\xi_1), \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 Q(\xi) d\xi_1 = q_3(\xi_2), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 Q(\xi) d\xi_2 = q_4(\xi_1).$$

Записываем следующую систему линейных интегральных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) \tilde{a}_1(\xi_1) d\xi_1 + m_1(\xi_2) \tilde{b}_1(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) \tilde{a}_0(\xi_1) d\xi_1 - l_1(\xi_2) \tilde{b}_0(\xi_2) = \tilde{f}_{11}(\xi_2), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi) \tilde{c}_0(\xi_1) d\xi_1 + p_1(\xi_2) \tilde{d}_0(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi) \tilde{c}_1(\xi_1) d\xi_1 - q_1(\xi_2) \tilde{d}_1(\xi_2) = \tilde{f}_{12}(\xi_2), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 M_{2,\neq}^{-1}(\xi) \tilde{a}_1(\xi_1) d\xi_1 + m_3(\xi_2) \tilde{b}_1(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 L(\xi) \tilde{a}_0(\xi_1) d\xi_1 - l_3(\xi_2) \tilde{b}_0(\xi_2) = \tilde{g}_{11}(\xi_2), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 P(\xi) \tilde{c}_0(\xi_1) d\xi_1 + p_3(\xi_2) \tilde{d}_0(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 Q(\xi) \tilde{c}_1(\xi_1) d\xi_1 - q_3(\xi_2) \tilde{d}_1(\xi_2) = \tilde{g}_{12}(\xi_2), \\ q_2(\xi_1) \tilde{c}_1(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi) \tilde{d}_1(\xi_2) d\xi_2 - l_2(\xi_1) \tilde{a}_0(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) \tilde{b}_0(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{f}_{21}(\xi_1), \\ p_3(\xi_1) \tilde{c}_0(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi) \tilde{d}_0(\xi_2) d\xi_2 - m_3(\xi_1) \tilde{a}_1(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) \tilde{b}_1(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{f}_{22}(\xi_1), \\ q_4(\xi_1) \tilde{c}_1(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 Q(\xi) \tilde{d}_1(\xi_2) d\xi_2 - l_4(\xi_1) \tilde{a}_0(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 L(\xi) \tilde{b}_0(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{g}_{21}(\xi_1), \\ p_4(\xi_1) \tilde{c}_0(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 P(\xi) \tilde{d}_0(\xi_2) d\xi_2 - m_4(\xi_1) \tilde{a}_1(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 M(\xi) \tilde{b}_1(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{g}_{22}(\xi_1). \end{array} \right. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть $s > \frac{3}{2}$ и символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию по отношению к K_j с индексами $\mathfrak{x}_j$ такими, что $s + \frac{1}{2} < \mathfrak{x}_j < s + \frac{3}{2}$, $j = 1, 2$, $f_1, f_2 \in H^{s-1/2}(\mathbb{R})$, $g_1, g_2 \in H^{s-3/2}(\mathbb{R})$. Тогда однозначная разрешимость в пространстве $\sum_{j=1}^4 \oplus H^s(K_j)$ задачи (4), (2) эквивалентна однозначной разрешимости системы линейных интегральных уравнений (5) относительно неизвестных функций $\tilde{a}_0, \tilde{b}_0, \tilde{c}_0, \tilde{d}_0 \in \tilde{H}^{s-\mathfrak{x}_1+1/2}(\mathbb{R})$, $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{c}_1, \tilde{d}_1 \in \tilde{H}^{s-\mathfrak{x}_2+1/2}(\mathbb{R})$.

3. Заключение

В работе рассмотрены достаточно простые граничные условия. Это связано со значениями индексов $\mathfrak{x}_j$, $j = 1, 2$. Для других значений $\mathfrak{x}$ можно рассматривать более общие граничные условия. Более сложные постановки будут рассмотрены в дальнейших работах.

Литература

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 236 с.
2. Vasil'ev V. B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 320 p.

3. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 412 с.

MSC 35515

On a Certain Boundary Value Problem in a Plane Excluding Axes

N.N. Agarkova

Belgorod State Scientific Research Institute

Abstract: A boundary value problem with Dirichlet and Neumann conditions for a model elliptic pseudodifferential equation on a plane with sections along the coordinate axes is considered. The solution is sought in the Sobolev-Slobodetsky space. Using a special wave factorization of the elliptic symbol, the boundary value problem is reduced to an equivalent system of linear integral equations.

Keywords: pseudo-differential equation, boundary value problem, plane with cuts.

References

1. Eskin G. I. Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh psevdodifferentsial'nykh uravnenii [Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations]. Moscow: Nauka, 1973. 236 p. (in Russian)
2. Vasil'ev V. B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 320 p.
3. Vladimirov V. S. Metody teorii funktsii mnogikh kompleksnykh peremennykh [Methods of the theory of functions of many complex variables]. Moscow: Nauka, 1964. 412 p. (in Russian)