

УДК 519.63

Построение дифференцируемых функций полезности по торговой статистике

Абрашкина В.Б., Горбунов В.К.

Ульяновский государственный университет

Аннотация: Представлена проблема построения дифференцируемых функций рыночного спроса по торговой статистике цен и количеств продаж каждого (первично агрегированного) блага исследуемого рынка. Предложен параметрический метод наименьших квадратов для оценивания параметров функции полезности, рационализирующий искомый спрос по регрессионной системе, использующей числа Аффриата, полученные на первом этапе решением релаксированной системы неравенств Аффриата.

Ключевые слова: теория рыночного спроса, построение функций спроса, параметрический метод.

1. Введение

Современная неоклассическая экономическая теория [1, 2] построена в жёстких рамках методологического индивидуализма, основной принцип которого – представление сложных экономических явлений через действия элементарных агентов, которыми назначены потребители и фирмы, предполагаемые независимыми и рациональными. Нереальность этих предположений и иррациональность реального поведения, нередко спонтанного, очевидны. Эта теория (далее Economics), составляющая основу экономического образования и исследований в большинстве стран мира, содержит нормативную аксиоматическую теорию индивидуального спроса (ТИС), но не содержит научно обоснованной позитивной теории рыночного спроса – объекта реального интереса для производителей товаров и услуг конечного потребления (благ), торговли и администрации. Как следствие, в Economics не удалось построить обоснованные методы анализа рыночного спроса и построения «экономических» (аналитических) индексов спроса, отражающих потребительские предпочтения населения. Эти индексы, идея которых принадлежит А.А. Конюсу (1924), многие авторы считают естественной концептуальной основой теории потребительских индексов, но до настоящего времени они относятся лишь к индивидам или домашним хозяйствам [3, гл. 17-18]. Без позитивной теории рыночного спроса также невозможно построить теорию экономического равновесия, отражающую реальность и однозначно определяющую цены, учитывающие ресурсы, производственные возможности и потребительские предпочтения населения. Это снижает возможности формирования экономической политики, внутренней и внешней, адекватной национальным интересам.

Нерешённость базовых вопросов экономической теории и практики вызвала в последние три десятилетия множество критических работ относительно состояния Economics и её методологии. Однако конструктивного решения проблемы отсутствия в Economics реалистичной теории рыночного спроса (TRC) в известных работах других авторов не предложено. Такая теория построена в работах второго автора в рамках общенаучной методологии, определяющей принципы построения методов

исследования реальных объектов природы и общества с целью получения о них объективных и обоснованных логически и эмпирически знаний [4–6]. Формально, ТРС повторяет основные математические модели и факты неоклассической ТИС, но отнесённые не к искусственному объекту – индивиду, распределяющему свой доход (или бюджет) на покупку набора товаров и услуг, доставляющую ему некую «полезность», а к «статистическому ансамблю потребителей» исследуемого рынка.

Верификация ТРС происходит проверкой соответствия значений теоретического рыночного спроса фактическим значениям торговой статистики цен и количеств покупок различных благ, представляемых государственными статистическими органами (в России – Росстатом). Проверка заключается в построении функции спроса или функции полезности, порождающей функции спроса, наилучшим образом аппроксимирующих статистические данные. Современное состояние этой проблемы представлено в статьях [7, 8]. В этих и других работах развит непараметрический анализ спроса Африата–Вэриана [1, 2, 9], решающий вопрос о рационализированности данной статистики в наиболее общем классе функций предпочтения/полезности (ФП) – возрастающих и ненасыщаемых), а также определяющих числа Африата – значения рационализующей ФП и множителя Лагранжа задачи максимизации ФП на множестве благ, доступных при данных ценах и совокупных потребительских расходах – показателей, наблюдаемых статистическими службами.

В реализованных в указанных работах методах рационализующая ФП определяется как вогнутая кусочно-линейная функция. Этого достаточно для решения принципиального вопроса адекватности ТРС данной статистике и построению аналитических индексов (Конюса). Однако более глубокий анализ потребительских рынков основан на регулярной модели спроса, и данный доклад представляет новый подход к построению регулярной (однозначной непрерывно дифференцируемой) функции рыночного спроса и её матрицы Слуцкого, представляющей парные характеристики благ – замещение и (альтернативно) дополнение. При этом искомые функции спроса и полезности ищутся в параметрической форме с использованием чисел Африата, определяемых решением системы неравенств Африата. Этим преодолевается основной недостаток прямого параметрического метода построения функций по конечному набору статистических данных – невозможность определения наилучшего класса параметризации. В нашем случае получаемые с использованием чисел Африата функции спроса можно считать квазиоптимальными.

2. Построение дифференцируемых функций полезности по торговой статистике

1. Рассмотрим рынок n бесконечно делимых благ. Введём пространство благ E_+^n – неотрицательный ортант евклидова пространства E^n со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Классическая задача потребительского спроса заключается в максимизации непрерывной, возрастающей и квазивогнутой функции полезности $u(x)$ на множестве благ, доступных при данных ценах p и расходах (*expenditures*) e на данном рынке:

$$v(p, e) = \max \{u(x) : \langle p, x \rangle \leq e, \ x \geq 0\}. \quad (1)$$

Содержательное обоснование этой модели в рамках общенаучной методологии, формально совпадающей с неоклассической моделью индивидуального спроса [1, 2], дано в [5, 8].

Аналитическая теория потребительского спроса, продуктивная для углублённого анализа спроса, выводится в *регулярном случае*, где предполагается строгая квази-

вогнутость и дважды непрерывно дифференцируемость функции полезности $u(x)$. При этом задача (выпуклого программирования) (1) имеет при каждом наборе положительных параметров (p, e) единственное решение $x(p, e)$ – непрерывно дифференцируемую функцию рыночного спроса

$$x(p, e) = \arg \max \{u(x) : \langle p, x \rangle \leq e, \quad x \geq 0\}. \quad (2)$$

Для регулярного спроса $x(p, e; w)$ определена матрица замещения Слуцкого

$$s_{ij}(p, e) = \frac{\partial x_i(p, e)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, e)}{\partial e} x_j(p, e), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

позволяющая выполнить глубокий содержательный анализ спроса. Известно [5, Утв. 6.17], что матрица Слуцкого (3) отрицательно полуопределённая, симметричная и её нуль-пространство определяется вектором цен p . При этом диагональные элементы $s_{ii}(p, e) < 0$ и знаки внедиагональных элементов определяют экономические характеристики: пара благ i и j при $s_{ji}(p, e) > 0$ являются *заменителями*, и при $s_{ji}(p, e) < 0$ – *дополнителями*.

2. Конкретные рынки представляются *торговой статистикой*, под которой здесь понимается конечный набор цен $p^t \in E_+^n$ и количеств продаж $x^t \in E_+^n$ за отчётный период:

$$\{p^t, x^t : t = \overline{0, T}\}. \quad (4)$$

Эти данные определяют также потребительские расходы $e_t = \langle p^t, x^t \rangle$.

Существует два подхода к построению функций спроса. Первый – классический параметрический метод наименьших квадратов (МНК). Здесь функция спроса ищется в некотором параметрическом классе непрерывно дифференцируемых функций $x(p, e; w)$, рационализируемых известной функцией полезности $u(x; w)$. Здесь $w \in W$ – параметры функции и множество W определяется ограничениями, обеспечивающими свойства положительности, возрастания и квазивогнутости функции полезности.

Условия соответствия расчётного $x(p, e; w)$ и статистического $\{x^t : t = \overline{0, T}\}$ спросов в идеальном варианте представляются регрессионной системой

$$x(p^t, e_t; w) \simeq x^t, \quad t = \overline{0, T}. \quad (5)$$

Равенства (5) не выполняются точно по трём причинам: условность модели (2), ограничение области поиска классом функций $\{x(p, e; w)\}$, неточность статистических данных (4). Соответственно, наилучшие параметры w данного класса определяются методом наименьших квадратов, т.е. минимизацией функции квадратичной невязки

$$\varphi(w) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^n [x_i(p^t, e_t; w) - x_i^t]^2 \quad (6)$$

при условии $w \in W$.

3. Существенным недостатком классического варианта является невозможность нахождения наилучшего (оптимального) класса параметризации, обеспечивающего наименьшее (по классам параметризации) значение МНК невязки (6). Этого недостатка лишён непараметрический метод анализа потребительского спроса Африата-Вэриана. Опуская подробности, представленные в [5, 7, 8], отметим, что этот метод основан на решении некоторой системы линейных неравенств, определяющих значения «чисел Африата», т.е. значений функции полезности и множителя Лагранжа задачи (2):

$$u_t = u(x^t), \quad \lambda_t = \lambda(p^t, e_t), \quad t = \overline{0, T}, \quad (7)$$

с нормировкой $u_0 = e_0$, $\lambda_0 = 1$.

В этом методе получен условие критерий рационализируемости статистики (4) для наиболее широкого класса ФП – возрастающих и ненасыщаемых. Он заключается в положительной разрешимости системы неравенств Африата. Пусть построено такое решение $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{1, T}\}$. Тогда для искомой ФП параметрического класса $\{u(x; w)\}$ строится регрессионная система

$$u(x^t; \hat{w}) \simeq u_t, \quad \frac{1}{p_1^t} \frac{\partial u(x^t; w)}{\partial x_1} \simeq \lambda_t, \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{0, T}. \quad (8)$$

Для данной системы решается задача МНК – оценок параметров ФП w , аналогичная задачи МНК для функции спроса $x(p, e; w)$, рационализуемой функцией полезности $u(x; w)$. Естественно предположить, что использование непараметрического метода Африата-Вэриана должно улучшить МНК-оценки параметров.

Литература

1. Mas Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. New York: Oxford University Press, 1995. 981 p.
2. Бусыгин В. П., Желободько Е. В., Цыплаков А. А. Микроэкономика: третий уровень: в 2 т. Т. 1: учебник. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. 712 с.
3. Руководство по индексу потребительских цен: теория и практика. Вашингтон: Международный валютный фонд, 2007. 538 с.
4. Горбунов В. К. Математическая модель потребительского спроса: теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004. 320 с.
5. Горбунов В. К. Потребительский спрос: аналитическая теория и приложения. Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2015. 415 с. URL: <https://www.rfbr.ru/library/books/2641/>
6. Gorbunov V. Market demand: a holistic theory and its verification // Munich Personal RePEc Archive. 2021. Paper No. 109154. 35 p. URL: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/109154/>
7. Горбунов В. К., Львов А. Г. Анализ потребительского спроса в России: двухэтапное построение аналитических индексов // Вопросы статистики. 2022. Т. 29, № 4. С. 97-113. DOI: 10.34023/2313-6383-2022-29-4-97-113
8. Горбунов В. К., Львов А. Г. Проблема верификации теории рыночного спроса // Сибирский журнал индустриальной математики. 2024. Т. 27, № 2. С. 43-65. DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.204
9. Afriat S. N. The construction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. 1967. Vol. 8, no. 1. P. 67-77.
10. Varian H. The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. 1982. Vol. 50, no. 4. P. 945-973.
11. Varian H. Nonparametric tests of consumer behaviour // The Review of Economic Studies. 1983. Vol. 50. P. 99-110.

MSC 91B42

Construction of differentiable utility functions based on trade statistics

V.B. Abrashkina, V.K. Gorbunov

Ulyanovsk State University

Abstract: The problem of constructing differentiable functions of market demand based on trade statistics of prices and sales quantities of each (primary aggregated) good of the market under study is presented. A parametric least squares method is proposed for estimating the parameters of the utility function, which rationalizes the desired demand using a regression system and Afriate numbers obtained at the first stage by solving a relaxed system of Afriate inequalities.

Keywords: market demand theory, demand functions construction, parametric method.

References

1. Mas Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. New York: Oxford University Press, 1995. 981 p.
2. Busygin V. P., Zhelobodko E. V., Tsyplakov A. A. Mikroekonomika: tretii uroven': v 2 t. T. 1 [Microeconomics: third level: in 2 vols. Vol. 1]: textbook. Novosibirsk: Siberian Branch of Russian Academy of Sciences Publ., 2008. 712 p. (in Russian)
3. Rukovodstvo po indeksu potrebitel'skikh tsen: teoriya i praktika [Consumer price index manual: theory and practice]. Washington: International Monetary Fund, 2007. 538 p. (in Russian)
4. Gorbunov V. K. Matematicheskaya model' potrebitel'skogo sprosа: teoriya i prikladnoi potentsial [Mathematical model of consumer demand: theory and applications]. Moscow: Ekonomika, 2004. 320 p. (in Russian)
5. Gorbunov V. K. Potrebitel'skii spros: analiticheskaya teoriya i prilozheniya [Consumer demand: analytical theory and applications]. Ulyanovsk: Ulyanovsk State University, 2015. 415 p. URL: <https://www.rfbr.ru/library/books/2641/> (in Russian)
6. Gorbunov V. Market demand: a holistic theory and its verification // Munich Personal RePEc Archive. 2021. Paper No. 109154. 35 p. URL: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/109154/>
7. Gorbunov V. K., Lvov A. G. Analiz potrebitel'skogo sprosа v Rossii: dvukhetapnoe postroyeniye analiticheskikh indeksov [Analysis of consumer demand in Russia: two-stage construction of analytical indices] // Voprosy statistiki [Statistical Issues]. 2022. Vol. 29, no. 4. P. 97-113. DOI: 10.34023/2313-6383-2022-29-4-97-113 (in Russian)
8. Gorbunov V. K., Lvov A. G. Problema verifikatsii teorii rynochnogo sprosа [The problem of verification of market demand theory] // Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki [Siberian Journal of Industrial Mathematics]. 2024. Vol. 27, no. 2. P. 43-65. DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.204 (in Russian)

9. Afriat S. N. The construction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. 1967. Vol. 8, no. 1. P. 67-77.
10. Varian H. The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. 1982. Vol. 50, no. 4. P. 945-973.
11. Varian H. Nonparametric tests of consumer behaviour // The Review of Economic Studies. 1983. Vol. 50. P. 99-110.