

Дифференциальные уравнения и их приложения
в математическом моделировании

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XVII МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ



Саранск
2025

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

**Дифференциальные уравнения и их приложения
в математическом моделировании**

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XVII МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Саранск
29 — 31 июля 2025 г.

Саранск
2025

УДК 510:004.5
ББК В1
Д503

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

член-корр. РАН, д.ф.-м.н. профессор В.Ф. Тишкин (отв. редактор):
д.ф.-м.н. профессор П.А. Вельмисов;
д.ф.-м.н. профессор В.К. Горбунов;
д.ф.-м.н. профессор Е.Б. Кузнецов;
д.ф.-м.н. профессор О.В. Починка.

Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моде-
Д503 лировании [Электронный ресурс]: Сборник материалов XVII Международ-
ной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложе-
ния в математическом моделировании» (Саранск, 29-31 июля 2025 г.) /
редкол.: В.Ф. Тишкин (отв. ред.) [и др.]. – Саранск: СВМО, 2025. – 304 с.
Режим доступа: <http://conf.svmo.ru/files/2025/ThesesSaransk2025.pdf>

ISBN 978-5-901661-64-2

Настоящее издание содержит материалы докладов участников XVII Между-
народной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложе-
ния в математическом моделировании», проходившей в Национальном исследо-
вательском Мордовском государственном университете с 29 по 31 июля 2025 г.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

УДК 510:004.5
ББК В1

Публикуется на основании Устава Межрегиональной общественной орга-
низации «Средне-Волжское математическое общество» (п. 2.2) и по решению
редакционно-издательского отдела СВМО.

© Коллектив авторов, 2025
© Оформление. СВМО, 2025

Предисловие

Настоящее издание содержит материалы докладов XVII Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании», которая проходит с 29 по 31 июля 2025 года в г. Саранск (Россия). Организаторами школы-семинара выступили Национальный исследовательский Мордовский государственный университет, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и Средне-Волжское математическое общество.

Научные конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям в математическом моделировании в Мордовском государственном университете им. Н.П. Огарёва проводятся регулярно с 1994 года. Основателем и идейным вдохновителем научных конференций и школ-семинаров являлся талантливый ученый и организатор д.ф.-м.н. профессор Е.В. Воскресенский. Он руководил этими мероприятиями до 2008 года. С 2009 года председателем конференций является член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н. профессор В.Ф. Тишкин (зав. отделом Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва», г. Саранск).

Работа конференции проводится по секциям:

1. Качественные и асимптотические методы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложения в практических задачах.
3. Уравнения в частных производных и их приложения в математическом моделировании.

Все доклады, представленные на Конференции, были предварительно прорецензированы Программным комитетом.

Организаторы благодарны всем участникам Конференции за интересные доклады и плодотворную дискуссию.

**Программный, организационный и редакционный комитеты
XVII Международной научной конференции «Дифференциальные
уравнения и их приложения в математическом моделировании»
Саранск, 29 — 31 июля 2025 года**

Председатель организационного комитета –

ректор Национального исследовательского Мордовского государственного университета Д. Е. Глушко (г. Саранск)

Председатель программного комитета –

член-корреспондент РАН д.ф.-м.н. профессор В. Ф. Тишкин (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва).

Ученый секретарь –

к.ф.-м.н. О. С. Язовцева (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет, г. Саранск)

Организационный комитет:

к.ф.-м.н., доцент	Р.В. Жалнин,	г. Саранск,	Россия.
д.т.н., профессор	П.В. Сенин,	г. Саранск,	Россия.
к.т.н., доцент	А.М. Давыдкин,	г. Саранск,	Россия.
к.т.н., доцент	А.И. Лысяков,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	И.И. Чучаев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Т.Ф. Мамедова,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	С.М. Мурюмин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Д.К. Егорова,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.Н. Тында,	г. Пенза,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Д.В. Тарасов,	г. Пенза,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Е.В. Десяев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.О. Сыромясов,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., с.н.с.	М.Н. Вишнякова,	г. Саров,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Т.Е. Бадокина,	г. Саранск,	Россия.
к.м.н., зам. декана	С.Х. Зинина,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	О.Е. Каледин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Е.А. Каледина,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	В.Е. Мальков,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	М.С. Нефедов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	В.В. Логинов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	С.Ф. Сайфетдинов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	Н.В. Ошина,	г. Саранск,	Россия.
лаборант-исследователь	И.В. Митрюхин,	г. Саранск,	Россия.

Программный комитет:

д.ф.-м.н., доцент	Е.Е. Пескова,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.С. Андреев,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Д.В. Баландин,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	П.А. Вельмисов,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	В.К. Горбунов,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	И.М. Губайдуллин,	г. Уфа,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Ю.Н. Дерюгин,	г. Саров,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.П. Жабко,	г. Санкт-Петербург,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.М. Камачкин,	г. Санкт-Петербург,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.С. Козелков,	г. Саров,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.Д. Кузьмичев,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Е.Б. Кузнецов,	г. Москва,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	С.И. Мартынов,	г. Сургут,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.Д. Морозкин,	г. Уфа,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	О.В. Починка,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.В. Старостин,	г. Н. Новгород,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Л.А. Сухарев,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	В.А. Титарев,	г. Москва,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	П.А. Шаманаев,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	М.А. Шишленин,	г. Новосибирск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Ш.А. Алимов,	г. Ташкент,	Узбекистан.
д.ф.-м.н., профессор	А. Асанов,	г. Бишкек,	Кыргызстан.
д.ф.-м.н., профессор	С.М. Босяков,	г. Минск,	Беларусь.
д.ф.-м.н., профессор	А.А. Глуцюк,	г. Лион,	Франция.

Содержание

Абрашкин А.М. Решение дифференциальных уравнений с помощью физически информированного машинного обучения	15
Абрашкина В.Б., Горбунов В.К. Построение дифференцируемых функций полезности по торговой статистике	22
Аверьянов М.В., Таланов М.В. Применение дифференциальных уравнений в адаптивной системе управления асинхронным двигателем с нейросетевой настройкой БИХ-фильтра	28
Агаркова Н.Н. Об одной краевой задаче на плоскости	32
Андрианов И.К., Феоктистов С.И. Дифференциальное уравнение совместности деформаций Генки в координатах Эйлера	37
Анкилов Г.А., Вельмисов П.А. Исследование динамической устойчивости упругой стенки воздуховода	40
Анкилов М.А., Андреев А.С. Оценка погрешности метода Галеркина при исследовании динамики упругой пластины	45
Артемьев Д.Д., Дюбуа А.Б., Кучерявый С.И., Сафошкин А.С. Решение интегродифференциального уравнения Максвелла и распространение электромагнитного излучения в графеновых структурах	50
Балабина Т.Ю., Дерюгин Ю.Н. Применение разномасштабных моделей в численном исследовании течения в криволинейном канале с пористыми вставками	53
Васютин М.А., Кузьмичев Н.Д. Уравнение движения вихря Абрикосова в широких сверхпроводящих плёнках	58
Веселов М.Р. Методика расчета двумерных уравнений Навье-Стокса на неструктурированных сетках	61
Выборнова Ю.В., Вельмисов П.А. Математическое моделирование динамики механической системы «трубопровод – датчик давления»	63
Гладун А.В. О стабилизации динамики упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании	69
Глазов С.Ю., Мещерякова Н.Е., Подгорная И.А. Квазиклассический метод расчета плотности тока щелевых модификаций графена в присутствии статического и переменного электрических полей	74
Гордеева О.В., Гордеев В.Е. О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с квадратичным гомоклиническим касанием к негиперболической неподвижной точке ..	79

Губайдуллин И.М., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Узьянбаев Р.М., Язовцева О.С. Об одном алгоритме прямого разрешения доменных структур с внутренней мортарной границей	82
Гусельникова И.В. Разрешимость начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды в классе суммируемых функций в сетеподобной области	85
Евтина Д.С., Жабко А.П. Оценка перерегулирования дифференциально-разностных систем нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями	91
Жаркова А.С., Анкилов А.В. Два способа исследования динамики упругой стенки канала квадратного сечения на основе метода Фурье	95
Жигалов В.С., Жабко А.П. Построение программного управления для дифференциально-разностной системы с линейно возрастающим запаздыванием	101
Иншакова А.С., Язовцева О.С., Губайдуллин И.М. Параллельный алгоритм для моделирования нестационарного процесса в слое катализатора	106
Корякин В.А., Казаков А.О. Численные исследования аттрактора Лоренца в системе Шимицу-Мориока	111
Костромина О.С. Анализ динамики двумерной модели нейрона Хиндмарша–Роуза	114
Костромина О.С. Об условиях существования вырожденных резонансных уровней в маятниковых уравнениях при квазипериодических неконсервативных параметрических возмущениях	119
Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Движение агрессивной среды в стержне круглого поперечного сечения	125
Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. О методах определения областей абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для некоторых классов неавтономных дифференциальных уравнений	129
Кузьмичев Н.Д. Ошибки задачи восстановления производных функции из ее гармоник	135
Кузьмичев Н.Д. Приближение производной функции коэффициентами Фурье ..	140
Ладонкина М.Е., Повещенко Ю.А., Чжан Х. Энтропийный анализ одной полностью консервативной разностной схемы с адаптивной искусственной вязкостью для численного решения задач газодинамики в переменных Эйлера	146
Леонтьев В.Л. Об ортогональных сплайнах и их применении в вариационно-сеточных методах решения краевых задач	150

Логинов В.В., Пескова Е.Е. Эффективность параллельных реализаций классических итерационных методов решения уравнения Пуассона в цилиндрических координатах	154
Лутошкин И.В., Чекмарев А.Г. Метод параметризации для решения задач оптимального управления с многокомпонентным управлением	159
Мартынов С.И. Модель течения двухфазной жидкости с неоднородной эффективной вязкостью	163
Мизхер У.Д., Мизхер М.Д., Абрашкин П.М., Вельмисов П.А. Математическое моделирование процесса комбинированного сжигания и анализ влияния разных способов инъекции на эффективность сгорания	170
Морозкин Н.Д., Галлямов В.В., Морозкин Н.Н. Особенности распределения температурного поля в пористом пласте с аномальной нефтью	176
Морозкин Н.Д., Колонских Д.М. Математическое моделирование напряженного состояния ВНЧС в латеральной окклюзии	180
Морозов К.Е. О трёхмерных системах, близких к интегрируемым	185
Мустайкин М.С., Пескова Е.Е. Параллельный код для исследования дозвуковых потоков теплопроводной газовой смеси	193
Мустафина С.И., Корнилова А.А., Гиззатова Э.Р. О применении генетических алгоритмов для аппроксимации экспериментальных данных термической деструкции парафина	196
Нефедов М.С., Жалнин Р.В., Зинина С.Х. Исследование многосеточного метода для решения уравнений в частных производных разрывным методом Галёркина	201
Никонов В.И. Применение алгебро-геометрических свойств линейных систем дифференциальных уравнений к исследованию частичной устойчивости	206
Переварюха А.Ю. Моделирование явлений алеаторической неопределенности в биосистемах на основе возмущенных уравнений с запаздыванием	212
Перова И.В. Задача оптимизации турбулентных течений многофазных сред по сетеподобному носителю	217
Попов В.Н., Гермидер О.В. Математическое моделирование процесса диффузии легкой компоненты бинарного газа	221
Провоторов В.В., Рыбаков М.А. О численно-аналитическом методе решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды в n -мерной сетеподобной области	225

Сайфетдинов С.Ф., Мамедова Т.Ф. Алгоритм исследования динамики сердечно-сосудистых заболеваний	230
Сахаров А.Н. SU(2)-расширения квазипериодических потоков	234
Стойановская О.П. Многомерный оператор градиента высокого порядка в гидродинамике сглаженных частиц	239
Тамарова Ю.А. Исследование математических моделей системы измерения давления в газожидкостных средах	242
Тамарова Ю.А. Численное исследование зависимости прогиба чувствительного элемента датчика давления от параметров системы	248
Уразова К.М. Разработка физико-информированной нейронной сети для анализа напряжённого состояния мягких биологических тканей	254
Федулов И.Н., Глазов С.Ю. Метод малого параметра в задачах моделирования динамики нелинейных электромагнитных волн в 2D сверхструктурах	259
Хашпер Б.Л., Юнусова Д.С., Гиззатова Э.Р. Математическое моделирование безобрывной полимеризации диенов на основе системы дифференциальных уравнений	263
Чернова М.А., Мамедова Т.Ф. Исследование моделей нейронных сетей головного мозга	269
Шамаев А.В., Никашкин Д.Н., Куряев Р.В. Анализ работы алгоритмов стабилизации отклонений движения курсора у пользователей с ограниченными возможностями здоровья для разработки специализированного драйвера компьютерного манипулятора «мышь»	274
Шаманаев П.А. К вопросу об условной устойчивости нулевого решения нелинейной системы по линейному приближению	279
Шамолин М.В. Инварианты однородных динамических систем произвольного нечетного порядка с диссипацией	281
Шилов О.М., Казаков А.О. О различных типах гиперболических хаотических множеств в возмущенном отображении Аносова	285
Язовцева О.С., Пескова Е.Е., Митрюхин И.В., Усманова А.А. Математическое моделирование нестационарного процесса в слое катализатора	288
V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko Classical Solution of the First Mixed Problem for the Liouville Equation in a Half-Strip	292
V.L. Litvinov, K.V. Litvinova On one solution of the problem of transverse oscillations of a beam with movable boundaries	294

Y.T. Mehraliyev, M.B.Mursalova, A.A. Mamedov Linear inverse boundary value problem for equation of small transverse vibrations of a rod in the environment with resistance and integral condition of the first kind	296
G. Zanko Cash Management Using ODE-Based Modeling	300

Contents

A.M. Abrashkin. Solving differential equations with physics-informed machine learning	15
V.B. Abrashkina, V.K. Gorbunov. Construction of differentiable utility functions based on trade statistics	22
M.V. Averianov, M.V. Talanov. Application of differential equations in an adaptive control system for an asynchronous motor with neural network tuning of a BICH filter	28
N.N. Agarkova. On a Certain Boundary Value Problem in a Plane Excluding Axes ..	32
I.K. Andrianov, S.I. Feoktistov. Differential equation of the compatibility of Hencky strains in Euler coordinates	37
G.A. Ankilov, P.A. Velmisov. Study of dynamic stability of elastic air duct wall	40
M.A. Ankilov, A.S. Andreev. Estimation of the error of the Galerkin method in the study of the dynamics of an elastic plate	45
D.D. Artemiev, A.B. Duboi, S.I. Kucheryavyi, A.S. Safoshkin. Solution of Maxwell's integrodifferential equation and propagation of electromagnetic radiation in graphene structures	50
T.Y. Balabina, Yu.N. Deryugin. Application of multi-scale models in numerical flow study in a curved channel with porous body	53
M.A. Vasjutin, N.D. Kuzmichev. Equation of motion of the Abrikosov vortex in broad superconducting films	58
M.R. Veselov. A method for calculating two-dimensional equations Navier-Stokes on unstructured grids	61
Yu.V. Vybornova, P.A. Velmisov. Mathematical modeling of the dynamics of the mechanical system «pipeline – pressure sensor»	63
A.V. Gladun. On stabilizing of dynamics of the elastic structural element in supersonic flow	69
S.Yu. Glazov, N.E. Mescheryakova, I.A. Podgornaya. A quasiclassical method for calculating the current density of gap modifications of graphene in the presence of static and alternating electric fields	74
O.V. Gordeeva, V.E. Gordeev. On bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with quadratic homoclinic tangency to a nonhyperbolic fixed point	79
I.M. Gubaydullin, Yu.A. Poveshchenko, V.O. Podryga, R.M. Uzyanbayev, O.S. Yazovtseva.	

On an algorithm for the direct resolution of domain structures with an internal mortar boundary	82
I.V. Guselnikova. Solvability of the initial boundary value problem for the continuum transfer equation in the class of summable functions in a network-like domain	85
D.S. Evtina, A.P. Zhabko. Estimation of solutions of neutral type differential-difference systems with two incommensurate delays	91
A.S. Zharkova, A.V. Ankilov. Two methods based on the Fourier method for studying the dynamics of an elastic wall of a square channel	95
V.S. Zhigalov, A.P. Zhabko. Construction of program control for the differential-difference system with linearly increasing delay	101
A.S. Inshakova, O.S. Yazovtseva, I.M. Gubaydullin. Parallel algorithm for modeling an unsteady process in a catalyst layer	106
V.A. Koryakin, A.O. Kazakov. Numerical studies of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka system	111
O.S. Kostromina. Analysis of the dynamics of a two-dimensional Hindmarsh–Rose neuron model	114
O.S. Kostromina. On the conditions for the existence of degenerate resonance levels in pendulum equations under quasiperiodic nonconservative parametric perturbations ..	119
E.B. Kuznetsov, S.S. Leonov. Movement of an aggressive medium in a rod of circular cross-section	125
E.B. Kuznetsov, S.S. Leonov. On methods for determining the domains of absolute stability of the explicit Euler method for some classes of nonautonomous differential equations	129
N.D. Kuzmichev. Errors in the problem of reconstructing derivatives of a function from its harmonics	135
N.D. Kuzmichev. Approximation of the derivative of a function by Fourier coefficients	140
M.E. Ladonkina, Yu.A. Poveshchenko, H. Zhang. Entropy analysis of one completely conservative difference scheme with adaptive artificial viscosity for the numerical solution of gas dynamics problems in Euler variables	146
V.L. Leontiev. On orthogonal splines and their application in variational-grid methods for solving boundary value problems	150
V.V. Loginov, E.E. Peskova. The efficiency of parallel implementations of classical iterative methods for solving the Poisson equation in cylindrical coordinates.	154

I.V. Lutoshkin, A.G. Chekmarev. The parameterization method for solving optimal control problems with multicomponent control	159
S.I. Martynov. Model of two-phase fluid flow with non-uniform effective viscosity ...	163
U.J. Mizher, M.J. Mizher, P.M.Abrashkin , P.A. Velmisov. Mathematical modeling of the combined combustion process and analysis of the effect of different injection methods on combustion efficiency	170
N.D. Morozkin, V.V. Gallyamov, N.N. Morozkin. Features of Temperature-Field Distribution in a Porous Reservoir Containing Non-Newtonian (Abnormal) Oil	176
N.D. Morozkin, D.M. Kolonskikh. Mathematical modeling of TMJ stress in lateral occlusion	180
K.E. Morozov. On three-dimensional systems close to integrable ones	185
M.S. Mustaykin, E.E. Peskova. Parallel code for studying subsonic flows of a thermally conductive gas mixture	193
S.I. Mustafina, A.A. Kornilova, E.R. Gizzatova. On the application of genetic algorithms for approximating experimental data of paraffin thermal destruction	196
M.S. Nefedov, R.V. Zhalnin, S.H. Zinina. Research on the multigrid method for solving partial differential equations using the discontinuous Galerkin method	201
V.I. Nikonov. Application of algebraic-geometric properties of linear systems of differential equations to the study of partial stability	206
A.Yu. Perevaryukha. Modeling of aleatoric uncertainty phenomena in biosystems based on perturbed equations with delay	212
I.V. Perova. The task of optimizing the turbulent flows of multiphase media by itself is a similar carrier	217
V.N. Popov, O.V. Germider. Mathematical modeling of the diffusion process of a light component of a binary gas	221
V.V. Provotorov, M.A. Rybakov. Numerical-Analytical Treatment of Initial-Boundary Value Problems for Continuum Transport Equations in n -Dimensional Network-Structured Domains	225
S.F. Saifetdinov, T.F. Mamedova. Algorithm for investigating the dynamics of cardiovascular diseases	230
A.N. Sakharov. $SU(2)$ extensions of quasiperiodic flows	234
O.P. Stoyanovskaya. High-order multidimensional gradient operator in smoothed particle	

hydrodynamics	239
Yu.A. Tamarova. Research of mathematical models of pressure measurement system in gas-liquid environments	242
Yu.A. Tamarova. Numerical study of the dependence of the deflection of the sensor element of the pressure sensor on the system parameters	248
K.M. Urazova. Development of a physics-informed neural network for analyzing the stress state of soft biological tissues	254
I.N. Fedulov, S.Yu. Glazov. Small parameter method in problems of modeling the dynamics of nonlinear electromagnetic waves in 2D superstructures	259
B.L. Khashper, D.S. Yunusova, E.R. Gizzatova. Mathematical Modeling of Continuous Diene Polymerization Based on a System of Differential Equations	263
M.A. Chernova, T.F. Mamedova. Research into neural network models of the brain	269
A.V. Shamaev, D.N. Nikashkin, R.V. Kuryaev. Analysis of cursor motion stabilization algorithms for users with disabilities to develop a specialized computer mouse driver	274
P.A. Shamanaev. On the conditional stability of the zero solution of a nonlinear system under linear approximation	279
M.V. Shamolin. Invariants of homogeneous dynamical systems of arbitrary odd order with dissipation	281
O.M. Shilov, A.O. Kazakov. On different types of hyperbolic chaotic sets in the perturbed Anosov map	285
O.S. Yazovtseva, E.E. Peskova, I.V. Mitryukhin, A.A. Usmanova. Mathematical modeling of an unsteady process in a catalyst layer	288
V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Liouville Equation in a Half-Strip	292
V.L. Litvinov, K.V. Litvinova. On one solution of the problem of transverse oscillations of a beam with movable boundaries	294
Y.T. Mehraliyev, M.B. Mursalova, A.A. Mamedov. Linear inverse boundary value problem for equation of small transverse vibrations of a rod in the environment with resistance and integral condition of the first kind	296
G. Zanko. Cash Management Using ODE-Based Modeling	300

УДК 517.9

Решение дифференциальных уравнений с помощью физически информированного машинного обучения

Абрашкин А.М.

Ульяновский государственный университет

Аннотация: В статье рассматривается физически информированное машинное обучение (ФИМО) как новый подход к решению дифференциальных уравнений в частных производных на стыке классических численных методов и машинного обучения. Включение информации о физических законах в функцию потерь нейронных сетей позволяет успешно решать задачи даже при ограниченном объёме и зашумленности данных. Применение универсальных аппроксиматоров функций на облаках случайно выбранных точек позволяет обойти сложности расчётных сеток и гибко интегрировать экспериментальные данные. Описаны ограничения ФИМО, связанные с адвекцией, жёсткими граничными условиями и оптимизационными локальными минимумами, а также перспективы дальнейшего развития ФИМО в инженерии, физике и квантовых вычислениях.

Ключевые слова: машинное обучение, дифференциальные уравнения, частные производные.

1. Введение

Несмотря на значительный прогресс в моделировании мультифизических задач с помощью численной дискретизации дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), по-прежнему тяжело интегрировать зашумленные данные в существующие алгоритмы. Построение расчётных сеток требует значительных усилий, а решение задач высокой размерности с параметризованными ДУЧП часто оказывается недостижимым. Дополнительно, решение обратных задач, в которых физические процессы не полностью известны, сопряжено с высокими вычислительными затратами и необходимостью в альтернативных математических формулировках и сложных программных реализациях.

Методы машинного обучения предлагают перспективные подходы, однако обучение глубоких нейронных сетей требует больших объёмов данных, которые в научных задачах часто недоступны. Вместо этого такие модели можно обучать на основе дополнительной информации, полученной в результате применения физических законов (например, в случайных точках в непрерывной пространственно-временной области). Такое обучение с учётом физических законов объединяет зашумленные данные и математические модели и реализует их с помощью нейронных сетей.

Физически информированные нейронные сети (ФИНН), представляют собой тип универсальных аппроксиматоров функций (УАФ), которые могут использовать знания о любых физических законах, управляющих заданным набором данных, в процессе обучения и могут быть описаны уравнениями в частных производных. Недостаток данных для решения некоторых биологических и инженерных задач ограничивает эффективность традиционных моделей машинного обучения, используемых в этих областях [1]. Предварительные знания об общих физических законах при обучении нейронных сетей действуют как регуляризатор, ограничивающий пространство допу-

стимых решений и повышающий обобщающую способность аппроксимации функции. Таким образом, встраивание этой предварительной информации в нейронную сеть приводит к повышению информативности имеющихся данных, что помогает алгоритму обучения находить правильное решение и хорошо обобщать данные даже при небольшом количестве обучающих примеров.

2. Объединение математических моделей и данных

Применение дифференциальных уравнений с использованием традиционных численных методов представляется обоснованным и эффективным в случаях, когда объём данных ограничен, но имеется глубокое понимание физической природы исследуемого явления. Напротив, при наличии большого объёма данных и отсутствии явного математического описания системы, более подходящими оказываются методы машинного обучения, способные выявлять закономерности непосредственно из эмпирических наблюдений. На практике большинство проблем находятся где-то посередине: есть некоторые данные и частичное понимание базовой физики (Рис. 1).

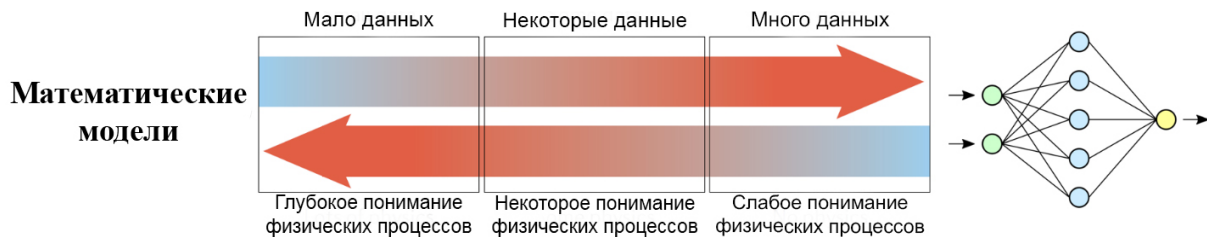


Рис. 1. Шкала перехода от физических моделей к моделям, основанным на данных.

Поэтому необходимо стремиться к разработке методов, подходящих для этой промежуточной ситуации. Проблема заключается в том, что данные наблюдений не могут быть включены в решатели численных методов или рабочие процессы простым способом. Это заставляет нас выбирать между подходами, основанными на первых принципах, и подходами, основанными на данных. Новая парадигма, известная как физически информированное машинное обучение (ФИМО), направлена на беспрепятственную интеграцию данных и математических моделей [2]. Этот новый подход может проложить путь к новым решателям, которые ставят уравнения и данные на одну ступень.

Основная задача машинного обучения — обучить интеллектуального агента делать точные предсказания. Первым шагом является введение функции потерь, измеряющей, насколько далеки прогнозы интеллектуального агента. Процесс обучения заключается в постепенной настройке параметров агента для улучшения его предсказаний. В стандартном машинном обучении функция потерь и обучение основаны на данных.

В ФИМО функция потерь и обучение помимо данных также учитывают физические законы, управляющие системой: сами дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия. Функции потерь ФИМО оценивают предсказания агента не только по тому, насколько они близки к данным, но и по тому, согласуются ли они с управляющими уравнениями (рис. 2). Это открывает новые привлекательные стратегии, в которых данные и динамика могут быть использованы взаимодополняющим образом.

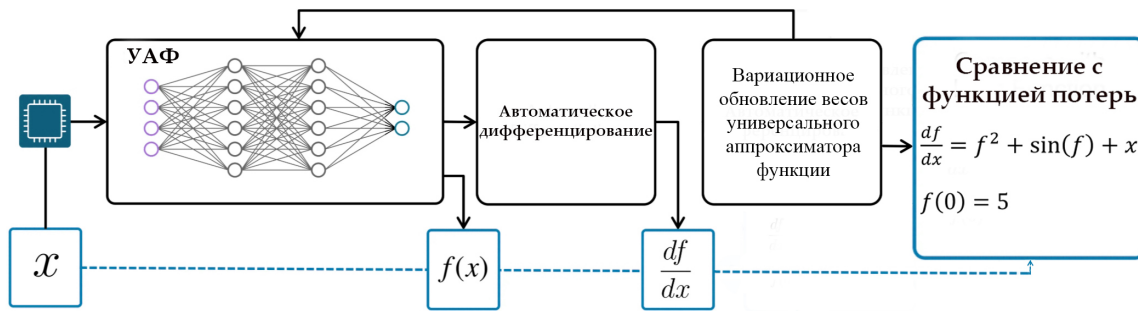


Рис. 2. Рабочий процесс ФИМО.

3. Универсальные аппроксиматоры функций

Основным компонентом метода ФИМО является универсальный аппроксиматор функции. Это параметризованная функция, которая может быть использована для аппроксимации или «подгонки» решения дифференциального уравнения: скорости жидкости, распределения температуры и т. д. По своей конструкции УАФ имеет обучаемые параметры, которые настраиваются в процессе обучения. УАФ должен удовлетворять двум требованиям. Во-первых, он должен обладать достаточной «выразительностью» или способностью аппроксимировать решение дифференциального уравнения. Во-вторых, необходимо иметь возможность эффективно вычислять скорости изменения УАФ в пространстве и времени, а также обучаемые параметры [3].

Существует множество вариантов УАФ, начиная от полиномов с настраиваемыми коэффициентами и заканчивая рядами Фурье. Сегодня наиболее популярными и известными УАФ являются глубокие искусственные нейронные сети, скорость изменения которых эффективно вычисляется с помощью автоматического дифференцирования.

Разработка ФИМО находится на начальном этапе, но оно уже открывает несколько интересных возможностей:

- Мультифизические задачи. Учитывая, что УАФ эффективно дифференцируются, ФИМО может легко включать в себя несколько дифференциальных уравнений, сложные граничные условия и условия сопряжения, что делает его пригодным для решения широкого спектра мультифизических задач.

- Не требуется сетка. УАФ не нужно оценивать на сложной сетке, как в методе конечных элементов (МКЭ); вместо этого достаточно облака точек, случайно взятых из выбранной области, а повторная выборка в течение процедуры оптимизации эффективно снижает риск переобучения УАФ.

- Экспериментальная обратная связь. В отличие от МКЭ, в ФИМО легко добавлять экспериментальные наблюдения за изучаемой физической системой. Эти наблюдения рассматриваются как известные точки данных и добавляются к функции потерь, тем самым напрямую повышая эффективность обучения.

- Цифровые двойники. После оптимизации УАФ на конкретной физической системе можно определить свойства аналогичной системы с другими геометрическими параметрами или граничными условиями без повторного выполнения всего моделирования. Это делает подход ФИМО подходящим для таких приложений, как проектирование изделий или цифровых двойников, где необходимо быстро оценить большое количество различных конфигураций одной и той же системы.

Наиболее привлекательной особенностью методов, основанных на ФИМО, является их потенциал для использования вычислительных преимуществ квантовых компьютеров. Недавно французский производитель квантовых процессоров PASQAL

продемонстрировал, как методы ФИМО могут быть легко перенесены в квантовую область, используя квантовую нейронную сеть в качестве УАФ [4].

4. Ограничения

С помощью ФИИН трудно аппроксимировать перемещение и разрывное поведение. Они не работают при решении дифференциальных уравнений с небольшим преобладанием адвекции, и, следовательно, асимптотическое поведение приводит к сбою метода. Такие ДУЧП можно решить с помощью масштабирования переменных [5]. Эту сложность в обучении ФИИН для ДУЧП с преобладанием адвекции можно объяснить колмогоровской n -шириной решения [6]. Они также не справляются с решением системы динамических систем и, следовательно, не подходят для решения хаотических уравнений [7]. Одна из причин, по которой обычные ФИИН не справляются с задачей, заключается в мягком ограничении граничных условий Дирихле и Неймана, что представляет собой многоцелевую задачу оптимизации, для решения которой необходимо вручную взвешивать слагаемые потерь [5]. В более общем смысле представление решения дифференциального уравнения в виде задачи оптимизации влечёт за собой все проблемы, с которыми сталкиваются в мире оптимизации, главная из которых – застревание в локальных оптимумах [5], [8].

Несмотря на существующие трудности, дальнейшее развитие ФИМО предвещает новые универсальные, гибкие и интерпретируемые инструменты для инженерии и науки.

Литература

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics Informed Deep Learning (Part I): Data driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/abs/1711.10561> (дата обращения: 11.07.2025).
2. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations [Электронный ресурс]. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0021999118307125> (дата обращения: 11.07.2025).
3. Voigtlaender F. The universal approximation theorem for complex valued neural networks [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/abs/2012.03351> (дата обращения: 11.07.2025).
4. Philip E., Dagrada M., Elfving V. The power of differentiable quantum circuits [Электронный ресурс]. URL: <https://www.pasqal.com/blog/the-power-of-differentiable-quantum-circuits/> (дата обращения: 11.07.2025).
5. Rout S. Numerical Approximation in CFD Problems Using Physics Informed Machine Learning [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/abs/2111.02987> (дата обращения: 11.07.2025).
6. Mojgani R., Balajewicz M., Hassanzadeh P. Lagrangian PINNs: A causality conforming solution to failure modes of physics informed neural networks [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/abs/2205.02902> (дата обращения: 11.07.2025).
7. Antonelo E. A., Camponogara E., Seman L. O., Jordanou J. P., Rehbein de Souza E., Hübner J. F. Physics informed neural nets

- for control of dynamical systems [Электронный ресурс]. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0925231224001905> (дата обращения: 11.07.2025).
8. Wang S., Teng Y., Perdikaris P. Understanding and mitigating gradient pathologies in physics informed neural networks [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/abs/2001.04536> (дата обращения: 11.07.2025).

MSC 68T99, 35A99

Solving differential equations with physics-informed machine learning

A.M. Abrashkin

Ulyanovsk State University

Abstract: The article discusses physics-informed machine learning (PIML) – a new approach to solving partial differential equations at the intersection of classical numerical methods and machine learning. Including information about physical laws in the loss function of neural networks allows us to successfully solve problems even with a limited volume and noisy data. The use of universal function approximators on clouds of randomly selected points allows us to bypass the complexities of computational grids and flexibly integrate experimental data. The limitations of PIML associated with advection, rigid boundary conditions, and optimization local minima are described, as well as prospects for further development of PIML in engineering, physics, and quantum computing.

Keywords: machine learning, differential equations, partial derivatives.

References

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics Informed Deep Learning (Part I): Data driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1711.10561> (accessed: 11.07.2025).
2. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0021999118307125> (accessed: 11.07.2025).
3. Voigtlaender F. The universal approximation theorem for complex valued neural networks [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2012.03351> (accessed: 11.07.2025).
4. Philip E., Dagrada M., Elfving V. The power of differentiable quantum circuits [Online]. Available: <https://www.pasqal.com/blog/the-power-of-differentiable-quantum-circuits/> (accessed: 11.07.2025).
5. Rout S. Numerical Approximation in CFD Problems Using Physics Informed Machine Learning [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2111.02987> (accessed: 11.07.2025).
6. Mojgani R., Balajewicz M., Hassanzadeh P. Lagrangian PINNs: A causality conforming solution to failure modes of physics informed neural networks [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2205.02902> (accessed: 11.07.2025).
7. Antonelo E. A., Camponogara E., Seman L. O., Jordanou J. P., Rehbein de Souza E., Hübner J. F. Physics informed neural nets for control of dynamical systems [Online]. Available:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0925231224001905>
(accessed: 11.07.2025).

8. Wang S., Teng Y., Perdikaris P. Understanding and mitigating gradient pathologies in physics informed neural networks [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2001.04536> (accessed: 11.07.2025).

УДК 519.63

Построение дифференцируемых функций полезности по торговой статистике

Абрашкина В.Б., Горбунов В.К.

Ульяновский государственный университет

Аннотация: Представлена проблема построения дифференцируемых функций рыночного спроса по торговой статистике цен и количеств продаж каждого (первично агрегированного) блага исследуемого рынка. Предложен параметрический метод наименьших квадратов для оценивания параметров функции полезности, рационализирующий искомый спрос по регрессионной системе, использующей числа Аффриата, полученные на первом этапе решением релаксированной системы неравенств Аффриата.

Ключевые слова: теория рыночного спроса, построение функций спроса, параметрический метод.

1. Введение

Современная неоклассическая экономическая теория [1, 2] построена в жёстких рамках методологического индивидуализма, основной принцип которого – представление сложных экономических явлений через действия элементарных агентов, которыми назначены потребители и фирмы, предполагаемые независимыми и рациональными. Нереальность этих предположений и иррациональность реального поведения, нередко спонтанного, очевидны. Эта теория (далее Economics), составляющая основу экономического образования и исследований в большинстве стран мира, содержит нормативную аксиоматическую теорию индивидуального спроса (ТИС), но не содержит научно обоснованной позитивной теории рыночного спроса – объекта реального интереса для производителей товаров и услуг конечного потребления (благ), торговли и администрации. Как следствие, в Economics не удалось построить обоснованные методы анализа рыночного спроса и построения «экономических» (аналитических) индексов спроса, отражающих потребительские предпочтения населения. Эти индексы, идея которых принадлежит А.А. Конюсу (1924), многие авторы считают естественной концептуальной основой теории потребительских индексов, но до настоящего времени они относятся лишь к индивидам или домашним хозяйствам [3, гл. 17-18]. Без позитивной теории рыночного спроса также невозможно построить теорию экономического равновесия, отражающую реальность и однозначно определяющую цены, учитывающие ресурсы, производственные возможности и потребительские предпочтения населения. Это снижает возможности формирования экономической политики, внутренней и внешней, адекватной национальным интересам.

Нерешённость базовых вопросов экономической теории и практики вызвала в последние три десятилетия множество критических работ относительно состояния Economics и её методологии. Однако конструктивного решения проблемы отсутствия в Economics реалистичной теории рыночного спроса (TRC) в известных работах других авторов не предложено. Такая теория построена в работах второго автора в рамках общенаучной методологии, определяющей принципы построения методов

исследования реальных объектов природы и общества с целью получения о них объективных и обоснованных логически и эмпирически знаний [4–6]. Формально, ТРС повторяет основные математические модели и факты неоклассической ТИС, но отнесённые не к искусственному объекту – индивиду, распределяющему свой доход (или бюджет) на покупку набора товаров и услуг, доставляющую ему некую «полезность», а к «статистическому ансамблю потребителей» исследуемого рынка.

Верификация ТРС происходит проверкой соответствия значений теоретического рыночного спроса фактическим значениям торговой статистики цен и количеств покупок различных благ, представляемых государственными статистическими органами (в России – Росстатом). Проверка заключается в построении функции спроса или функции полезности, порождающей функции спроса, наилучшим образом аппроксимирующих статистические данные. Современное состояние этой проблемы представлено в статьях [7, 8]. В этих и других работах развит непараметрический анализ спроса Африата–Вэриана [1, 2, 9], решающий вопрос о рационализированности данной статистики в наиболее общем классе функций предпочтения/полезности (ФП) – возрастающих и ненасыщаемых), а также определяющих числа Африата – значения рационализирующей ФП и множителя Лагранжа задачи максимизации ФП на множестве благ, доступных при данных ценах и совокупных потребительских расходах – показателей, наблюдаемых статистическими службами.

В реализованных в указанных работах методах рационализирующая ФП определяется как вогнутая кусочно-линейная функция. Этого достаточно для решения принципиального вопроса адекватности ТРС данной статистике и построению аналитических индексов (Конюса). Однако более глубокий анализ потребительских рынков основан на регулярной модели спроса, и данный доклад представляет новый подход к построению регулярной (однозначной непрерывно дифференцируемой) функции рыночного спроса и её матрицы Слуцкого, представляющей парные характеристики благ – замещение и (альтернативно) дополнение. При этом искомые функции спроса и полезности ищутся в параметрической форме с использованием чисел Африата, определяемых решением системы неравенств Африата. Этим преодолевается основной недостаток прямого параметрического метода построения функций по конечному набору статистических данных – невозможность определения наилучшего класса параметризации. В нашем случае получаемые с использованием чисел Африата функции спроса можно считать квазиоптимальными.

2. Построение дифференцируемых функций полезности по торговой статистике

1. Рассмотрим рынок n бесконечно делимых благ. Введём пространство благ E_+^n – неотрицательный ортант евклидова пространства E^n со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Классическая задача потребительского спроса заключается в максимизации непрерывной, возрастающей и квазивогнутой функции полезности $u(x)$ на множестве благ, доступных при данных ценах p и расходах (*expenditures*) e на данном рынке:

$$v(p, e) = \max \{u(x) : \langle p, x \rangle \leq e, \ x \geq 0\}. \quad (1)$$

Содержательное обоснование этой модели в рамках общенаучной методологии, формально совпадающей с неоклассической моделью индивидуального спроса [1, 2], дано в [5, 8].

Аналитическая теория потребительского спроса, продуктивная для углублённого анализа спроса, выводится в *регулярном случае*, где предполагается строгая квази-

вогнутость и дважды непрерывно дифференцируемость функции полезности $u(x)$. При этом задача (выпуклого программирования) (1) имеет при каждом наборе положительных параметров (p, e) единственное решение $x(p, e)$ – непрерывно дифференцируемую *функцию рыночного спроса*

$$x(p, e) = \arg \max \{u(x) : \langle p, x \rangle \leq e, \quad x \geq 0\}. \quad (2)$$

Для регулярного спроса $x(p, e; w)$ определена *матрица замещения Слуцкого*

$$s_{ij}(p, e) = \frac{\partial x_i(p, e)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, e)}{\partial e} x_j(p, e), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

позволяющая выполнить глубокий содержательный анализ спроса. Известно [5, Утв. 6.17], что матрица Слуцкого (3) отрицательно полуопределённая, симметричная и её нуль-пространство определяется вектором цен p . При этом диагональные элементы $s_{ii}(p, e) < 0$ и знаки внедиагональных элементов определяют экономические характеристики: пара благ i и j при $s_{ji}(p, e) > 0$ являются *заменителями*, и при $s_{ji}(p, e) < 0$ – *дополнителями*.

2. Конкретные рынки представляются *торговой статистикой*, под которой здесь понимается конечный набор цен $p^t \in E_+^n$ и количеств продаж $x^t \in E_+^n$ за отчётный период:

$$\{p^t, x^t : t = \overline{0, T}\}. \quad (4)$$

Эти данные определяют также потребительские расходы $e_t = \langle p^t, x^t \rangle$.

Существует два подхода к построению функций спроса. Первый – классический параметрический метод наименьших квадратов (МНК). Здесь функция спроса ищется в некотором параметрическом классе непрерывно дифференцируемых функций $x(p, e; w)$, рационализируемых известной функцией полезности $u(x; w)$. Здесь $w \in W$ – параметры функции и множество W определяется ограничениями, обеспечивающими свойства положительности, возрастания и квазивогнутости функции полезности.

Условия соответствия расчётного $x(p, e; w)$ и статистического $\{x^t : t = \overline{0, T}\}$ спросов в идеальном варианте представляются регрессионной системой

$$x(p^t, e_t; w) \simeq x^t, \quad t = \overline{0, T}. \quad (5)$$

Равенства (5) не выполняются точно по трём причинам: условность модели (2), ограничение области поиска классом функций $\{x(p, e; w)\}$, неточность статистических данных (4). Соответственно, наилучшие параметры w данного класса определяются методом наименьших квадратов, т.е. минимизацией функции квадратичной невязки

$$\varphi(w) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^n [x_i(p^t, e_t; w) - x_i^t]^2 \quad (6)$$

при условии $w \in W$.

3. Существенным недостатком классического варианта является невозможность нахождения наилучшего (оптимального) класса параметризации, обеспечивающего наименьшее (по классам параметризации) значение МНК невязки (6). Этого недостатка лишён непараметрический метод анализа потребительского спроса Африата-Вэриана. Опуская подробности, представленные в [5, 7, 8], отметим, что этот метод основан на решении некоторой системы линейных неравенств, определяющих значения «чисел Африата», т.е. значений функции полезности и множителя Лагранжа задачи (2):

$$u_t = u(x^t), \quad \lambda_t = \lambda(p^t, e_t), \quad t = \overline{0, T}, \quad (7)$$

с нормировкой $u_0 = e_0$, $\lambda_0 = 1$.

В этом методе получен условие критерий рационализируемости статистики (4) для наиболее широкого класса ФП – возрастающих и ненасыщаемых. Он заключается в положительной разрешимости системы неравенств Африата. Пусть построено такое решение $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{1, T}\}$. Тогда для искомой ФП параметрического класса $\{u(x; w)\}$ строится регрессионная система

$$u(x^t; \hat{w}) \simeq u_t, \quad \frac{1}{p_1^t} \frac{\partial u(x^t; w)}{\partial x_1} \simeq \lambda_t, \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{0, T}. \quad (8)$$

Для данной системы решается задача МНК – оценок параметров ФП w , аналогичная задачи МНК для функции спроса $x(p, e; w)$, рационализуемой функцией полезности $u(x; w)$. Естественно предположить, что использование непараметрического метода Африата-Вэриана должно улучшить МНК-оценки параметров.

Литература

1. Mas Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. New York: Oxford University Press, 1995. 981 p.
2. Бусыгин В. П., Желободько Е. В., Цыплаков А. А. Микроэкономика: третий уровень: в 2 т. Т. 1: учебник. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. 712 с.
3. Руководство по индексу потребительских цен: теория и практика. Вашингтон: Международный валютный фонд, 2007. 538 с.
4. Горбунов В. К. Математическая модель потребительского спроса: теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004. 320 с.
5. Горбунов В. К. Потребительский спрос: аналитическая теория и приложения. Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2015. 415 с. URL: <https://www.rfbr.ru/library/books/2641/>
6. Gorbunov V. Market demand: a holistic theory and its verification // Munich Personal RePEc Archive. 2021. Paper No. 109154. 35 p. URL: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/109154/>
7. Горбунов В. К., Львов А. Г. Анализ потребительского спроса в России: двухэтапное построение аналитических индексов // Вопросы статистики. 2022. Т. 29, № 4. С. 97-113. DOI: 10.34023/2313-6383-2022-29-4-97-113
8. Горбунов В. К., Львов А. Г. Проблема верификации теории рыночного спроса // Сибирский журнал индустриальной математики. 2024. Т. 27, № 2. С. 43-65. DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.204
9. Afriat S. N. The construction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. 1967. Vol. 8, no. 1. P. 67-77.
10. Varian H. The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. 1982. Vol. 50, no. 4. P. 945-973.
11. Varian H. Nonparametric tests of consumer behaviour // The Review of Economic Studies. 1983. Vol. 50. P. 99-110.

MSC 91B42

Construction of differentiable utility functions based on trade statistics

V.B. Abrashkina, V.K. Gorbunov

Ulyanovsk State University

Abstract: The problem of constructing differentiable functions of market demand based on trade statistics of prices and sales quantities of each (primary aggregated) good of the market under study is presented. A parametric least squares method is proposed for estimating the parameters of the utility function, which rationalizes the desired demand using a regression system and Afriate numbers obtained at the first stage by solving a relaxed system of Afriate inequalities.

Keywords: market demand theory, demand functions construction, parametric method.

References

1. Mas Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. New York: Oxford University Press, 1995. 981 p.
2. Busygin V. P., Zhelobodko E. V., Tsyplakov A. A. Mikroekonomika: tretii uroven': v 2 t. T. 1 [Microeconomics: third level: in 2 vols. Vol. 1]: textbook. Novosibirsk: Siberian Branch of Russian Academy of Sciences Publ., 2008. 712 p. (in Russian)
3. Rukovodstvo po indeksu potrebitel'skikh tsen: teoriya i praktika [Consumer price index manual: theory and practice]. Washington: International Monetary Fund, 2007. 538 p. (in Russian)
4. Gorbunov V. K. Matematicheskaya model' potrebitel'skogo sprosа: teoriya i prikladnoi potentsial [Mathematical model of consumer demand: theory and applications]. Moscow: Ekonomika, 2004. 320 p. (in Russian)
5. Gorbunov V. K. Potrebitel'skii spros: analiticheskaya teoriya i prilozheniya [Consumer demand: analytical theory and applications]. Ulyanovsk: Ulyanovsk State University, 2015. 415 p. URL: <https://www.rfbr.ru/library/books/2641/> (in Russian)
6. Gorbunov V. Market demand: a holistic theory and its verification // Munich Personal RePEc Archive. 2021. Paper No. 109154. 35 p. URL: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/109154/>
7. Gorbunov V. K., Lvov A. G. Analiz potrebitel'skogo sprosа v Rossii: dvukhetapnoe postroyeniye analiticheskikh indeksov [Analysis of consumer demand in Russia: two-stage construction of analytical indices] // Voprosy statistiki [Statistical Issues]. 2022. Vol. 29, no. 4. P. 97-113. DOI: 10.34023/2313-6383-2022-29-4-97-113 (in Russian)
8. Gorbunov V. K., Lvov A. G. Problema verifikatsii teorii rynochnogo sprosа [The problem of verification of market demand theory] // Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki [Siberian Journal of Industrial Mathematics]. 2024. Vol. 27, no. 2. P. 43-65. DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.204 (in Russian)

9. Afriat S. N. The construction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. 1967. Vol. 8, no. 1. P. 67-77.
10. Varian H. The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. 1982. Vol. 50, no. 4. P. 945-973.
11. Varian H. Nonparametric tests of consumer behaviour // The Review of Economic Studies. 1983. Vol. 50. P. 99-110.

УДК 621.313.333

Применение дифференциальных уравнений в адаптивной системе управления асинхронным двигателем с нейросетевой настройкой БИХ-фильтра

Аверьянов М.В., Таланов М.В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Трёхфазные асинхронные электроприводы широко применяются в промышленности и требуют сложной системы регулирования скорости и момента. Асинхронный электродвигатель описывается дифференциальными уравнениями электрического равновесия обмоток. Эти уравнения принято называть уравнениями обобщенной электрической машины. Классические регуляторы (например, ПИ-регуляторы с фиксированными коэффициентами) могут не обеспечивать требуемую точность при изменении параметров двигателя (таких как сопротивление обмоток или постоянная времени ротора) во время работы. Адаптивные алгоритмы управления с использованием нейросетей, автоматически перенастраивают параметры регуляторов, в нашем случае БИХ-фильтр, для компенсации таких изменений.

Ключевые слова: электропривод, алгоритм управления, БИХ-фильтр, математическая модель

1. Математическая модель двигателя

Уравнения векторной системы управления строятся на базе координатных преобразований Парка-Горева. Для этого необходимо записать уравнения асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором относительно тока статора и потокосцепления ротора в синхронной ортогональной системе координат (d, q) , ориентированной по вектору потокосцепления ротора [1]:

$$\sigma L_s \frac{dI_d}{dt} = -R_s I_d + U_d + \sigma L_s \omega_\psi I_q - \frac{L_m}{L_r} \frac{d\Psi_r}{dt}, \quad (1)$$

$$\sigma L_s \frac{dI_q}{dt} = -R_s I_q + U_q - \sigma L_s \omega_\psi I_d - \frac{L_m}{L_r} \omega_\psi \Psi_r, \quad (2)$$

$$T_r \frac{d\Psi_r}{dt} = -\Psi_r + L_m I_d, \quad (3)$$

$$\omega_\psi = \omega + \omega_s = \omega + \frac{L_m}{T_r} \cdot \frac{I_q}{\Psi_r}, \quad (4)$$

$$M = \frac{3}{2} Z_p \cdot \frac{L_m}{L_r} \Psi_r I_q, \quad (5)$$

где R_s, R_r – активные сопротивления фаз статора и ротора; L_s, L_r, L_m – индуктивности фаз статора, ротора и взаимная индуктивность; $\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$ – коэффициент рассеяния; $T_r = \frac{L_r}{R_r}$ – постоянная времени роторной цепи; U_d, U_q, I_d, I_q – проекции векторов напряжения и тока статора на оси d и q ; ω_ψ – частота вращения вектора

потокосцепления ротора; $\omega = Z_p \omega_r$ – электрическая частота вращения ротора; ω_s – частота скольжения; Z_p – число пар полюсов; Ψ_r – потокосцепление ротора.

При этом система дифференциальных уравнений асинхронного электродвигателя, записанная по току статора и потокосцеплению ротора в неподвижной системе координат (α, β) , имеет вид [2]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{K_s} & 0 & \frac{L_m}{L_{\sigma s} L_r T_r} & \frac{\omega_r L_m}{L_{\sigma s} L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{K_s} & -\frac{\omega_r L_m}{L_{\sigma s} L_r} & \frac{L_m}{L_{\sigma s} L_r T_r} & 0 \\ \frac{L_m}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & -\omega_r & 0 \\ 0 & \frac{L_m}{T_r} & \omega_r & -\frac{1}{T_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{\sigma s}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{\sigma s}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix}$$

Обозначения, используемые в системе уравнений:

- $u_{s\alpha}, u_{s\beta}$ – проекции фазных напряжений обмоток статора в неподвижной системе координат (α, β) ;
- $i_{s\alpha}, i_{s\beta}$ – проекции токов в обмотках статора в неподвижной системе координат (α, β) ;
- $\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$ – проекции потокосцепления ротора в неподвижной системе координат (α, β) ;
- ω_r – угловая скорость вращения ротора;
- $L_{\sigma s} = \sigma L_s$ – переходная индуктивность статора;
- L_s, L_r, L_m – индуктивности обмоток статора, ротора и намагничивания (взаимная индуктивность);
- $T_r = \frac{L_r}{R_r}$ – постоянная времени роторной цепи.

Эти системы дифференциальных уравнений являются базой разработки алгоритма управления, поскольку на их основе рассчитываются управляющие воздействия для обеспечения требуемой динамики двигателя.

В векторном управлении система управления стремится отдельно регулировать поток и момент двигателя, управляя составляющими тока I_d и I_q . В адаптивной схеме используется эталонная модель желаемого поведения, а закон управления корректируется по ошибке между фактическими и заданными величинами. При этом выполняется процедура автонастройки: нейросетевой алгоритм периодически уточняет оценку параметров двигателя и пересчитывает весовые коэффициенты, обеспечивая стабильную работу при изменении условий (нагрузки, параметров модели) [3].

В цифровой системе управления измеренные сигналы (скорость, токи) часто пропускаются через цифровые фильтры. БИХ-фильтр (с бесконечным импульсным откликом) описывается рекурсивными уравнениями и при том же числе коэффициентов даёт более «крутой» частотный отклик, чем КИХ-фильтр [4]. В адаптивном управлении фильтр может сглаживать шумы или предварительно формировать сигнал управления. Выходной сигнал фильтра сравнивается с эталонным, а нейронная сеть получает разность (ошибку) на вход и обновляет коэффициенты БИХ-фильтра (например, по правилу градиентного спуска или по методу наименьших квадратов) для уменьшения ошибки в дальнейших итерациях.

Идея реализации алгоритма управления заключается в следующем. По измеренным напряжениям и токам на основе дифференциальных уравнений рассчитываются

текущие потокосцепления ротора и момент двигателя. Далее по заданной опорной скорости или моменту и оценённым потокам оценивается необходимая величина тока по осям d и q . По этим величинам тока вычисляются опорные напряжения статора с учётом компенсации перекрёстных связей. Измеренные сигналы (ток, скорость) проходят через адаптивный БИХ-фильтр для подавления шумов и выделения динамической составляющей. Разность между требуемым и фактическим значением (ошибка) поступает на вход нейронной сети. Сеть корректирует свои веса, изменяя коэффициенты фильтра, чтобы снизить ошибку в следующих итерациях.

2. Заключение

Модель двигателя на основе дифференциальных уравнений обеспечивает точное описание динамики электропривода. Использование БИХ-фильтра в контуре управления улучшает качество сигналов и устойчивость к помехам. Нейросетевая настройка фильтра добавляет адаптивность: сеть «учится» компенсировать погрешности модели и возмущения в реальном времени, обеспечивая более быстрый выход в установившийся режим и меньшую статическую ошибку по сравнению с системами с фиксированными регуляторами [5].

Литература

1. Ковач К. П., Рац И. Переходные процессы в машинах переменного тока. Москва: Госэнергоиздат, 1963. 744 с.
2. Таланов М. В., Таланов В. М. Регрессионная модель для идентификации электрических параметров асинхронного электродвигателя в бездатчиковых системах управления электроприводом // Научно-технический вестник Поволжья. 2022. № 4. С. 30-33. Казань: ООО «Рашин Сайнс».
3. Виноградов А. Б., Чистосердов В. Л., Сибирцев А. Н. Адаптивная система векторного управления асинхронным электроприводом // Электротехника. 2003. № 7. С. 7-17.
4. Ahmed A. H. O., Ajangnay M. O., Mohamed S. A., Dunnigan M. W. A New Technique for Position Control of Induction Motor Using Adaptive Inverse Control // Proceedings of the 1st International Conference on Energy, Power and Control (EPC-IQ01). Basrah, Iraq: Heriot-Watt University Press, 2010. P. 116-122.
5. Kady Benyekhlef, Mourad Hebali, Ibrahim Farouk Bouguenna, Benaoumeur Ibari, Menouer Bennaoum. High-Performance Inverse Artificial Neural Network Controller for Asynchronous Motor Control // Journal of Engineering and Exact Sciences. 2024. Vol. 10, No. 9. eISSN 2527-1075; ISSN 2446-9416. [Электронный ресурс].

MSC 93C85

Application of differential equations in an adaptive control system for an asynchronous motor with neural network tuning of a BICH filter

M.V. Averianov, M.V. Talanov

National Research Mordovia State University

Abstract: Three-phase asynchronous electric drives are widely used in industry and require a complex speed and torque control system. An asynchronous electric motor is described by differential equations of electrical equilibrium of windings. These equations are commonly referred to as generalised electric machine equations. Classic controllers (e.g., PI controllers with fixed coefficients) may not provide the required accuracy when motor parameters (such as winding resistance or rotor time constant) change during operation. Adaptive control algorithms using neural networks automatically reconfigure the parameters of the controllers, in our case the BICH filter, to compensate for such changes.

Keywords: electric drive, control algorithm, IIR-filter, mathematical model

References

1. Kovach K. P., Rats I. *Perekhodnye protsessy v mashinakh peremennogo toka* [Transient processes in AC machines]. Moscow: Gosenergoizdat, 1963. 744 p. (in Russian)
2. Talanov M. V., Talanov V. M. Regressionnaya model' dlya identifikatsii elektricheskikh parametrov asinkhronnogo elektrodvigatelya v bezdatchikovykh sistemakh upravleniya elektroprivodom [Regression model for identification of electrical parameters of induction motor in sensorless electric drive control systems] // *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ya* [Scientific and Technical Bulletin of the Volga Region]. 2022. No. 4. P. 30-33. Kazan: "Rashin Science" LLC. (in Russian)
3. Vinogradov A. B., Chistoserdob V. L., Sibirtsev A. N. Adaptivnaya sistema vektornogo upravleniya asinkhronnym elektroprivodom [Adaptive vector control system for induction motor drive] // *Elektrotehnika* [Electrical Engineering]. 2003. No. 7. P. 7-17. (in Russian)
4. Ahmed A. H. O., Ajangnay M. O., Mohamed S. A., Dunnigan M. W. A New Technique for Position Control of Induction Motor Using Adaptive Inverse Control // *Proceedings of the 1st International Conference on Energy, Power and Control (EPC-IQ01)*. Basrah, Iraq: Heriot-Watt University Press, 2010. P. 116-122.
5. Kady Benyekhle, Mourad Hebali, Ibrahim Farouk Bouguenna, Benaoumeur Ibari, Menouer Bennaoum. High-Performance Inverse Artificial Neural Network Controller for Asynchronous Motor Control // *Journal of Engineering and Exact Sciences*. 2024. Vol. 10, No. 9. eISSN 2527-1075; ISSN 2446-9416. [Online resource].

УДК 519.63

Об одной краевой задаче на плоскости

Агаркова Н.Н.

Белгородский государственный научный исследовательский институт

Аннотация: Рассматривается краевая задача с условиями Дирихле и Неймана для модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения на плоскости с разрезами вдоль координатных осей. Решение ищется в пространстве Соболева–Слободецкого. Используя специальную волновую факторизацию эллиптического символа краевая задача сводится к эквивалентной системе линейных интегральных уравнений.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, краевая задача, плоскость с разрезами.

1. Постановка задачи

Мы изучаем разрешимость эллиптических псевдодифференциальных уравнений

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in D, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} u|_{x_1=0-} - u|_{x_1=0+} = f_1(x_2), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=0-} - \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=0+} = g_1(x_2), \\ u|_{x_2=0-} - u|_{x_2=0+} = f_2(x_1), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2=0-} - \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2=0+} = g_2(x_1), \end{cases} \quad (2)$$

в пространстве $H^s(D)$, где $D \subset \mathbb{R}^2$ – плоская область вида $D = \cup_{j=1}^4 K_j$, $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$, $K_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 < 0, x_2 > 0\}$, $K_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 < 0, x_2 < 0\}$, $K_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 < 0\}$, A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$. Этот оператор в области D определяется формулой

$$(Au)(x) = \int_D \int_{\mathbb{R}^2} A(\xi) u(y) e^{i(y-x) \cdot \xi} dy d\xi, \quad x \in D.$$

Мы рассматриваем символ $A(\xi)$, удовлетворяющий условию

$$c_1 < |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| < c_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad c_1, c_2 > 0,$$

число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется порядком оператора A .

Оператор A является линейным ограничением оператора, действующим в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^m)$ [1].

Пространство $H^s(D)$ состоит из функций пространства $H^s(\mathbb{R}^2)$ с носителями в $\overline{D}$. Норма в пространстве $H^s(D)$ индуцируется нормой пространства $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Решение задачи (1), (4) предполагает решение следующих четырех уравнений

$$(Au_j)(x) = 0, \quad x \in K_j, \quad (3)$$

с граничными условиями (4). Решением уравнения (2) является сумма слагаемых

$$u = \sum_{j=1}^4 u_j,$$

таких, что $u_j \in H^s(K_j)$, $j = \overline{1, 4}$. Каждый образ Фурье $\tilde{u}_j \in \tilde{H}^s(K_j)$ является граничным значением аналитической функции в радиальной трубчатой области $T(K_j)$ над K_j [3].

Ключевую роль в построении решения играет понятие волновой факторизации эллиптического символа [6], которая предполагает представление символа в виде произведения двух сомножителей, допускающих аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области над соответствующими квадрантами и удовлетворяющих определенным оценкам (индекс волновой факторизации).

Обозначим волновую факторизацию символа $A(\xi)$ относительно K_1, K_2 следующим образом

$$A(\xi) = A_{n,\neq}(\xi) \cdot A_{n,=}(\xi), \quad n = 1, 2.$$

2. Исследование краевой задачи

Введем следующие обозначения

$$A_{1,\neq}^{-1}(\xi) \equiv L(\xi), \quad A_{2,\neq}^{-1}(\xi) \equiv M(\xi), \quad A_{1,=}^{-1}(\xi) \equiv P(\xi), \quad A_{2,=}^{-1}(\xi) \equiv Q(\xi),$$

и далее

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) d\xi_1 &= l_1(\xi_2), & \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) d\xi_2 &= l_2(\xi_1), & \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 L(\xi) d\xi_1 &= l_3(\xi_2), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} p\xi_2 L(\xi) d\xi_2 &= l_4(\xi_1), & \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) d\xi_1 &= m_1(\xi_2), & \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) d\xi_2 &= m_2(\xi_1), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 M(\xi) d\xi_1 &= m_3(\xi_2), & \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 M(\xi) d\xi_2 &= m_4(\xi_1), & \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi) d\xi_1 &= p_1(\xi_2), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi) d\xi_2 &= p_2(\xi_1), & \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 P(\xi) d\xi_1 &= p_3(\xi_2), & \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 P(\xi) d\xi_2 &= p_4(\xi_1), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi) d\xi_1 &= q_1(\xi_2), & \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi) d\xi_2 &= q_2(\xi_1), \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 Q(\xi) d\xi_1 = q_3(\xi_2), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 Q(\xi) d\xi_2 = q_4(\xi_1).$$

Записываем следующую систему линейных интегральных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) \tilde{a}_1(\xi_1) d\xi_1 + m_1(\xi_2) \tilde{b}_1(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) \tilde{a}_0(\xi_1) d\xi_1 - l_1(\xi_2) \tilde{b}_0(\xi_2) = \tilde{f}_{11}(\xi_2), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi) \tilde{c}_0(\xi_1) d\xi_1 + p_1(\xi_2) \tilde{d}_0(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi) \tilde{c}_1(\xi_1) d\xi_1 - q_1(\xi_2) \tilde{d}_1(\xi_2) = \tilde{f}_{12}(\xi_2), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 M_{2,\neq}^{-1}(\xi) \tilde{a}_1(\xi_1) d\xi_1 + m_3(\xi_2) \tilde{b}_1(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 L(\xi) \tilde{a}_0(\xi_1) d\xi_1 - l_3(\xi_2) \tilde{b}_0(\xi_2) = \tilde{g}_{11}(\xi_2), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 P(\xi) \tilde{c}_0(\xi_1) d\xi_1 + p_3(\xi_2) \tilde{d}_0(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 Q(\xi) \tilde{c}_1(\xi_1) d\xi_1 - q_3(\xi_2) \tilde{d}_1(\xi_2) = \tilde{g}_{12}(\xi_2), \\ q_2(\xi_1) \tilde{c}_1(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi) \tilde{d}_1(\xi_2) d\xi_2 - l_2(\xi_1) \tilde{a}_0(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) \tilde{b}_0(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{f}_{21}(\xi_1), \\ p_3(\xi_1) \tilde{c}_0(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi) \tilde{d}_0(\xi_2) d\xi_2 - m_3(\xi_1) \tilde{a}_1(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) \tilde{b}_1(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{f}_{22}(\xi_1), \\ q_4(\xi_1) \tilde{c}_1(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 Q(\xi) \tilde{d}_1(\xi_2) d\xi_2 - l_4(\xi_1) \tilde{a}_0(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 L(\xi) \tilde{b}_0(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{g}_{21}(\xi_1), \\ p_4(\xi_1) \tilde{c}_0(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 P(\xi) \tilde{d}_0(\xi_2) d\xi_2 - m_4(\xi_1) \tilde{a}_1(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 M(\xi) \tilde{b}_1(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{g}_{22}(\xi_1). \end{array} \right. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть $s > \frac{3}{2}$ и символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию по отношению к K_j с индексами $\varkappa_j$ такими, что $s + \frac{1}{2} < \varkappa_j < s + \frac{3}{2}$, $j = 1, 2$, $f_1, f_2 \in H^{s-1/2}(\mathbb{R})$, $g_1, g_2 \in H^{s-3/2}(\mathbb{R})$. Тогда однозначная разрешимость в пространстве $\sum_{j=1}^4 \oplus H^s(K_j)$ задачи (4), (2) эквивалентна однозначной разрешимости системы линейных интегральных уравнений (5) относительно неизвестных функций $\tilde{a}_0, \tilde{b}_0, \tilde{c}_0, \tilde{d}_0 \in \tilde{H}^{s-\varkappa_1+1/2}(\mathbb{R})$, $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{c}_1, \tilde{d}_1 \in \tilde{H}^{s-\varkappa_2+1/2}(\mathbb{R})$.

3. Заключение

В работе рассмотрены достаточно простые граничные условия. Это связано со значениями индексов $\varkappa_j$, $j = 1, 2$. Для других значений $\varkappa$ можно рассматривать более общие граничные условия. Более сложные постановки будут рассмотрены в дальнейших работах.

Литература

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 236 с.
2. Vasil'ev V. B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 320 p.

3. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 412 с.

MSC 35515

On a Certain Boundary Value Problem in a Plane Excluding Axes

N.N. Agarkova

Belgorod State Scientific Research Institute

Abstract: A boundary value problem with Dirichlet and Neumann conditions for a model elliptic pseudodifferential equation on a plane with sections along the coordinate axes is considered. The solution is sought in the Sobolev-Slobodetsky space. Using a special wave factorization of the elliptic symbol, the boundary value problem is reduced to an equivalent system of linear integral equations.

Keywords: pseudo-differential equation, boundary value problem, plane with cuts.

References

1. Eskin G. I. Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh psevdodifferentsial'nykh uravnenii [Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations]. Moscow: Nauka, 1973. 236 p. (in Russian)
2. Vasil'ev V. B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 320 p.
3. Vladimirov V. S. Metody teorii funktsii mnogikh kompleksnykh peremennykh [Methods of the theory of functions of many complex variables]. Moscow: Nauka, 1964. 412 p. (in Russian)

УДК 539.3

Дифференциальное уравнение совместности деформаций Генки в координатах Эйлера*

Андрианов И.К., Феоктистов С.И.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

Аннотация: В исследовании рассмотрена проблема несогласованности координат, в которых записаны дифференциальные уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций для плоской осесимметричной задачи упругопластического деформирования оболочек.

Ключевые слова: деформация Генки, координаты Эйлера, дифференциальное уравнение совместности деформаций, осесимметричные оболочки.

При проведении математической постановки задачи упругопластического деформирования осесимметричных оболочек основными уравнениями являются дифференциальные уравнения равновесия, физические соотношения, дифференциальные уравнения совместности деформаций и др. Дифференциальное уравнение совместности деформаций представляется одним из фундаментальных в механике деформируемого твердого тела, поскольку отражает условие неразрывности среды в процессе деформирования. При этом важным представляется согласованность координат, в которых записываются дифференциальные уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций. Для малых упругопластических деформаций в цилиндрической системе координат плоской осесимметричной задачи дифференциальное уравнение совместности относительных деформаций имеет вид:

$$\frac{d\varepsilon_{\theta\theta}}{d\rho} = \frac{\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\rho\rho}}{\rho},$$

где $\varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{\rho\rho}$ – относительные окружная и радиальная деформации, ρ – радиальная координата.

Данное уравнение записано в координатах Лагранжа и, в соответствии с работами [1, 2], не согласовано с дифференциальным уравнением равновесия для плоской осесимметричной задачи, записанным в координатах Эйлера. Кроме того, здесь используются относительные деформации, применяемые в качестве меры малых деформаций. Для учета больших деформаций при решении упругопластических задач в главных осях широко применяется деформация Генки. Мера деформаций Генки является нелинейной, обладает свойством аддитивности и может быть использована при описании больших деформаций в главных осях. В работе [3] было представлено дифференциальное уравнение совместности деформаций Генки, но оно записано в координатах Лагранжа. Для устранения противоречий координат и учета больших деформаций согласно работе [2] было представлено дифференциальное уравнение совместности деформаций Генки, записанное в координатах Эйлера:

$$\frac{de_{\theta\theta}}{d\rho} = \frac{1 - \exp(e_{\theta\theta} - e_{\rho\rho})}{\rho},$$

*Исследование выполнено за счет гранта РНФ N 25-79-10135 «Разработка моделей гидравлического автофреттирования осесимметричных оболочек с учетом деформационной анизотропии и вторичных пластических деформаций».

где $e_{\rho\rho} = \ln \frac{d\rho}{d\overset{\circ}{\rho}}$, $e_{\theta\theta} = \ln \frac{\rho}{\overset{\circ}{\rho}}$ – радиальная и окружная деформации Генки, $\overset{\circ}{\rho}$, ρ – радиальные координаты в отсчетной и актуальной системах координат.

Литература

1. Смирнов-Аляев Г. А., Розенберг В. М. Теория пластических деформаций металлов. Механика конечного формоизменения. Ленинград: Машгиз, 1956. 367 с.
2. Феоктистов С. И., Андрианов И. К. Уравнения совместности логарифмических деформаций в координатах Эйлера для решения осесимметричных процессов обработки металлов давлением // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2021. № 7 (55). С. 26-30. DOI: 10.17084/20764359-2021-55-26.
3. Durban D., Kubi M. A General Solution for the Pressurized Elastoplastic Tube // Journal of Applied Mechanics. 1992. Vol. 59, no. 1. P. 20-26. DOI: 10.1115/1.2899431.

MSC 74K25

Differential equation of the compatibility of Hencky strains in Euler coordinates

I.K. Andrianov, S.I. Feoktistov

Komsomolsk-na-Amure State University

Abstract: The study considers the problem of coordinate inconsistency, in which differential equations of equilibrium and equations of joint deformations for the plane axisymmetric problem of elastic plastic deformation of shells are written.

Keywords: Hencky strain, Euler coordinates, equation of compatibility of strains, axisymmetric shells

References

1. Smirnov-Alyayev G. A., Rosenberg V. M. Teoriya plasticheskikh deformatsiy metallov. Mekhanika konechnogo formoizmeneniya [Theory of plastic deformations of metals. Mechanics of finite forming]. Leningrad: Mashgiz, 1956. 367 p. (in Russian)
2. Feoktistov S. I., Andrianov I. K. Uravneniya sovmestnosti logarifmicheskikh deformatsiy v koordinatakh Eylera dlya resheniya osesimmetrichnykh protsessov obrabotki metallov davleniem [Compatibility equations of logarithmic deformations in Euler coordinates for solving axisymmetric metal forming processes] // Uchenye zapiski Komsomolskogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2021. No. 7 (55). P. 26-30. DOI: 10.17084/20764359-2021-55-26. (in Russian)
3. Durban D., Kubi M. A General Solution for the Pressurized Elastoplastic Tube // Journal of Applied Mechanics. 1992. Vol. 59, no. 1. P. 20-26. DOI: 10.1115/1.2899431.

УДК 517.9:539.3:532.5

Исследование динамической устойчивости упругой стенки воздуховода

Анкилов Г.А., Вельмисов П.А.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: На основе построенной трехмерной математической модели, описываемой системой дифференциальных уравнений в частных производных, в работе исследуется динамическая устойчивость упругой стенки воздуховода, через который подается поток газа. Для исследования устойчивости решений соответствующих начально-краевых задач аэрогидроупругости построены функционалы в моделях сжимаемой и несжимаемой среды. На основе свойств этих функционалов получены условия устойчивости и произведена оценка влияния сжимаемости потока газа на размеры областей устойчивости для конкретных параметров механической системы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, динамическая устойчивость, аэрогидроупругость, воздуховод, упругая пластина, функционал.

1. Постановка задачи

Рассматривается математическая модель движения газа в воздуховоде (рис. 1)

$$J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < l, 0 < y < h, 0 < z < h\}$$

с одной упругой стенкой при $y = 0$. Остальные стенки при $y = h$, $z = 0$, $z = h$ считаются недеформируемыми.

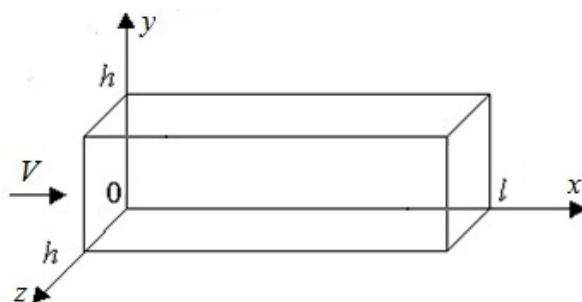


Рис. 1. Модель воздуховода квадратного сечения

В модели сжимаемой среды потенциал скорости возмущенного потока газа $\phi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \phi_{tt}(x, y, z, t) + 2V\phi_{xt}(x, y, z, t) + V^2\phi_{xx}(x, y, z, t) = \\ = a^2(\phi_{xx}(x, y, z, t) + \phi_{yy}(x, y, z, t) + \phi_{zz}(x, y, z, t)), \quad (x, y, z) \in J. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем индексы снизу обозначают частные производные по соответствующим переменным.

В модели несжимаемой среды потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\phi_{xx}(x, y, z, t) + \phi_{yy}(x, y, z, t) + \phi_{zz}(x, y, z, t) = 0, \quad (x, y, z) \in J. \quad (2)$$

С учетом аэрогидродинамического воздействия запишем линейное уравнение, описывающее прогиб $w(x, z, t)$ упругой пластины:

$$\begin{aligned} Mw_{tt}(x, z, t) + D(w_{xxxx}(x, z, t) + 2w_{xxzz}(x, z, t) + w_{zzzz}(x, z, t)) + \\ + \beta_2(w_{xxxxt}(x, z, t) + 2w_{xxzzt}(x, z, t) + w_{zzzzt}(x, z, t)) + N_{(x)}w_{xx}(x, z, t) + \\ + N_{(z)}w_{zz}(x, z, t) + \beta_1w_t(x, z, t) + \beta_0w(x, z, t) = \rho(\phi_t(x, 0, z, t) + V\phi_x(x, 0, z, t)), \\ (x, z) \in T_1 = \{(x, z) \in R^2 : 0 < x < l, 0 < z < h\}. \end{aligned} \quad (3)$$

где $M, D, \beta_0, \beta_1, \beta_2, N_{(x)}, N_{(z)}$ – постоянные коэффициенты, описывающие физические параметры пластины.

Из условий непротекания газа через стенки воздуховода получим граничные условия

$$\phi_y(x, h, z, t) = 0, \quad (x, z) \in T_1; \quad (4)$$

$$\phi_y(x, 0, z, t) = w_t(x, z, t) + Vw_x(x, z, t), \quad (x, z) \in T_1; \quad (5)$$

$$\phi_z(x, y, 0, t) = 0, \quad \phi_z(x, y, h, t) = 0, \quad (x, y) \in T_2 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < l, 0 < y < h\}. \quad (6)$$

Пусть на входе и выходе из воздуховода задан закон изменения потенциала скорости газа, тогда граничные условия примут вид

$$\phi(0, y, z, t) = 0, \quad \phi(l, y, z, t) = 0, \quad (y, z) \in T_3 = \{(y, z) \in R^2 : 0 < y < h, 0 < z < h\}. \quad (7)$$

В случае жесткого закрепления краев пластины $x = 0, x = l, z = 0, z = h$ граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} w(0, z, t) = 0, \quad w_x(0, z, t) = 0, \quad w(l, z, t) = 0, \quad w_x(l, z, t) = 0, \\ w(x, 0, t) = 0, \quad w_z(x, 0, t) = 0, \quad w(x, h, t) = 0, \quad w_z(x, h, t) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

2. Исследование устойчивости для сжимаемой среды

Произведено обобщение результатов, полученных в [1] для плоских моделей, и построен функционал для трехмерной модели (1), (3)-(8):

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \iiint_J (\phi_t^2 + (a^2 - V^2)\phi_x^2 + a^2\phi_y^2 + a^2\phi_z^2) dx dy dz + \\ + 2a^2V \iint_{T_1} \phi(x, 0, z, t)w_x(x, z, t) dx dz + \\ + \frac{a^2}{\rho} \iint_{T_1} (Mw_t^2 + Dw_{xx}^2 + 2Dw_{xz}^2 + Dw_{zz}^2 - N_{(x)}w_x^2 - N_{(z)}w_z^2 + \beta_0w^2) dx dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Доказано, что при выполнении условий

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad V < a \quad (10)$$

для задачи (1), (3)-(8) функционал имеет неположительную производную $\dot{\Phi}(t) \leq 0$, а, следовательно, справедливо неравенство

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (11)$$

Получим условия неотрицательности самого функционала $\Phi(t) \geq 0$. Для этого, используя неравенства Релея и Коши-Буняковского, получим оценку

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iiint_J \left(\phi_t^2(x, y, z, t) + \frac{\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) + 8a^2 l^2}{4h^2 l^2} \phi^2(x, y, z, t) - \right. \\ & - \frac{4a^2}{h^2} \phi(x, y, z, t) \phi(x, 0, z, t) + \frac{2a^2}{h^2} \phi^2(x, 0, z, t) + \frac{2a^2 V}{h} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) + \\ & + \frac{a^2}{\rho h} \left(\frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - N_{(x)} \right) w_x^2(x, z, t) \Big) dx dy dz + \\ & + \frac{a^2}{\rho} \iint_{T_1} \left(\frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2} - N_{(z)} \right) w_z^2(x, z, t) dx dz. \quad (12) \end{aligned}$$

Пусть выполняются условия

$$N_{(x)} < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2}, \quad N_{(z)} \leq \frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2}. \quad (13)$$

Тогда условие неотрицательности квадратичной формы относительно $\phi(x, y, z, t)$, $\phi(x, 0, z, t)$, $w_x(x, z, t)$ в (12) примет вид:

$$\begin{aligned} 2\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) (\pi^2 D (4h^2 + l^2) - h^2 l^2 N_{(x)}) - \\ - V^2 h^3 l^2 \rho (\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) + 8a^2 l^2) > 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Согласно (11), (12) доказана теорема.

Теорема 1. Решение $w(x, z, t)$ задачи (1), (3)-(8) устойчиво, а решение $\phi(x, y, z, t)$ и частные производные $\phi_t(x, y, z, t)$, $w_x(x, z, t)$, $w_z(x, z, t)$ устойчивы в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных при выполнении условий (10), (13), (14).

3. Исследование устойчивости для несжимаемой среды

Для задачи (2)-(8) построен функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iiint_J (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) dx dy dz + 2V \iint_{T_1} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) dx dz + \\ & + \frac{1}{\rho} \iint_{T_1} (M w_t^2 + D w_{xx}^2 + 2D w_{xz}^2 + D w_{zz}^2 - N_{(x)} w_x^2 - N_{(z)} w_z^2 + \beta_0 w^2) dx dz. \quad (15) \end{aligned}$$

Пусть выполняются условия (10), тогда получим также неравенство (11). Оценка функционала (15) примет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iiint_J \left(\frac{\pi^2 (4h^2 + l^2) + 8l^2}{4h^2 l^2} \phi^2(x, y, z, t) - \frac{4}{h^2} \phi(x, y, z, t) \phi(x, 0, z, t) + \frac{2}{h^2} \phi^2(x, 0, z, t) + \right. \\ & + \frac{2V}{h} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) + \frac{1}{\rho h} \left(\frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - N_{(x)} \right) w_x^2(x, z, t) \Big) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{\rho} \iint_{T_1} \left(\frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2} - N_{(z)} \right) w_z^2(x, z, t) dx dz. \quad (16) \end{aligned}$$

Пусть выполняются условия (13). Тогда условие неотрицательности квадратичной формы относительно $\phi(x, y, z, t)$, $\phi(x, 0, z, t)$, $w_x(x, z, t)$ в (16) примет вид:

$$2\pi^2 (4h^2 + l^2) (\pi^2 D (4h^2 + l^2) - h^2 l^2 N_{(x)}) - V^2 h^3 l^2 \rho (\pi^2 (4h^2 + l^2) + 8l^2) > 0, \quad (17)$$

а, следовательно, доказана теорема.

Теорема 2. Решение $w(x, z, t)$ задачи (2)-(8) устойчиво, а решение $\phi(x, y, z, t)$ и частные производные $w_x(x, z, t)$, $w_z(x, z, t)$ устойчивы в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных при выполнении условий (10), (13), (17).

Для конкретных значений параметров механической системы произведено сравнение условий (14) и (17) и численно найдена разность между левыми частями этих неравенств.

Литература

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. Ульяновск: УлГТУ, 2019. 201 с.

MSC 74F10

Study of dynamic stability of elastic air duct wall

G.A. Ankilov, P.A. Velmisov

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: Based on the constructed three-dimensional mathematical model described by a system of partial differential equations, the paper investigates the dynamic stability of the elastic wall of an air duct through which a gas flow is supplied. To study the stability of solutions to the corresponding initial-boundary value problems of aerohydroelasticity, functionals are constructed in models of compressible and incompressible media. Based on the properties of these functionals, stability conditions are obtained and an assessment is made of the effect of gas flow compressibility on the sizes of stability regions for specific parameters of the mechanical system.

Keywords: partial differential equations, dynamic stability, aerohydroelasticity, air duct, elastic plate, functional.

References

1. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Funktsionaly Lyapunova v nekotorykh zadachakh aerogidrouprugosti [Lyapunov functionals in some problems of aeroelasticity]. Ulyanovsk: UIGTU, 2019. 201 p. (in Russian)

УДК 517.951; 519.635; 534.121

Оценка погрешности метода Галеркина при исследовании динамики упругой пластины

Анкилов М.А., Андреев А.С.

Ульяновский государственный университет

Аннотация: В данной работе на основе простейшей математической модели свободных колебаний упругой пластины разрабатывается аналитический метод исследования ее динамики. Исследуется случай шарнирного закрепления концов упругой пластины. Модель описывается дифференциальным уравнением в частных производных, решение которого отыскивается методом Бубнова-Галеркина. Цель исследования – на основе построения функционала типа Ляпунова определить погрешность полученного приближенного решения.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамика, упругая пластина, метод Галеркина.

1. Постановка задачи и функционал для дифференциального уравнения в частных производных

В работе проведено исследование дифференциального уравнения в частных производных

$$M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + \beta_0 w(x, t) = 0, \quad x \in [0, l] \quad (1)$$

с неизвестной функцией $w(x, t)$, описывающей деформацию упругой пластины длиной l . Здесь и в дальнейшем точка и штрих обозначают частные производные по переменным x и t соответственно. Постоянные коэффициенты D , M , β_0 описывают физические параметры пластины и ее основания.

Зададим граничные условия шарнирного закрепления концов пластины и начальные условия:

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad w''(0, t) = 0, \quad w''(l, t) = 0, \quad (2)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x). \quad (3)$$

Для функции $w(x, t)$, являющейся решением уравнения (1) с граничными условиями (2), производная от функционала

$$\Phi = \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t) \right\} dx \quad (4)$$

по переменной t будет равна нулю: $\dot{\Phi} = 0$. Интегрируя от 0 до t , получим равенство

$$\int_0^l \left\{ M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t) \right\} dx = \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1'^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx = \Omega_1. \quad (5)$$

С использованием неравенств Рэлея [1] и Коши-Буняковского

$$\int_0^l w''^2(x, t) dx \geq \frac{\pi}{l} \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad w^2(x, t) \leq l \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad (6)$$

согласно (5) доказана теорема 1.

Теорема 1. *Решение $w(x, t)$ краевой задачи (1), (2) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (3), и справедливо неравенство $w^2(x, t) \leq \frac{l^2 \Omega_1}{\pi D}$.*

2. Оценка остаточного члена метода Галеркина

Согласно методу Галеркина [2], решение краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$w_m(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) g_k(x), \quad (7)$$

где $g_k(x) = \sin \gamma_k x$, $\gamma_k = \frac{\pi k}{l}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, а функции $a_k(t)$ являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M \ddot{a}_k(t) + (D \gamma_k^4 + \beta_0) a_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, m} \quad (8)$$

с начальными условиями

$$a_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) g_k(x) dx, \quad \dot{a}_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(x) g_k(x) dx. \quad (9)$$

Тогда функция $w(x, t)$ в виде (7) будет удовлетворять условиям (2) и, решая задачу Коши (8), (9), получим приближенное решение (7) начально-краевой задачи (1)–(3):

$$w_m(x, t) = \sum_{k=1}^m \left(a_k(0) \cos(\nu_k t) + \frac{\dot{a}_k(0)}{\nu_k} \sin(\nu_k t) \right) g_k(x), \quad \nu_k = \sqrt{\frac{D \gamma_k^4 + \beta_0}{M}}. \quad (10)$$

Введем функцию Ляпунова для обыкновенного дифференциального уравнения (8):

$$\Psi = M \dot{a}_n^2(t) + (D \gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(t). \quad (11)$$

Тогда для функции $a_n(t)$, являющейся решением уравнения (8), получим $\dot{\Psi} = 0$. Интегрируя от 0 до t , получим равенство

$$M \dot{a}_n^2(t) + (D \gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(t) = M \dot{a}_n^2(0) + (D \gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(0) = \Omega_{2n}. \quad (12)$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2. *Решение $a_n(t)$ уравнения (8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (9) и справедливо неравенство $(D \gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(t) \leq \Omega_{2n}$.*

Следовательно, получим оценку

$$w_m^2(x, t) \leq 2 \sum_{k=1}^m a_k^2(t) g_k^2(x) \leq \sum_{k=1}^m \frac{2 (M \dot{a}_k^2(0) + (D \gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(0))}{(D \gamma_k^4 + \beta_0)} g_k^2(x). \quad (13)$$

Рассмотрим остаточный член $R_m(x, t)$ разложения (7):

$$w(x, t) = w_m(x, t) + R_m(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \sin \gamma_k x + R_m(x, t). \quad (14)$$

Подставляя $w(x, t)$ в виде (14) в уравнение (1), с учетом (8) получим

$$M \ddot{R}_m(x, t) + D R_m''''(x, t) + \beta_0 R_m(x, t) = 0. \quad (15)$$

Подставляя $w(x, t)$ в виде (14) в граничные условия (2) и начальные условия (3), получим

$$R_m(0, t) = 0, \quad R_m(l, t) = 0, \quad R_m''(0, t) = 0, \quad R_m''(l, t) = 0, \quad (16)$$

$$R_m(x, 0) = f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x, \quad \dot{R}_m(x, 0) = f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x, \quad (17)$$

где $a_k(0), \dot{a}_k(0)$ определяются согласно (9).

Для дифференциального уравнения в частных производных (15) с граничными и начальными условиями (16), (17) введем функционал

$$T = \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + D R_m''^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx, \quad (18)$$

и аналогично исследованию функционала (4) получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + D R_m''^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx &= \int_0^l \left\{ M \left(f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ &+ D \left(f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left(f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \left. \right\} dx = \Omega_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая ортогональность функции $R_m(x, t)$ к первым m функциям $\{g_k(x)\}_{k=1}^m$, получим неравенство Рэлея [1] и неравенство Коши-Буняковского

$$\int_0^l R_m''^2(x, t) dx \geq \frac{\pi(m+1)}{l} \int_0^l R_m'^2(x, t) dx, \quad R_m^2(x, t) \leq l \int_0^l R_m'^2(x, t) dx. \quad (20)$$

С учетом (19), (20) доказана теорема.

Теорема 3. Если функция $R_m(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (16), то решение $R_m(x, t)$ уравнения (15) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (17) и справедливо неравенство $R_m^2(x, t) \leq \frac{l^2 \Omega_3}{D \pi(m+1)}$.

В отличие от работы [3] в данном исследовании предложен аналитический метод оценки погрешности метода Галеркина.

Литература

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. Москва: Наука, 1968. 503 с.
2. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. 352 с.
3. Анкилов М. А., Андреев А. С. Численно-аналитический метод исследования динамики упругой пластины // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа". Воронеж, 2025. С. 53-55.

MSC 74S30

Estimation of the error of the Galerkin method in the study of the dynamics of an elastic plate

M.A. Ankilov, A.S. Andreev

Ulyanovsk State University

Abstract: In this paper, based on the simplest mathematical model of free vibrations of an elastic plate, an analytical method for studying its dynamics is developed. The case of hinged fastening of the ends of the elastic plate is investigated. The model is described by a differential equation in partial derivatives, the solution of which is found by the Bubnov-Galerkin method. The purpose of the study is to determine the error of the obtained approximate solution based on the construction of a Lyapunov-type functional.

Keywords: mathematical modeling, dynamics, elastic plate, Galerkin method.

References

1. Collatz L. Zadachi na sobstvennye znacheniya [Eigenvalue Problems]. Moscow: Nauka, 1968. 503 p. (in Russian)
2. Fletcher K. Chislennye metody na osnove metoda Galerkina [Numerical Methods Based on Galerkin Method]. Moscow: Mir, 1988. 352 p. (in Russian)
3. Ankilov M. A., Andreev A. S. Chislenno-analiticheskii metod issledovaniya dinamiki uprugoi plastiny [Numerical-Analytical Method for Studying Elastic Plate Dynamics] // Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy: materialy mezhdunarodnoi konferentsii "Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola" [Modern Methods of Function Theory and Related Problems: Proceedings of International Conference "Voronezh Winter Mathematical School"]. Voronezh, 2025. P. 53-55. (in Russian)

УДК 519.63

Решение интегродифференциального уравнения Максвелла и распространение электромагнитного излучения в графеновых структурах

Артемьев Д.Д.¹, Дюбуа А.Б.¹, Кучерявый С.И.², Сафoshкин А.С.¹

Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина¹,
Обнинский институт атомной энергетики Национального исследовательского
ядерного университета МИФИ²

Аннотация: В работе получено решение интегродифференциального уравнения Максвелла для планарной структуры волновода с графеновым слоем.

Ключевые слова: графен, интегродифференциальное уравнение Максвелла, модовый метод.

Открытие графена и создание терагерцовых лазеров на графене [1] стимулировали теоретические [2] и экспериментальные [3] исследования процессов перераспределения электромагнитных волн на планарных структурах. Однако даже в самом простом приближении решение уравнений Максвелла при заданных граничных и краевых условиях приводит к громоздким интегродифференциальным уравнениям [4], которые имеют строго аналитическое решение только для определенных геометрий структур [5].

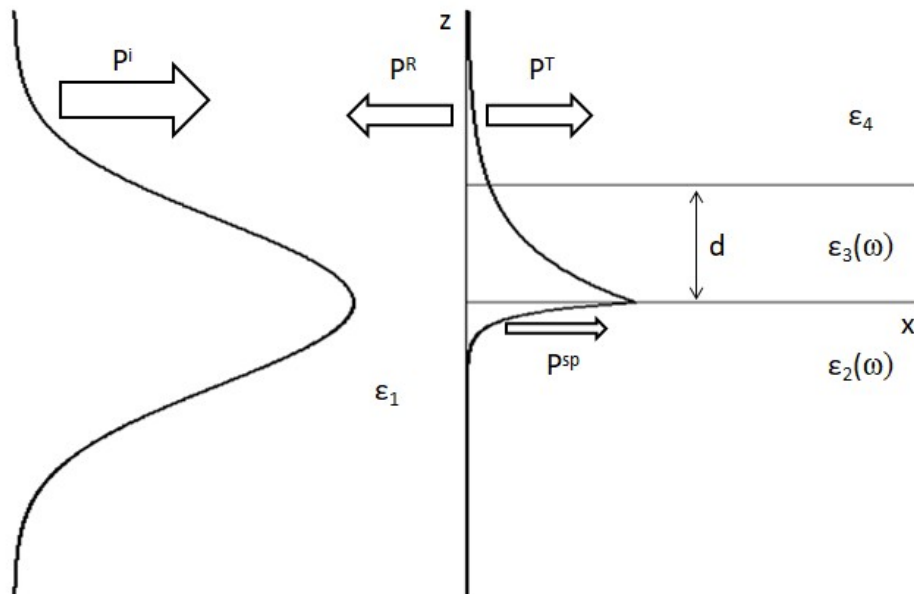


Рис. 1. Геометрия структуры и процесс возбуждения поверхностного поляритона. P^i – падающее излучение, P^R – отраженное объемное излучение, P^T – прошедшее излучение и P^{sp} – поверхностный поляритон

В работе [5] был развит модовый метод исследования задач дифракции электромагнитного излучения на диэлектрическом барьере. Основным достоинством этого

метода является сведение интегральных дифракционных уравнений к системе алгебраических, которые дают информацию, как о поверхностных, так и объемных полях, возбуждаемых в структуре [6]. В данной работе этот метод был использован для расчета процессов отражения поверхностной волны от вертикального диэлектрического барьера.

Рассматриваемая структура представляет собой четыре области, характеризующиеся диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 – вакуум, $\epsilon_2(\omega)$ – металл, $\epsilon_3(\omega)$ – графен, ϵ_4 – диэлектрик.

Уравнения Максвелла $i\omega\mathfrak{H} = \text{crot}\mathfrak{E}$ и $i\omega\epsilon_i(\omega)\mathfrak{E} = -\text{crot}\mathfrak{H}$ в декартовой системе в совокупности с гармоническим характером распространения каждой моды вдоль оси X $\{\mathfrak{H}(x, z), \mathfrak{E}(x, z)\} = \{H(z), E(z)\} \exp(ik_x x)$ связывают компоненты мод ТМ-поляризованного излучения (E_x, E_z, H_y) . Огибающие моды $H(z)$, а также волновое число kx определяются из волнового уравнения и граничных условий. Волновое уравнение дает зависимость поля $H_y(z)$ для каждого из квадрантов с граничными условиями $H_y(z = -0) = H_y(z = +0)$, $E_x(z = -0) = E_x(z = +0)$, которые полностью определяют структуру каждой моды при $x < 0$ и $x > 0$ в каждой из областей.

Литература

1. Chakraborty S., Marshall O. P., Folland T. G., Kim Y. J., Grigorenko A. N., Novoselov K. S. Gain modulation by graphene plasmons in aperiodic lattice lasers // *Science*. 2016. Vol. 351, no. 6270. P. 246-248.
2. Shah S., Lin X., Shen L., Renuka M., Zhang B., Chen H. Interferenceless polarization splitting through nanoscale van der Waals heterostructures // *Physical Review Applied*. 2018. Vol. 10, no. 3. P. 034025.
3. Afinogenov B. I., Kopylova D. S., Abrashitova K. A., Bessonov V. O., Anisimov A. S., Dyakov S. A., Gippius N. A., Gladush Yu. G., Fedyanin A. A., Nasibulin A. G. Midinfrared surface plasmons in carbon nanotube plasmonic metasurface // *Physical Review Applied*. 2018. Vol. 9, no. 2. P. 024027.
4. Бухенский К. В., Дюбуа А. Б., Конюхов А. Н., Кучерявый С. И., Машнина С. Н., Сафошкин А. С. Особенности решения интегродифференциальных уравнений Максвелла и возбуждения поверхностного поляритона на планарной структуре // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2017. Т. 19, № 3. С. 73-81.
5. Bukhensky K. V., Dubois A. B., Konukhov A. N., Kucheryavyy S. I., Safoshkin A. S. Surface polariton propagation in structure with a graphene layer // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2022. Vol. 15, no. 6. P. 742-752.
6. Бухенский К. В., Дюбуа А. Б., Конюхов А. Н., Кучерявый С. И., Сафошкин А. С. Распространение электромагнитного излучения в графеновых структурах // *Ученые записки Физического факультета Московского университета*. 2023. № 1. С. 2310301.

MSC 78A25, 45J05

Solution of Maxwell's integrodifferential equation and propagation of electromagnetic radiation in graphene structures

D.D. Artemiev¹, A.B. Duboi¹, S.I. Kucheryavyy², A.S. Safoshkin¹

Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin¹,
Obninsk Institute of Atomic Energy of the
National Research Nuclear University MEPhI²

Abstract: In this paper, a solution to Maxwell's integro-differential equation for a planar waveguide structure with a graphene layer is obtained.

Keywords: graphene, Maxwell's integro-differential equation, mode method.

References

1. Chakraborty S., Marshall O. P., Folland T. G., Kim Y. J., Grigorenko A. N., Novoselov K. S. Gain modulation by graphene plasmons in aperiodic lattice lasers // *Science*. 2016. Vol. 351, no. 6270. P. 246-248.
2. Shah S., Lin X., Shen L., Renuka M., Zhang B., Chen H. Interferenceless polarization splitting through nanoscale van der Waals heterostructures // *Physical Review Applied*. 2018. Vol. 10, no. 3. P. 034025.
3. Afinogenov B. I., Kopylova D. S., Abrashitova K. A., Bessonov V. O., Anisimov A. S., Dyakov S. A., Gippius N. A., Gladush Yu. G., Fedyanin A. A., Nasibulin A. G. Midinfrared surface plasmons in carbon nanotube plasmonic metasurface // *Physical Review Applied*. 2018. Vol. 9, no. 2. P. 024027.
4. Bukhensky K. V., Dubois A. B., Konukhov A. N., Kucheryavyy S. I., Mashnina S. N., Safoshkin A. S. Osobennosti resheniya integrodifferentsialnykh uravneniy Maksvella i возбуждения поверхностного поларитона на планарной структуре [Features of solving Maxwell integro-differential equations and excitation of surface polaritons on a planar structure] // *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 2017. Vol. 19, no. 3. P. 73-81. (in Russian)
5. Bukhensky K. V., Dubois A. B., Konukhov A. N., Kucheryavyy S. I., Safoshkin A. S. Surface polariton propagation in structure with a graphene layer // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2022. Vol. 15, no. 6. P. 742-752.
6. Bukhensky K. V., Dubois A. B., Konukhov A. N., Kucheryavyy S. I., Safoshkin A. S. Rasprostraneniye elektromagnitnogo izlucheniya v grafetovykh strukturakh [Propagation of electromagnetic radiation in graphene structures] // *Uchenye zapiski Fizicheskogo fakulteta Moskovskogo universiteta*. 2023. No. 1. P. 2310301. (in Russian)

УДК 519.63

Применение разномасштабных моделей в численном исследовании течения в криволинейном канале с пористыми вставками

Балабина Т.Ю., Дерюгин Ю.Н.

ФГУП «Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»

Аннотация: В данной работе приводятся результаты численного моделирования на моделях макро и микроуровнях. В микромасштабе исследуются элементарные физические процессы через пористую вставку, протекающие в непрерывном пространстве и времени. На основании данную микромоделирования определены фильтрационные характеристики пористой вставки для макромоделей. В макромоделировании применяется укрупненная дискретизация пространства по функциональному признаку для исследования течения в криволинейном канале. Приведена оценка влияния пористой вставки на снижения неоднородностей потока проводится по макромоделей. Приведены результаты численного исследования структуры турбулентных потоков за коленом. Рассматривается задача о снижении пульсационных возмущений потока, возникающих в газодинамическом тракте за коленом с использованием пористой вставки. Расчеты течений проведены с использованием комплекса программ «ЛОГОС».

Ключевые слова: численное моделирование, пористое тело, уравнение фильтрации, модель Форхгеймера, ЛОГОС.

1. Проблематика исследуемого вопроса

Теоретическое исследование газодинамических течений в криволинейных каналах с пористыми вставками проводится при помощи основных уравнений газодинамики (уравнения непрерывности, движения и сохранения энергии [1]). Математическая модель в общей постановке достаточно сложна и не имеет точного аналитического решения, поэтому вводятся различного рода допущения и полуэмпирические зависимости. Так, моделирование течений в каналах с пористыми вставками основывается, как правило, на использовании фильтрационных эмпирических макромоделей, в которых возникающее трение при взаимодействии потока с каркасом пористого материала описывается заданием тензором проницаемости. Результаты численного моделирования структуры потока при таком подходе существенно зависят от адекватности описания пористого материала тензором проницаемости, определяемым из эксперимента. Одним из способов определения фильтрационных характеристик сред с высокой пористостью может служить прямое численное моделирование, которое подразумевает построения геометрической модели порового пространства, построение сеточной модели с учетом выделения пограничного слоя на скелете и определение фильтрационных характеристик макромоделей путем осреднения результатов численного моделирования вязкого течения в поровом пространстве на микроуровне путем решения уравнений Навье-Стокса.

2. Постановка задачи

Как показано в работе [2] течение за коленом носит существенно турбулентный характер, включающий крупные вихревые структуры и мелкомасштабные пульсации потока. Для борьбы с возникшими возмущениями потока в данной работе рассматривается открытопористая вставка (рис. 1).

Исследование проводилось поэтапно и было разделено на несколько задач.

Первой задачей являлось моделирование течения через фрагмент пористой вставки. В рамках этой задачи исследовалась структура потока в пористой вставке, по которому затем определялись параметры макромоделей. Второй задачей являлось моделирование спутного следа за пористой вставкой.

В третьей заключительной задаче проводилась оценка затухания по макромоделю газодинамических неоднородностей, возникающих от колена в канале с пористой вставкой. Для оценки влияния пористой вставки на неоднородный турбулентный поток проводится моделирование в макромасштабе с использованием математических моделей описания пористого тела на основе фильтрационных моделей, в которых применяются осредненные показатели характеристик пористого тела.

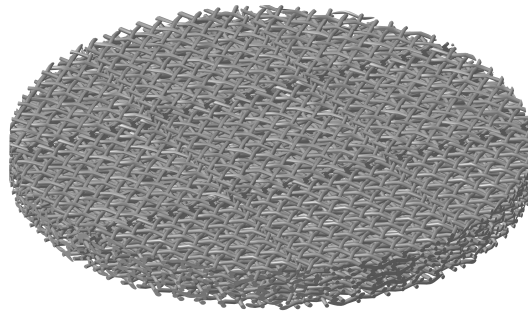


Рис. 1. Деталь из пористого материала

3. Обсуждение результатов

С целью исследования структуры потока и определения параметров для макромоделей пористой среды были проведены расчёты стационарно ламинарного течения воздуха в пористой вставке по построенной сеточной модели. Основной зависимостью, определяющей режим течения в пористой среде, является связь между осредненной скоростью потока и градиентом давления. На рис. 2 точками отмечены расчетные зависимости отношения перепада давления к толщине пористой вставки полученные в расчетах на микроуровне для различных чисел Рейнольдса. Из графика видно, что зависимость $\frac{\Delta P(u)}{\Delta l} = f(u)$ для рассматриваемой пористой вставки

на исследуемом диапазоне скоростей носит нелинейный характер. Это означает, что данный вид зависимости указывает на переходный режим течения газа в поровом пространстве. За счет явлений отрыва и струйных эффектов в переходном и турбулентных режимах течения, зависимость градиента давления от скорости приближается к квадратичной:

$$\frac{\Delta P(u)}{\Delta l} = \tilde{A}u + \tilde{B}u^2, \quad (1)$$

где u – скорость потока, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – размерные вязкостной и инерционный коэффициенты сопротивления пористого тела. На рис. 2 сплошной линией показана квадра-

точная зависимость (1), коэффициенты которой были найдены методом наименьших квадратов [3].

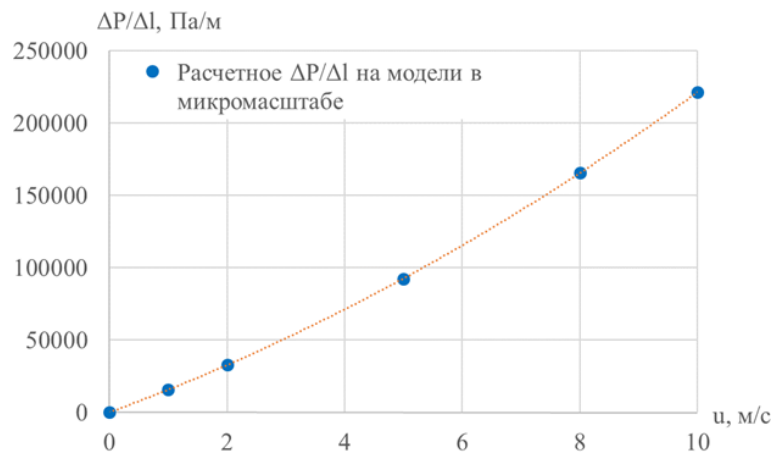


Рис. 2. Зависимость перепада давления от входной скорости потока

Использование пористой вставки создает в потоке дополнительное гидравлическое сопротивление, что может оказать существенное влияние на профиль скорости. В исследуемом диапазоне скоростей отчетливо наблюдается воздействие потока на пористую вставку. С увеличением скорости возмущения сильнее «прижимаются» к поверхности скелета пористой вставки.

Достоинство расчета на микроуровне заключается в детализации картины течения внутри конструкции. Для иллюстрации этого, на рис. 3 представлено векторное поле потока во фрагменте исследуемой пористой вставки, согласно которому видно, что исследуемая пористая вставка представляет собой развитую структуру сопряженных каналов, по которым поток проходит по пути наименьшего сопротивления, огибая проволоочки.

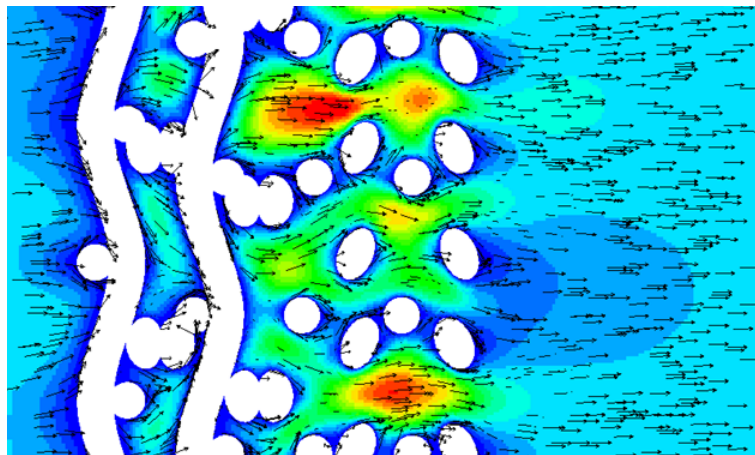


Рис. 3. Векторное поле на фрагменте пористой вставки (расчет в ЛОГОС [4] при н.у.

В проведенных численных исследованиях было рассмотрено ламинарное течение, реальное же течение как правило носит турбулентный характер. Моделирование турбулентных течений в пористых вставках на микроуровне в полномасштабной постановке в настоящее время не представляется возможным. Поэтому такое моделирование проводится по макромоделям.

Анализируемая неоднородность имеет значительный градиент скорости, который оказывает существенное влияние на однородность потока на протяжении порядка 50 характерных диаметров трубы [3]. Создавая дополнительное гидравлическое сопротивление в потоке в виде пористой вставки, можно оказать существенное влияние на профиль скорости (рис. 4). Из распределения видно, что градиент скорости существенно снижается за регионом открытопористой структуры.

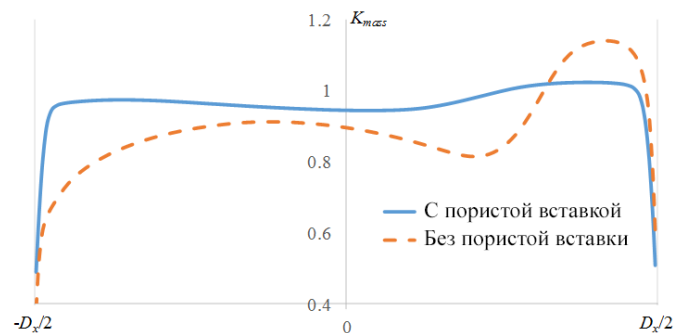


Рис. 4. График распределения отношения модуля скорости к массовой скорости по оси симметрии для расчетов с пористым регионом и без него

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учебное пособие : в 10 т. Т. VI : Гидродинамика. 3-е изд., перераб. Москва : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
2. Балабина Т. Ю., Дерюгин Ю. Н., Кудряшов Е. А. Численное моделирование турбулентного течения в канале с коленом // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 1-18. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. Москва : Наука, 1969. 607 с.
4. Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К. и др. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС: физико-математические модели расчета задач аэро-, гидродинамики и тепломассопереноса. Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. 67 с.

MSC 76D05

Application of multi-scale models in numerical flow study in a curved channel with porous body

T.Y. Balabina, Yu.N. Deryugin

FSUE RFNC – VNIIEF

Abstract: This paper presents the results of numerical modeling in macro and micro models. At the microscale, elementary physical processes through a porous insert that occur in continuous space and time are investigated. Based on this micro-modeling, the filtration characteristics of the porous insert for the macromodel were determined. Macromodeling uses an enlarged discretization of space by functional feature to study the flow in a curved channel. The effect of porous insert on reduction of flow inhomogeneities is evaluated by macromodel. Results of numerical study of structure of turbulent flows behind the elbow are given. The problem of reducing pulsation disturbances of the flow occurring in the gas-dynamic path behind the elbow using a porous insert is considered. Current calculations were based on the LOGOS software package.

Keywords: numerical modeling, porous media, filtration equation, Forchheimer model, LOGOS.

References

1. Landau L. D., Lifshitz E. M. Teoreticheskaya fizika : uchebnoe posobie : v 10 t. T. VI : Gidrodinamika [Theoretical Physics : Textbook : in 10 vols. Vol. VI : Hydrodynamics]. 3rd ed., rev. Moscow : Nauka : Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986. 736 p. (in Russian)
2. Balabina T. Yu., Deryugin Yu. N., Kudryashov E. A. Chislennoe modelirovanie turbulentnogo techeniya v kanale s kolenom [Numerical simulation of turbulent flow in an elbow channel] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of the Middle Volga Mathematical Society]. 2024. Vol. 26, no. 4. P. 1-18. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404. (in Russian)
3. Fikhtengol'ts G. M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. I [Course of Differential and Integral Calculus. Vol. I]. Moscow : Nauka, 1969. 607 p. (in Russian)
4. Kozelkov A. S., Deryugin Yu. N., Zelenskii D. K. et al. Mnogofunktsional'nyi paket programm LOGOS: fiziko-matematicheskie modeli rascheta zadach aero-, gidrodinamiki i teplomassoperenosa [Multifunctional LOGOS software package: physical and mathematical models for solving problems of aero-, hydrodynamics and heat-mass transfer]. Sarov : RFYaTs-VNIIEF, 2013. 67 p. (in Russian)

УДК 519.62

Уравнение движения вихря Абрикосова в широких сверхпроводящих плёнках

Васютин М.А., Кузьмичев Н.Д.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Выполнено математическое моделирование движения вихря Абрикосова в широкой сверхпроводящей плёнке. Получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для движения вихря под действием силы Лоренца при учёте силы трения при вязком течении вихрей. Оценены реальные коэффициенты полученного уравнения для сверхпроводящих плёнок NbN. Найдено решение уравнения движения вихря в системе MathCad.

Ключевые слова: сверхпроводники 2-го рода, широкие плёнки, вихри Абрикосова, обыкновенное дифференциальное уравнение.

1. Введение

Сверхпроводники 2-го рода характеризуются особенностями их взаимодействия с магнитным полем. При увеличении напряжённости магнитного поля выше H_{c1} (первое критическое поле) в сверхпроводнике начинают появляться вихри Абрикосова, представляющие собой цилиндрические образования с нормальной сердцевинкой (или ядро вихря толщиной порядка длины когерентности), окружённой сверхпроводящими электронами (на расстоянии порядка глубины проникновения магнитного поля). Если при температуре ниже критической вдоль сверхпроводящей плёнки пропустить электрический ток, то при достижении критического значения тока I_c индуцированное магнитное поле приводит к образованию вдоль краёв плёнки вихрей Абрикосова, разноимённых на противоположных краях. При дальнейшем увеличении тока на вихри начинает действовать сила Лоренца, смещающая их к центру плёнки, где разноимённые вихри аннигилируют.

2. Дифференциальное уравнение движения вихря Абрикосова и его решение

Для нахождения уравнения движения отдельного вихря применим к нему второй закон Ньютона с учётом силы Лоренца и силы вязкого трения:

$$\frac{mb}{2} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\eta b}{2} \frac{dx}{dt} + F, \quad (2.1)$$

где m – масса вихря, b – ширина плёнки, η – коэффициент вязкости, F – сила Лоренца, x – координата центра вихря, отсчитываемая от средней линии плёнки ($x = 0$) до края ($x = 1$), t – время.

Сила Лоренца, действующая на вихрь, определяется формулой [1]:

$$F = j\Phi_0 d = i\Phi_0, \quad (2.2)$$

где j – плотность тока, Φ_0 – квант магнитного потока, d – толщина плёнки (высота вихря), i – линейная плотность тока.

Распределение линейной плотности тока $i_1(x)$ по ширине плёнки при полном токе, незначительно превышающем критический, за вычетом мейсснеровского распределения при критическом токе в гидродинамическом приближении имеет вид [2]:

$$i_1(x) = \frac{2I_c A}{\pi b} (1 - x^2)^{-1/2} \left\{ (1 - x^2) \ln \left[\frac{(1 - x^2)}{x^2} \right] - 1 + \frac{B - 1}{A} \right\}, \quad (2.3)$$

где I_c – критический ток плёнки, $A = \frac{E}{E_0}$ – приведённая напряжённость электрического поля, $E_0 = \frac{8\Phi_0 I_c^2}{\eta b^2}$, $B = \frac{I}{I_c}$ – приведённый ток, превышающий критический.

Тогда, подставляя (2.3) в (2.2) и далее в (2.1), получим дифференциальное уравнение второго порядка для x .

Решение уравнения (2.1) с поправкой на дополнительное мейсснеровское распределение тока было найдено численно в программном обеспечении MathCad. На рис. 1 показана зависимость координаты центра вихря от времени. Видно, что вихрь достигает средней линии плёнки за 4 мс. На рис. 2 показана зависимость модуля скорости вихря от времени. За 6 нс вихрь достигает максимальной скорости (2.5 м/с для исследуемого образца NbN) и далее быстро за 0.2 мс, а потом медленно за 4 мс спадает до нуля.

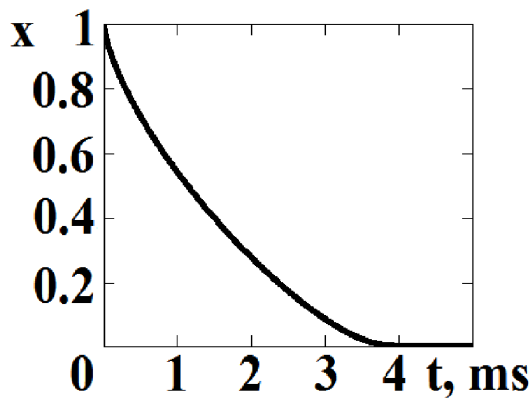


Рис. 1. Зависимость координаты центра вихря от времени

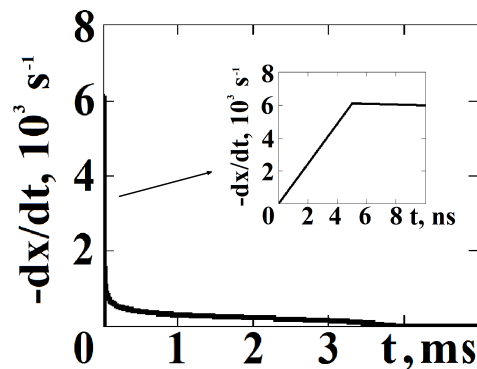


Рис. 2. Зависимость модуля скорости вихря от времени

Литература

1. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. 2-е изд., испр. и доп. Москва: МЦНМО, 2000. XIV, 402 с.
2. Асламазов Л. Г., Лемпицкий С. В. Резистивное состояние в широких сверхпроводящих плёнках // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1983. Т. 84, № 6. С. 2216-2227.

MSC 34K28

Equation of motion of the Abrikosov vortex in broad superconducting films

M.A. Vasjutin, N.D. Kuzmichev

National Research Mordovian State University

Abstract: Mathematical modeling of the Abrikosov vortex motion in a wide superconducting film is performed. An ordinary differential equation of the second order is obtained for the vortex motion under the action of the Lorentz force taking into account the friction force during viscous flow of vortices. Real coefficients of the obtained equation for superconducting NbN films are estimated. A solution to the vortex motion equation is found in the MathCad system.

Keywords: type II superconductors, wide films, Abrikosov vortices, ordinary differential equation.

References

1. Schmidt V. V. Vvedenie v fiziku sverkhprovodnikov [Introduction to the Physics of Superconductors]. 2nd ed., rev. and enl. Moscow: MTsNMO, 2000. XIV, 402 p. (in Russian)
2. Aslamazov L. G., Lempitskii S. V. Rezistivnoe sostoyanie v shirokikh sverkhprovodyashchikh plyonkakh [Resistive state in wide superconducting films] // Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 1983. Vol. 84, no. 6. P. 2216-2227. (in Russian)

УДК 519.63

Методика расчета двумерных уравнений Навье-Стокса на неструктурированных сетках

Веселов М.Р.

МГУ им. М.В. Ломоносова

Аннотация: Для численного моделирования течений используются различные модели и программы. Моделирование с использованием такого программного обеспечения требует значительных временных затрат. Существует класс задач, в которых течения можно рассматривать в двумерной постановке, что делает актуальной задачу разработки методик для двумерных уравнений.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, численные методы, двумерная постановка

Разработка различного рода технических устройств таких как компрессоры, турбины, двигатели внутреннего сгорания, литографы и т.д. требуют детального изучения структуры потока, что возможно только на основе численного моделирования. В настоящее время созданы физико-математические модели и программы для расчета внутренних и внешних течений вязкого сжимаемого газа в областях сложной формы. Такие расчетные технологии ориентированы на проведение расчетов на супер-эвм в полномасштабной трехмерной постановке и требуют значительных затрат как машинного времени, так и времени на анализ результатов. Существует большой класс задач, в которых течения можно рассматривать в двумерной постановке. К таким задачам относятся задачи обтекания профилей крыльев летательных аппаратов, обтекания профилей с изменяемой геометрией и течение в соплах и осесимметричных каналах. Проведение расчетов таких задач по трехмерным расчетным методикам (например, ЛОГОС) требуют больших затрат машинного времени. В связи с этим, актуальной задачей является, разработка двумерных методик и программ расчета вязких стационарных и нестационарных течений в плоских и осесимметричных областях. В данной работе представлен алгоритм и программа расчета двумерных уравнений Навье-Стокса для численного моделирования течений в плоских и осесимметричных областях. Программа написана на языке C++. Приводятся результаты тестовых и верификационных расчетов дающие представления о точности и возможности методики.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1974. 536 с.

MSC 35Q30

A method for calculating two-dimensional equations Navier-Stokes on unstructured grids

M.R. Veselov

Lomonosov Moscow State University

Abstract: Various models and programs are used for numerical simulation of flows. Modeling using such software requires considerable time. There is a class of problems in which flows can be considered in a two-dimensional formulation, which makes the task of developing techniques for two-dimensional equations relevant.

Ключевые слова: Navier-Stokes equations, numerical methods, two-dimensional statement

References

1. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Gidrodinamika* [Fluid Mechanics]. Moscow: Nauka, 1988. 736 p. (in Russian)
2. Loitsyanskii L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquids and Gases]. Moscow: Nauka, 1970. 904 p. (in Russian)
3. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Mechanics of Continuous Media]. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1974. 536 p. (in Russian)

УДК 533.21:536.23:517.95.

Математическое моделирование динамики механической системы «трубопровод – датчик давления»

Выборнова Ю.В., Вельмисов П.А.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: В данной работе предложена нелинейная математическая модель механической системы «трубопровод – датчик давления», предназначенной для контроля давления в камере сгорания. С помощью метода Галеркина построено приближенное решение соответствующей начально-краевой задачи. Проведены численные эксперименты и получены графики перемещения чувствительного элемента датчика и температуры рабочей среды при различном задании законов изменения давления рабочей среды и температуры на входе в трубопровод.

Ключевые слова: датчик давления, трубопровод, чувствительный элемент, динамика, дифференциальные уравнения, метод Галеркина.

1. Нелинейная математическая модель измерения давления рабочей среды

Во многих отраслях науки и техники, включая аэрокосмическую и энергетическую, стоит задача повышения надёжности и долговечности конструкций, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, особенно при проектировании датчиков давления для работы в экстремальных условиях (например, при тепловом и вибрационном воздействиях). Такие устройства должны сохранять точность измерений, несмотря на тепловые и динамические нагрузки, вызванные воздействием внешней среды и внутренними колебаниями. В данной статье представлена нелинейная математическая модель, в которой исследуется влияние изменения давления и температуры в камере сгорания двигателя на перемещение поршня датчика давления. На рис. 1 показана схема соответствующей механической системы «трубопровод – датчик давления», где 1 – камера сгорания, в сечении $x = 0$ трубопровода (на выходе из камеры

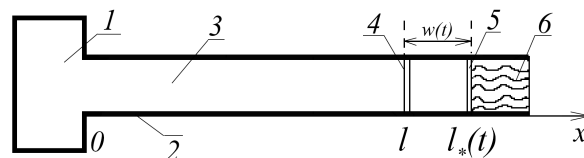


Рис. 1. Схема механической системы «трубопровод – датчик давления»

сгорания двигателя) задан закон изменения давления рабочей среды $P = P_0 + P_*(t)$ (P_0 – давление в состоянии покоя, $P_*(t)$ – избыточное давление); 2 – трубопровод, соединяющий камеру сгорания и датчик давления; 3 – рабочая среда; 4 – подвижный элемент (поршень), являющийся составной частью датчика давления и закрепленный с помощью системы упругих связей и демпферов; положение $x = l$ соответствует состоянию равновесия поршня; 5 – рабочее положение ($x = l_*(t) = l + w(t)$); $w(t)$ –

отклонение поршня от положения равновесия.

Основные уравнения математической модели представляют собой систему четырёх уравнений газовой динамики:

$$\begin{cases} \rho(u_t + uu_x) = -P_x, \\ \rho_t + \rho u_x + u\rho_x = 0, \\ \rho c_v(T_t + uT_x) + Pu_x = kT_{xx}, \\ P = R\rho T, \end{cases} \quad (1)$$

где $u(x, t)$, $\rho(x, t)$, $P(x, t)$, $T(x, t)$ – скорость, плотность, давление, температура рабочей среды в трубопроводе, $R = c_p - c_v$.

Выразим плотность из последнего уравнения $\rho = \frac{P}{RT}$ и подставим в остальные три уравнения:

$$\begin{aligned} P(u_t + uu_x) &= -RT P_x, \\ PT_t - PT_t + PTu_x + (P_x T - PT_x)u &= 0, \\ \frac{1}{\chi - 1} P(T_t + uT_x) + TPu_x &= kTT_{xx}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\chi = \frac{c_p}{c_v}$.

Уравнения математической модели (1) следует дополнить, в соответствии с изображенной схемой, граничными условиями:

$$\begin{cases} P(0, t) = P_0 + P_*(t), \\ u(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \\ P(l_*(t), t) = L(w(t)) \equiv m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma w(t), \\ T(0, t) = T_*(t), \\ T_x(l_*(t), t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

где $l_*(t) = l + w(t)$.

2. Численно-аналитическое решение задачи

Решение задачи строится с помощью метода Галеркина. Рассматривается два приближения решения. В первом приближении зададим u , P , T в виде, удовлетворяющем условиям (3)

$$\begin{cases} P = P_0 + P_*(t) + (L(w(t)) - P_0 - P_*(t))\frac{x}{l_*}, \\ T = T_*(t) + T_1(t)(x^2 - 2l_*x), \\ u = u_0(t) + (\dot{w}(t) - u_0(t))\frac{x}{l_*}. \end{cases} \quad (4)$$

Согласно методу Галеркина запишем условия ортогональности невязок уравнений (2) к базисным функциям, для этого умножаем полученные невязки на функцию $x(l_* - x)$, входящую в базисную систему поверочных функций вида $\{x^n(l_* - x)\}$, и интегрируем от 0 до l_* , тогда получим:

$$\left(\frac{1}{20}(P_0 + P_*(t)) + \frac{1}{30}L(w(t)) \right) \dot{u}_0(t) + \left(\frac{1}{30}(P_0 + P_*(t)) + \right.$$

$$+ \frac{1}{20}L(w(t))\Big)\ddot{w}(t) + \left(\frac{1}{20}(P_0 + P_*(t)) + \frac{1}{30}L(w(t))\right)u_0(t)\left(\dot{w}(t) - u_0(t)\right)\frac{1}{l_*} + \\ + R\left(\frac{1}{6}T_*(t) - \frac{7}{60}T_1(t)l_*^2\right)\left(L(w(t)) - P_0 - P_*(t)\right)\frac{1}{l_*} = 0,$$

$$\dot{L}(w(t))\left(\frac{1}{12}l_*^3T_*(t)\dot{w}(t) - \frac{1}{15}l_*^5T_1(t)\dot{w}(t)\right) + L(w(t))\left(\frac{1}{12}l_*^2T_*(t)\dot{w}(t) + \frac{1}{15}l_*^4T_1(t)\dot{w}(t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12}l_*^3\dot{T}_*(t) + \frac{1}{15}l_*^5\dot{T}_1(t) + \frac{1}{20}l_*^4T_1(t)u_0(t)\right) - \frac{1}{12}l_*^3T_*(t)\dot{P}_*(t) - \\ - \frac{1}{20}l_*^5T_1(t)\dot{P}_*(t) + (P_0 + P_*(t))\left(\frac{1}{20}l_*^2\dot{T}_1(t) - \frac{1}{12}l_*^3\dot{T}_*(t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{6}l_*^2T_*(t)u_0(t) + \frac{1}{6}l_*^4T_1(t)u_0(t) + \frac{1}{20}l_*^4T_1(t)\dot{w}(t) + \frac{1}{12}l_*^2T_*(t)\dot{w}(t)\right) = 0,$$

$$L(w(t))\left(\frac{1}{\chi - 1}\left(-\frac{1}{15}l_*^5\dot{T}_1(t) + \frac{1}{12}l_*^3\dot{T}_*(t) - \frac{1}{30}l_*^4T_1(t)u_0(t) - \frac{2}{15}l_*^4T_1(t)\dot{w}(t)\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{12}l_*^2T_*(t)(\dot{w}(t) - u_0(t)) - \frac{1}{15}l_*^4T_1(t)(\dot{w}(t) - u_0(t))\right) + (P_0 + P_*(t))\left(\frac{1}{\chi - 1}\left(\frac{1}{12}l_*^3\dot{T}_*(t) - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{20}l_*^5\dot{T}_1(t) - \frac{1}{10}l_*^4T_1(t)\dot{w}(t) - \frac{1}{15}l_*^4T_1(t)u_0(t)\right) + \frac{1}{12}l_*^2T_*(t)(\dot{w}(t) - u_0(t)) - \\ \left. \frac{1}{20}l_*^4T_1(t)(\dot{w}(t) - u_0(t))\right) - \frac{1}{3}kl_*^4T_*(t)T_1(t) + \frac{7}{30}kl_*^5T_1^2(t) = 0.$$

Получили систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента в пакете Mathematica.

3. Численный эксперимент

Зададим следующие параметры для случая постоянного давления и периодического возмущения температуры в двигателе, и нулевых начальных условиях:

$$\chi = 1.43, \quad l = 3, \quad m = 0.1, \quad P_0 = 101325, \quad \gamma = 10^9, \quad k = 0.022, \quad (2)$$

$$R = 8.31, \quad \alpha = 10^8, \quad P_*(t) = 20P_0, \quad T_*(t) = 1293.15 + 10 \cos(3t). \quad (3)$$

Результаты расчетов изображены на рис. 2.

Для случая $\chi = 1.43$, $l = 3$, $m = 0.1$, $P_0 = 101325$, $\gamma = 10^9$, $k = 0.022$, $R = 8.31$, $\alpha = 10^8$, $P_*(t) = P_0(25 + 2 \cos 3t)$, $T_*(t) = 793.15$ результаты расчетов изображены на рис. 3.

Во втором приближении представим u, P, T в виде:

$$\begin{cases} P = P_0 + P_*(t) + (L(w(t)) - P_0 - P_*(t))\frac{x}{l_*} + P_1(t)x(l_* - x), \\ T = T_*(t) + T_0(t)(x^2 - 2l_*x) + T_1(t)\left(x^3 - \frac{3}{2}l_*x^2\right), \\ u = u_0(t) + (\dot{w}(t) - u_0(t))\frac{x}{l_*} + u_1(t)x(l_* - x). \end{cases}$$

Повторив все этапы метода Галеркина в пакете Mathematica, в результате получим систему из 6 нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для

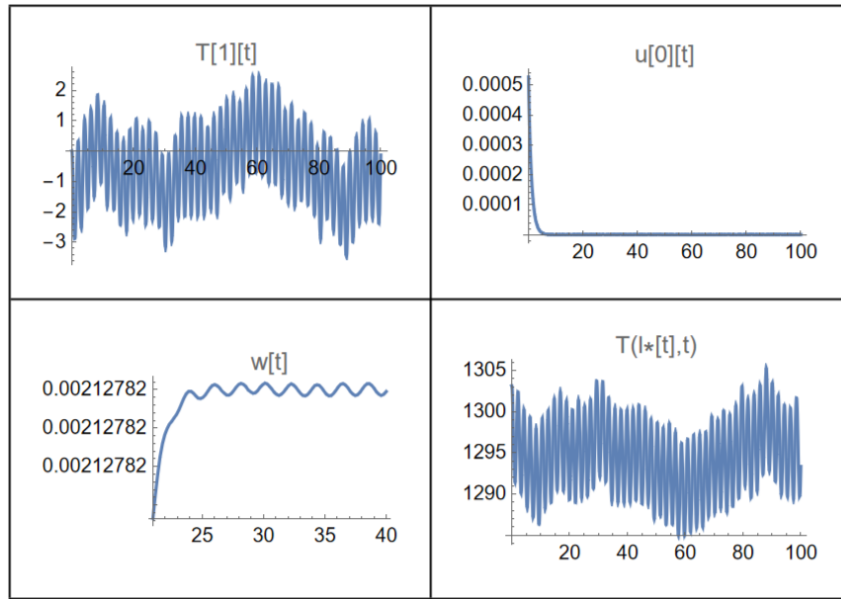


Рис. 2. Графики функций $T_1(t)$, $u_0(t)$, $w(t)$, $T(l_*, t)$ в первом приближении

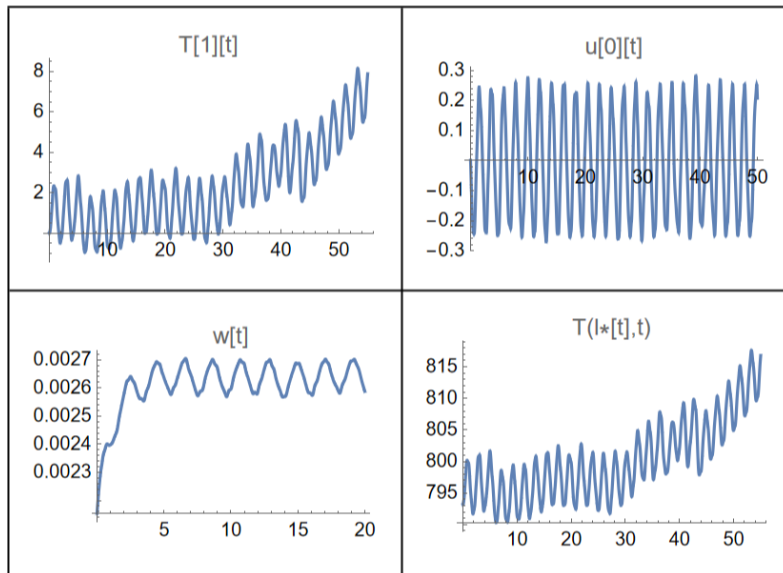


Рис. 3. Графики функций $T_1(t)$, $u_0(t)$, $w(t)$, $T(l_*, t)$ в первом приближении

неизвестных $w(t)$, $u_0(t)$, $u_1(t)$, $T_0(t)$, $T_1(t)$, $P_1(t)$, которые являются громоздкими и здесь не приводятся.

В результате численного эксперимента в программе Mathematica с аналогичными параметрами, получены графики температуры, скорости и перемещения чувствительного элемента датчика в зависимости от заданного закона изменения давления.

Для случая $\chi = 1.43$, $l = 3$, $m = 0.1$, $P_0 = 101325$, $\gamma = 10^9$, $k = 0.022$, $R = 8.31$, $\alpha = 10^8$, $P_*(t) = 20P_0$, $T_*(t) = 1293.15 + 10 \cos(3t)$ результаты расчетов изображены на рис. 4.

Для случая $\chi = 1.43$, $l = 3$, $m = 0.1$, $P_0 = 101325$, $\gamma = 10^9$, $k = 0.022$, $R = 8.31$, $\alpha = 10^8$, $P_*(t) = P_0(25 + 2 \cos 3t)$, $T_*(t) = 793.15$ результаты расчетов представлены на рис. 5.

Из рис. 2-5 следует, что результаты расчетов в первом и втором приближениях мало различаются.

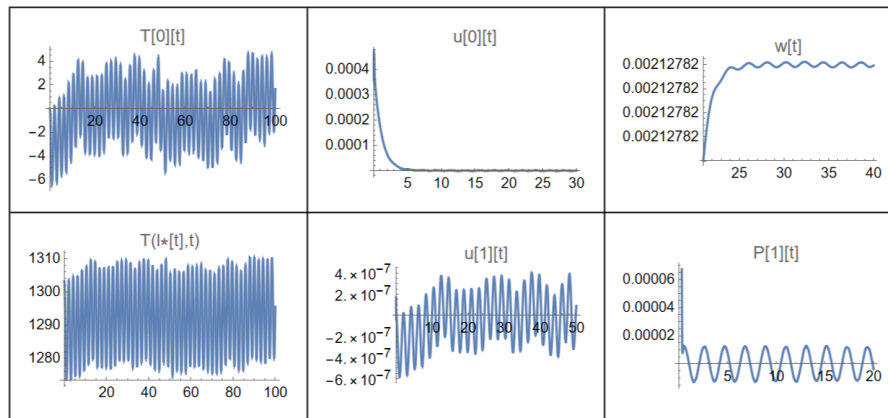


Рис. 4. Графики функций $T_0(t)$, $u_0(t)$, $w(t)$, $T(l_*, t)$, $u_1(t)$, $P_1(t)$ во втором приближении

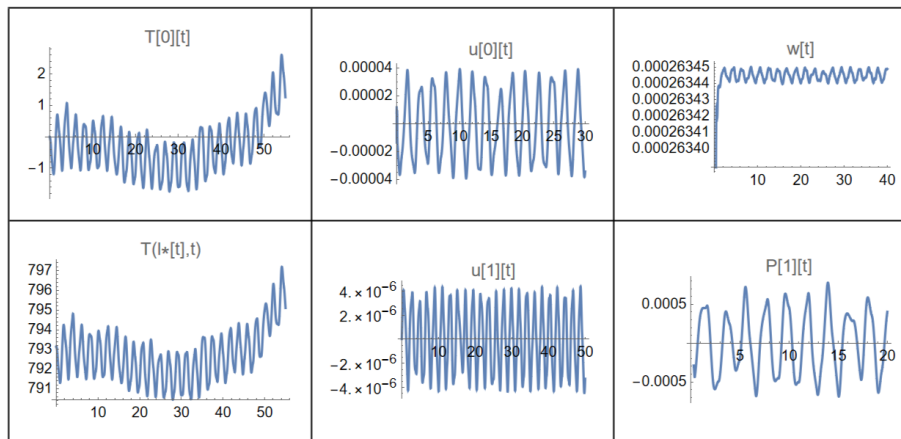


Рис. 5. Графики функций $T_0(t)$, $u_0(t)$, $w(t)$, $T(l_*, t)$, $u_1(t)$, $P_1(t)$ во втором приближении

Литература

1. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем контроля за изменением давления в газожидкостных средах // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем»: сб. тез. докл. междунар. конф. и междунар. шк. молодых ученых. Суздаль, 28 июня - 4 июля 2024. Владимир: Изд-во ВлГУ, 2024. С. 130-131.
2. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование динамических процессов в системах измерения давления в газожидкостных средах // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXV: материалы Международной Воронежской весенней математической школы. Воронеж, 26-30 апреля 2024 г. С. 81-83.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: пер. с англ. Москва: Мир, 1988. 352 с.

MSC 49K20,76N15,80A20.

Mathematical modeling of the dynamics of the mechanical system «pipeline – pressure sensor»

Yu.V. Vybornova, P.A. Velmisov
Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The paper considers a nonlinear mathematical model of the mechanical system «pipeline – pressure sensor» is proposed, designed to control the pressure in the combustion chamber. An approximate solution of the corresponding initial boundary value problem is constructed using the Galerkin method. Numerical experiments have been carried out and graphs of the movement of the sensor element and the temperature of the working medium have been obtained with different setting of the laws of change in the pressure of the working medium and the temperature at the inlet to the pipeline.

Keywords: pressure sensor, pipeline, sensing element, dynamics, differential equations, Galerkin's method.

References

1. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Matematicheskoe modelirovanie sistem kontrolya za izmeneniem davleniya v gazozhidkostnykh sredakh [Mathematical modeling of pressure monitoring systems in gas-liquid media] // Mezhdunarodnaya konferentsiya po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam. Mezhdunarodnaya shkola molodykh uchenykh "Modelirovanie i optimizatsiya slozhnykh sistem": sb. tez. dokl. mezhdunar. konf. i mezhdunar. shk. molodykh uchenykh. Suzdal', 28 iyunya - 4 iyulya 2024 [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems. International School of Young Scientists "Modeling and Optimization of Complex Systems": abstracts. Suzdal, June 28 - July 4, 2024]. Vladimir: VIGU, 2024. P. 130-131. (in Russian)
2. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov v sistemakh izmereniya davleniya v gazozhidkostnykh sredakh [Mathematical modeling of dynamic processes in pressure measurement systems in gas-liquid media] // Sovremennye metody teorii kraevykh zadach. Pontryaginskie chteniya - XXXV: materialy Mezhdunarodnoi Voronezhskoi vesennei matematicheskoi shkoly [Modern methods of boundary value problem theory. Pontryagin Readings - XXXV: proceedings of the International Voronezh Spring Mathematical School]. Voronezh, April 26-30, 2024. P. 81-83. (in Russian)
3. Fletcher K. Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moscow: Mir, 1988. 352 p. (in Russian)

УДК 539.3:533.6

О стабилизации динамики упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании

Гладун А.В.

Ульяновский институт гражданской авиации
имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева

Аннотация: Рассмотрена задача нелинейной стабилизации динамики упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании в случае неустойчивости этого элемента. Нелинейное уравнение в частных производных, описывающее динамику упругого элемента при наличии некоторого управляющего воздействия, приводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода Галеркина. Полученная система с помощью дифференциально-геометрических методов исследуется на управляемость и для нее строится управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения.

Ключевые слова: упругий элемент, сверхзвуковое обтекание, уравнения с частными производными, метод Галеркина, дифференциально-геометрические методы, стабилизация.

1. Введение

Устойчивость упругих элементов – ключевое требование при проектировании конструкций, подвергающихся сверхзвуковому обтеканию газом. Сверхзвуковой поток может индуцировать в этих элементах неустойчивые колебания, ведущие к их разрушению или ухудшению рабочих характеристик конструкции. В работе [1] была рассмотрена задача нахождения диапазона значений параметров упругих элементов конструкций для которых гарантирована их устойчивость. Однако если эксплуатация предполагается в условиях, нарушающих устойчивость, возникает необходимость гасить колебания упругого элемента путем подходящего управляющего воздействия [2]. Такой подход может предотвратить разрушение и обеспечить необходимую функциональность конструкции.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача управления динамикой упругого элемента конструкции в виде пластины-полосы при одностороннем обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа в случае ее шарнирного закрепления на обоих концах. Динамика упругого элемента в сверхзвуковом потоке газа описывается дифференциальным уравнением с частными производными [3]

$$\left[Dw'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) \right]'' + \alpha \left[\dot{w}'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) - 3w'' w' \dot{w}' \right]'' + \\ + m\ddot{w} + Nw'' - \beta \ddot{w}'' + \gamma (\dot{w} + Vw') + f(x, t) = 0, \quad (1)$$

где $w(x, t)$ – прогиб пластины; x – продольная координата, $x \in [0, l]$, l – длина пластины; t – время; $f(x, t)$ – некоторое управляющее воздействие; V – скорость потока;

m, D, N, α, β – некоторые постоянные; $\gamma = \alpha_0 \rho_0 a_0$, ρ_0 – плотность потока, a_0 – скорость звука в однородном потоке; штрих обозначает производную по координате x , точка – производную по времени t . Постоянная $\alpha_0 = 1$ для одностороннего и $\alpha_0 = 2$ для двустороннего обтекания пластины.

Введем безразмерные координату $\bar{x}$, время $\bar{t}$ и функцию прогиба $\bar{w}$:

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{V}{l} t, \quad \bar{w} = \frac{w}{l}. \quad (2)$$

При использовании замены переменных (2) в уравнении (1) и утверждении за безразмерными переменными прежних обозначений, получаем после деления обеих частей уравнения на γl

$$\begin{aligned} \frac{D}{\gamma V l} \left[w'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) \right]'' + \frac{\alpha}{\gamma l^2} \left[\dot{w}'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) - 3 w'' w' \dot{w}' \right]'' + \\ + \frac{m V}{\gamma l} \ddot{w} + \frac{N}{\gamma V l} w'' - \frac{\beta}{\gamma l^3} \ddot{w}'' + \dot{w} + w' + \frac{1}{\gamma l} f(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Задача. Найти для случая динамической неустойчивости уравнения (3) управляющее воздействие $f(x, t)$, такое, что соответствующее ему нулевое решение уравнения $w(x, t) = 0$, $x \in [0, 1]$ будет асимптотически устойчивым.

В начальный момент времени $t = 0$ деформация и скорость точек пластины задаются равенствами:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= \sqrt{2} c_1 \sin(\pi x) + \sqrt{2} c_2 \sin(2\pi x), \quad x \in [0, 1], \\ \dot{w}(x, 0) &= \sqrt{2} c_3 \sin(\pi x) + \sqrt{2} c_4 \sin(2\pi x), \quad x \in [0, 1], \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – некоторые заданные постоянные.

3. Построение решений

Для построения управляющего воздействия и решения уравнения (3) методом Галеркина будем задавать функции $f(x, t)$ и $w(x, t)$ в виде [4]

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) g_k(x), \quad w(x, t) = \sum_{k=1}^n v_k(t) g_k(x),$$

где $\{g_k(x)\}_1^\infty$ – полная на $[0, 1]$ система нормированных базисных функций, соответствующих случаю шарнирного закрепления концов пластины

$$w(0, t) = w(1, t) = w''(0, t) = w''(1, t) = 0.$$

Выберем $g_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ и ограничимся случаем $n = 2$, тогда управляющее воздействие $f(x, t)$ запишется следующим образом:

$$f(x, t) = \sqrt{2} u_1(t) \sin(\pi x) + \sqrt{2} u_2(t) \sin(2\pi x), \quad (4)$$

где $u_1(t), u_2(t)$ – некоторые кусочно-непрерывные функции (далее управления), обеспечивающие решение поставленной задачи.

В результате применения процедуры метода Галеркина получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка для функций $v_1(t), v_2(t)$, содержащую управления $u_1(t), u_2(t)$. Для этой системы с помощью дифференциально-геометрических методов анализа нелинейных систем, описанных в монографии [5] найдены условия управляемости и система записана в каноническом виде, который позволяет построить стабилизирующее управление.

Литература

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. № 3(57). Вып. 1. С. 59-67.
2. Гладун А. В., Вельмисов П. А. Об управлении динамикой деформируемого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е. В. Воскресенского: материалы VIII Международной научной молодежной школы-семинара. Саранск, 16-20 июля 2018 г. Саранск: Изд-во СВМО, 2018. С. 142-149.
3. Вельмисов П. А., Гладун А. В. О построении стабилизирующего управления для упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // Математическое моделирование и краевые задачи: материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием. В 2 т. Т. 1. Самара, 27-30 мая 2019 г. Самара: СамГТУ, 2019. С. 229-232.
4. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 4. С. 89-97.
5. Краснощёченко В. И., Крищенко А. П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 520 с.

MSC 74F10

On stabilizing of dynamics of the elastic structural element in supersonic flow

A.V. Gladun

Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after
Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev

Abstract: The paper addresses the problem of nonlinear stabilization for the dynamics of an elastic structural element under supersonic flow conditions, in the case of its inherent instability. The nonlinear partial differential equation describing the dynamics of the elastic element under the action of a control input is reduced to a system of nonlinear ordinary differential equations using the Galerkin method. The resulting system is analyzed for controllability employing differential-geometric methods, and a control law is synthesized to ensure asymptotic stability of the zero solution.

Keywords: elastic element, supersonic flow, dynamics, controllability, stabilization, partial differential equations (PDEs), Galerkin method, differential-geometric methods, stabilization, nonlinear control, asymptotic stability.

References

1. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Issledovanie dinamiki i ustoychivosti uprugogo elementa konstruktсии pri sverkhzvukovom obtekanii [Study of dynamics and stability of elastic structural element under supersonic flow] // Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2011. No. 3(57). Iss. 1. P. 59-67. (in Russian)
2. Gladun A. V., Velmisov P. A. Ob upravlenii dinamikoy deformiruemogo elementa konstruktсии pri sverkhzvukovom obtekanii [On control of deformable structural element dynamics under supersonic flow] // Matematicheskoe modelirovanie, chislennyye metody i komplekсы programm imeni E. V. Voskresenskogo: materialy VIII Mezhdunarodnoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminara [Mathematical modeling, numerical methods and software complexes named after E. V. Voskresensky: proceedings of VIII International youth scientific school-seminar]. Saransk, July 16-20, 2018. Saransk: SVMO, 2018. P. 142-149. (in Russian)
3. Velmisov P. A., Gladun A. V. O postroenii stabiliziruyushchego upravleniya dlya uprugogo elementa konstruktсии pri sverkhzvukovom obtekanii [On constructing stabilizing control for elastic structural element under supersonic flow] // Matematicheskoe modelirovanie i kraevyye zadachi: materialy XI Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem [Mathematical modeling and boundary value problems: proceedings of XI All-Russian scientific conference with international participation]. In 2 vols. Vol. 1. Samara, May 27-30, 2019. Samara: SamGTU, 2019. P. 229-232. (in Russian)
4. Velmisov P. A., Gladun A. V. Ob upravlenii dinamikoy truboprovoda [On pipeline dynamics control] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2016. Vol. 18, no. 4. P. 89-97. (in Russian)

5. Krasnoshchchenko V. I., Krishchenko A. P. Nelineynye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza [Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis]. Moscow: BMSTU, 2005. 520 p. (in Russian)

УДК 537.9

Квазиклассический метод расчета плотности тока щелевых модификаций графена в присутствии статического и переменного электрических полей

Глазов С.Ю., Мещерякова Н.Е., Подгорная И.А.

ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный социально-педагогический университет»

Аннотация: В работе представлены результаты теоретического исследования и сравнительный анализ зависимостей плотности тока в щелевых модификациях графена (щелевом графене, одномерной и двумерной сверхрешетке на основе графена) от характеристик и ориентации приложенных статического и переменного квазиклассически сильных электрических полей.

Ключевые слова: щелевой графен, сверхрешетка на основе графена, плотность тока, кинетическое уравнение Больцмана, статическое электрическое поле, переменное электрическое поле, ряд Фурье.

В работе развивается квазиклассический подход для расчета плотности тока в щелевых модификациях графена в сильных электрических полях, при котором закон дисперсии носителей получен в результате квантовомеханического расчета, а вычисление электрического тока производилось с помощью классического кинетического уравнения. Для аналитических вычислений удобно использовать модельный энергетический спектр, с хорошей степенью точности аппроксимирующий «истинный» спектр. Для нахождения плотности тока неравновесная функция распределения носителей находится из решения классического уравнения Больцмана, интеграл столкновений в котором выбран в приближении постоянного времени релаксации. Скорость носителей заряда раскладывается в ряд Фурье. В зависимости от вида спектра щелевой модификации графена для численного расчета постоянной составляющей плотности тока удерживается определенное количество членов ряда для обеспечения заданной точности.

В рамках исследования были изучены следующие модификации графена: щелевой графен, одномерная и двумерная сверхрешетки на основе графена. Неаддитивность энергетического спектра графена приводит и к неаддитивности спектров структур, создаваемых на его основе. Эта особенность приводит к взаимной зависимости движений носителей заряда вдоль перпендикулярных друг другу направлений, появляется возможность управления плотностью тока графена электрическими полями, ориентированными перпендикулярно к изучаемому направлению протекания тока.

Отдельным особенностям проводимости рассматриваемых в данной работе структур было посвящено достаточно большое количество исследований, выполненных в рамках квазиклассического подхода [1-5]. Отметим, что в данных полупроводниковых структурах проявляются эффекты отрицательной дифференциальной проводимости, абсолютной отрицательной проводимости и самоиндуцированной прозрачности, которые хорошо известны в теории узкозонных полупроводниковых структур и квантовых полупроводниковых сверхрешеток [6]. Анизотропия структур и неаддитивность энергетического спектра, могут приводить к несовпадению направлений

векторов напряженности электрического поля и плотности электрического тока [7, 8].

Кратко сформулируем результаты проделанной работы.

В результате проведенного анализа выявлены сходства и отличия нелинейного отклика рассматриваемых щелевых модификаций графена на действие сильных электрических полей.

Выполнено сравнение зависимостей постоянной составляющей плотности тока в изученных щелевых модификациях графена от параметров поперечно ориентированных электрических полей. Определены соотношения между параметрами приложенных полей, при которых наблюдается существенное различие между возможными значениями плотности тока, и, соответственно, управление проводимостью наиболее эффективно.

Изучена зависимость угла отклонения вектора плотности тока от направления вектора напряженности постоянного электрического поля, когда исследуемый образец находится под совместным действием постоянного и переменного электрических полей. Показано, что векторы напряженности постоянного электрического поля и плотности тока в двумерной структуре совпадают при ориентации поля вдоль характерных кристаллографических направлений, а для квадратных графеновых сверхрешеток также в сильных полях еще в двух направлениях, симметричных относительно биссекторного. Если на структуру дополнительно действует переменное поле, приложенное вдоль высокосимметричных направлений, то векторы плотности тока и напряженности постоянного электрического поля совпадают. В противном случае переменное электрическое поле существенно влияет на ориентацию вектора плотности тока. Это связано с неодинаковым разогревом носителей заряда из разных долин в сильных электрических полях и особенностями энергетического спектра.

Литература

1. Завьялов Д. В., Конченков В. И., Крючков С. В. Выпрямление поперечного тока в сверхрешетке на основе графена // Физика и техника полупроводников. 2012. Т. 46, вып. 1. С. 113-120.
2. Глазов С. Ю., Мещерякова Н. Е. Генерация высших гармоник в сверхрешетке на основе графена в присутствии постоянного электрического поля // Наносистемы: физика, химия, математика. 2012. Т. 3, № 1. С. 64-70.
3. Глазов С. Ю. Управление проводимостью графена поперечными статическим и переменным электрическими полями // Известия РАН. Сер. физ. 2019. Т. 83, № 1. С. 19-23.
4. Глазов С. Ю., Мещерякова Н. Е., Подгорная И. А. Управление проводимостью двумерной графеновой сверхрешетки поперечными электрическими полями // Известия РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87, № 1. С. 34-37.
5. Глазов С. Ю., Подгорная И. А. Особенности проводимости двумерной графеновой сверхрешетки в квазиклассически сильных внешних электрических полях с учетом ионизации примеси // Журнал радиоэлектроники. 2025. № 1.
6. Басс Ф. Г., Булгаков А. А., Тетервов А. П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. Москва: Наука, 1989. 288 с.

7. Романов Ю. А., Демидов Е. В. Нелинейная проводимость и вольт-амперные характеристики двумерных полупроводниковых сверхрешеток // Физика и техника полупроводников. 1997. Т. 31, вып. 3. С. 308-310.
8. Орлов М. Л., Орлов Л. К. Особенности транспорта электронов в двумерных квантовых сверхрешетках с неассоциативным законом дисперсии // Физика и техника полупроводников. 2021. Т. 55, вып. 3. С. 241-250.

MSC 42B05

A quasiclassical method for calculating the current density of gap modifications of graphene in the presence of static and alternating electric fields

S.Yu. Glazov, N.E. Mescheryakova, I.A. Podgornaya
Volgograd State Socio-Pedagogical University

Abstract: The paper presents the results of a theoretical study and a comparative analysis of the dependences of the current density in gap modifications of graphene (gap graphene, one-dimensional and two-dimensional superlattice based on graphene) on the characteristics and orientation of the applied static and alternating quasiclassical strong electric fields.

Keywords: gap graphene, graphene superlattice, current density, Boltzmann kinetic equation, static electric field, alternating electric field, Fourier series.

References

1. Zavyalov D. V., Konchenkov V. I., Kryuchkov S. V. Vyryamlenie poperechnogo toka v sverkhresetke na osnove grafena [Rectification of transverse current in graphene-based superlattice] // Fizika i tekhnika poluprovodnikov. 2012. Vol. 46, iss. 1. P. 113-120. (in Russian)
2. Glazov S. Yu., Meshcheryakova N. E. Generatsiya vysshikh garmonik v sverkhresetke na osnove grafena v prisutstvi postoyannogo elektricheskogo polya [Generation of higher harmonics in graphene-based superlattice in the presence of constant electric field] // Nanosistemy: fizika, khimiya, matematika. 2012. Vol. 3, no. 1. P. 64-70. (in Russian)
3. Glazov S. Yu. Upravlenie provodimostyu grafena poperechnymi staticheskimi i peremennymi elektricheskimi polyami [Control of graphene conductivity by transverse static and alternating electric fields] // Izvestiya RAN. Ser. fiz. 2019. Vol. 83, no. 1. P. 19-23. (in Russian)
4. Glazov S. Yu., Meshcheryakova N. E., Podgornaya I. A. Upravlenie provodimostyu dvumernoy grafetovoy sverkhresetki poperechnymi elektricheskimi polyami [Control of conductivity of two-dimensional graphene superlattice by transverse electric fields] // Izvestiya RAN. Ser. fiz. 2023. Vol. 87, no. 1. P. 34-37. (in Russian)
5. Glazov S. Yu., Podgornaya I. A. Osobennosti provodimosti dvumernoy grafetovoy sverkhresetki v kvaziklassicheski silnykh vneshnikh elektricheskikh polyakh s uchetom ionizatsii primesi [Features of conductivity of two-dimensional graphene superlattice in quasi-classically strong external electric fields taking into account impurity ionization] // Zhurnal radioelektroniki. 2025. No. 1. (in Russian)
6. Bass F. G., Bulgakov A. A., Teterov A. P. Vysokochastotnye svoystva poluprovodnikov so sverkhresetkami [High-frequency properties of semiconductors with superlattices]. Moscow: Nauka, 1989. 288 p. (in Russian)

7. Romanov Yu. A., Demidov E. V. Nelineynaya provodimost i volt-ampernye kharakteristiki dvumernykh poluprovodnikovykh sverkhresetok [Nonlinear conductivity and current-voltage characteristics of two-dimensional semiconductor superlattices] // Fizika i tekhnika poluprovodnikov. 1997. Vol. 31, iss. 3. P. 308-310. (in Russian)
8. Orlov M. L., Orlov L. K. Osobennosti transporta elektronov v dvumernykh kvantovykh sverkhresetkakh s neassotsiativnym zakonom dispersii [Features of electron transport in two-dimensional quantum superlattices with non-associative dispersion law] // Fizika i tekhnika poluprovodnikov. 2021. Vol. 55, iss. 3. P. 241-250. (in Russian)

УДК 519.63

О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с квадратичным гомоклиническим касанием к негиперболической неподвижной точке*

Гордеева О.В., Гордеев В.Е.

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

Аннотация: В работе рассматривается двухпараметрическое семейство f_μ , где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, двумерных диффеоморфизмов такое, что при $\mu = 0$ диффеоморфизм f_0 имеет неподвижную точку произвольного конечного порядка вырождения $n \geq 1$, сильноустойчивое и неустойчивое многообразие которой касаются квадратично. При $\mu_1 > 0$ неподвижная точка становится грубой седловой. Изучаются некоторые бифуркации однообходных периодических траекторий, показывается, что отображение первого возвращения сводится к хорошо известному отображению параболы.

Ключевые слова: седло-узел, негиперболическое седло, гомоклиническая траектория, отображение параболы.

Настоящая работа дополняет известный результат Н.К. Гаврилова [1] и Л.П. Шильникова [2] о каскаде периодических стоков, установленный для случая квадратичного касания многообразий грубой седловой точки.

Мы рассматриваем двухпараметрическое семейство f_μ двумерных диффеоморфизмов, где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$:

– Диффеоморфизм f_μ при $\mu_1 \geq 0$ имеет неподвижную точку O с мультипликаторами $0 < \lambda < 1, \gamma = 1 + \mu_1$;

– При $\mu_1 = 0$ точка O имеет вырождение $n \geq 1$ и ее Ляпуновская величина положительная, при n -нечетном типа седло-узел, при n -четном – сложное седло соответствующего порядка вырождения;

– При $\mu_1 \geq 0$ инвариантноустойчивое и инвариантнонеустойчивое многообразия неподвижной точки O таковы, что при $\mu_2 = 0$ они касаются в точках гомоклинической траектории Γ_0 , касание квадратичное.

В этом случае локальное отображение T_0 , т.е. ограничение диффеоморфизма f_μ на достаточно малую окрестность U_0 точки O , с помощью некоторой C^{r-1} -гладкой замены координат может быть приведено к виду

$$T_0 : \bar{x} = \lambda x(1 + h(x, y, \mu_1)), \quad \bar{y} = (1 + \mu_1)y + y^{n+1} + P(y, \mu), \quad (1)$$

где $\lambda = \lambda(\mu)$ и $0 < \lambda < 1$, $h(0, 0, \mu_1) \equiv 0$, $P(y, \mu_1) = O(y^{n+2})$. В этих координатах мы полагаем, что $U_0\{(x, y) \mid |x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon\}$ для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$, не зависящего от μ . Мы рассматриваем случай, когда $\mu_1 \geq 0$. Тогда неподвижная точка $O(0, 0)$, которая при $\mu_1 = 0$, является либо седло-узлом, либо сложным седлом вырождения порядка $n \geq 1$, при $\mu_1 > 0$ всегда является гиперболическим седлом (с мультипликаторами λ и $1 + \mu_1$).

Основная задача работы состоит в изучении однообходных периодических траекторий диффеоморфизма f_μ при $\mu_1 \geq 0$. Результатом работы является следующая

*Работа поддержана грантом РНФ 24-11-00339.

Теорема 1. *На полуплоскости параметров $(\mu_1 \geq 0, \mu_2)$ в любой достаточно малой окрестности $\mu = 0$, существует счетное множество непересекающихся полосок Δ_k , накапливающихся к оси $\mu_2 = 0$ при $k \rightarrow \infty$ таких, что f_μ имеет асимптотически устойчивую периодическую траекторию при $\mu \in \Delta_k$, а границами интервалов являются кривые, отвечающие седло-узловой и бифуркациям удвоения периода.*

Литература

1. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, I // Математический сборник. 1972. Т. 88, № 4. С. 475-492.
2. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, II // Математический сборник. 1973. Т. 90, № 1. С. 139-156.

MSC 37Gxx

On bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with quadratic homoclinic tangency to a nonhyperbolic fixed point

O.V. Gordeeva, V.E. Gordeev

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Abstract: We consider a two-parameter family f_μ of two-dimensional diffeomorphisms, where $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, such that for $\mu = 0$ the diffeomorphism f_0 has a nonhyperbolic fixed point of arbitrary finite order $n \geq 1$ of degeneracy, the invariant stable and unstable manifolds of this point has quadratically tangent and for $\mu_1 > 0$ the fixed point becomes a hyperbolic saddle. We study some bifurcations of the single-round periodic orbits. It is shown that the first return map reduces to the well-known parabola map.

Keywords: saddle-node, nonhyperbolic saddle, homoclinic orbit, parabola map

References

1. Gavrilov N. K., Shilnikov L. P. O trekhmernykh dinamicheskikh sistemakh, blizkikh k sistemam s negruboi gomoklinicheskoi krivoi, I [On three-dimensional dynamical systems close to systems with a non-rough homoclinic curve, I] // Matematicheskii sbornik. 1972. Vol. 88, no. 4. P. 475-492. (in Russian)
2. Gavrilov N. K., Shilnikov L. P. O trekhmernykh dinamicheskikh sistemakh, blizkikh k sistemam s negruboi gomoklinicheskoi krivoi, II [On three-dimensional dynamical systems close to systems with a non-rough homoclinic curve, II] // Matematicheskii sbornik. 1973. Vol. 90, no. 1. P. 139-156. (in Russian)

УДК 519.63

Об одном алгоритме прямого разрешения доменных структур с внутренней мортарной границей*

Губайдуллин И.М.¹, Повещенко Ю.А.², Подрыга В.О.²,
Узянбаев Р.М.¹, Язовцева О.С.³

УГНТУ¹, ИПМ им. М.В.Келдыша²,
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет³

Аннотация: В работе представлен алгоритм прямого разрешения доменных структур с внутренней несогласованной границей. Расчетная область разбита на ячейки с крупным пространственным шагом, внутри которых реализуется более мелкая сетка. Алгоритм протестирован на примере двумерного уравнения распределения давления и применен к решению задачи пьезопроводности типичной пластовой структуры карбонатно-пористого коллектора.

Ключевые слова: метод прогонки, мортарные сетки, уравнение пьезопроводности, карбонатно-пористый коллектор.

В настоящее время актуальной остается задача построения вычислительных алгоритмов для областей с резко меняющимися фильтрационно-емкостными и масштабно-геометрическими характеристиками. В таких задачах, помимо разработки численных схем, остро стоит вопрос о декомпозиции областей интегрирования. Одним из подходов к разбиению области являются расчетные сетки с несогласованными внутренними границами – мортарные сетки. Значительное количество исследований в этой области было ориентировано на применение метода конечных элементов (например, см. [1]). В данной работе предлагается алгоритм прямого разрешения доменных структур с внутренней мортарной границей для уравнения пьезопроводности на основе конечно-разностных методов. На расчетной области определена сетка с крупным пространственным шагом (макросетка). Подмножество ячеек макросетки (будем называть их макроячейками) разбивается на более мелкие пространственные ячейки, определяющие их внутреннюю микросеточную структуру. В узлах микро- и макросеток записываются балансные соотношения исходной задачи. Подобное разбиение ведет к необходимости записи условий согласования на внутренних границах, связанное с сохранением свойств самосопряженности и знакоопределенности повторных операций векторного анализа (div grad) при переходе от одного вида расчетной сетки к другому для полной сеточной задачи.

В выделенной макроячейке реализуется продольно-поперечный итерационный процесс символьной прогонки, точно вычисляющей полиномиальные коэффициенты в узлах микросеточной структуры при неизвестных макросеточных значениях на мортарной внутренней границе макроячейки. Начальное значение итерационного параметра подбирается из теоремы о кругах Гершгорина [2], определяющей верхнюю спектральную границу исходной задачи. Внутри выбранной ячейки задача сводится к нахождению решений при неизвестных граничных условиях Дирихле, интерполируемых исходя из неизвестных сеточных функций в узлах макросетки. Таким образом, стандартное определение балансных и прогоночных сеточных коэффициентов обобщено на их полиномиальное представление.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-71-20005, <https://rscf.ru/project/25-71-20005/>.

Алгоритм протестирован в задачах, сохраняющих фильтрационно-емкостные спектральные свойства исследуемых систем распределения давлений в нефтесодержащем пласте трещиновато-пористого карбонатного коллектора.

Литература

1. Bernardi C., Maday Y., Patera A. T. A New Nonconforming Approach to Domain Decomposition: The Mortar Element Method // Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications. Paris: College de France, 1994.
2. Гершгорин С. А. Об ограничении собственных значений матрицы // Доклады Академии наук СССР. 1951. Т. 7. С. 749-752.

MSC 65N06

On an algorithm for the direct solution of domain structures with an internal mortar boundary

I.M. Gubaydullin¹, Yu.A. Poveshchenko², V.O. Podryga²,
R.M. Uzyanbayev¹, O.S. Yazovtseva³

USPTU¹, Keldysh IAM²,
National Research Mordovian State University³

Abstract: The paper presents an algorithm for the direct solution of domain structures with an internally non-matching boundary. The computational domain is divided into cells with a large spatial step, within which a finer grid is implemented. The algorithm is tested on a two-dimensional pressure distribution equation and applied to solving the piezoconductivity problem of a typical structure of a carbonate-porous reservoir.

Keywords: the tridiagonal matrix algorithm, mortar grids, piezoconductivity equation, carbonate-porous collector.

References

1. Bernardi C., Maday Y., Patera A. T. A New Nonconforming Approach to Domain Decomposition: The Mortar Element Method // Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications. Paris: College de France, 1994.
2. Gershgorin S. A. Ob ogranichenii sobstvennykh znachenii matritsy [On the bounds for eigenvalues of matrices] // Doklady Akademii nauk SSSR. 1951. Vol. 7. P. 749-752. (in Russian)

УДК 517.958

Разрешимость начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды в классе суммируемых функций в сетеподобной области

Гусельникова И.В.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Аннотация: Представлен метод анализа эволюционных моделей процессов переноса в сетеподобных областях. Исследование ведется на примере задачи Дирихле для параболического уравнения в слабой постановке, т.е. используется не само дифференциальное уравнение, а соответствующее ему интегральное тождество. Предлагаемый метод применим с небольшими видоизменениями в случае эллиптических, гиперболических и других задач для векторных функций. Примером последнего является широко используемая в описании сетеподобных гидродинамических процессов линеаризованная система Навье-Стокса.

Ключевые слова: сетеподобная область, эволюционная модель процесса переноса, система Навье-Стокса, разрешимость начально-краевых задач.

1. Обозначения, основные понятия

Связная сетеподобная область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^n$ ($\partial\mathfrak{S}$ – граница $\mathfrak{S}$) (см. [1, 2]) представляет собой совокупность ограниченных подобластей $\mathfrak{S}_j$, $j = \overline{1, N}$ ($\partial\mathfrak{S}_j$ – границы подобластей) и совокупность поверхностей $S_j \subset \partial\mathfrak{S}_j$, $j = \overline{1, N}$, являющихся общими границами смежных подобластей (S_j – двухсторонние поверхности взаимного примыкания подобластей, через S_j^+ , S_j^- обозначены эти стороны). Таким образом, сетеподобная область $\mathfrak{S}$ структурирована по типу геометрического графа [3]:

$$\mathfrak{S} = \left(\bigcup_{j=1}^N \mathfrak{S}_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^N S_j \right), \quad \partial\mathfrak{S} = \left(\bigcup_{j=1}^N \partial\mathfrak{S}_j \right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N S_j \right).$$
Везде далее предполагается, что поверхности S_j гладкие, каждая подобласть $\mathfrak{S}_j$ звездная относительно шара из $\mathfrak{S}_j$.

Используются классические пространства действительных, измеримых по Лебегу функций $u(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: $L_2(\mathfrak{S})$ – пространство (классов) вещественных измеримых функций $u(x)$, здесь $(u, v)_{\mathfrak{S}} = \int_{\mathfrak{S}} u(x)v(x)dx$, $\|u\|_{\mathfrak{S}} = \sqrt{(u, u)_{\mathfrak{S}}}$;

$L_{\infty}(\mathfrak{S})$ – пространство (классов) измеримых, существенно ограниченных функций $u(x)$ на $\mathfrak{S}$, здесь $\|u\|_{\mathfrak{S}} = \text{vrai} \max_{x \in \mathfrak{S}} |u(x)|$; $W_2^1(\mathfrak{S})$ – соболевское пространство функций $u(x)$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_{\iota}} \in L_2(\mathfrak{S}) \quad (\iota = \overline{1, n}), \quad \text{здесь}$$

$$(u, v)_{\mathfrak{S}}^1 = \int_{\mathfrak{S}} \left(u(x)v(x) + \sum_{\iota=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_{\iota}} \frac{\partial v(x)}{\partial x_{\iota}} \right) dx,$$

$$\|u\|_{\mathfrak{S}} = \sqrt{(u, u)_{\mathfrak{S}}^1},$$

$W_{2,0}^1(\mathfrak{F}) = \{u : u \in W_2^1(\mathfrak{F}), u|_{x \in \partial\mathfrak{F}} = 0\}$ – ядро $W_2^1(\mathfrak{F})$.

При этом $\int_{\mathfrak{F}} u(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{\mathfrak{F}_j} u(x) dx$.

Введем пространства функций $u(x)$ со свойствами, описывающими условия взаимного примыкания подобластей $\mathfrak{F}_j$ области $\mathfrak{F}$. Рассмотрим дифференциальное выражение вида $\mathcal{A}u = - \sum_{\kappa, \iota=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right)$, которое определяет эллиптический оператор (линейный положительный оператор) краевых задач математических моделей процессов переноса сплошных сред в сетевом носителе, описываемом сетеподобной областью $\mathfrak{F}$; здесь $a_{\kappa\iota}(x)$ ($\kappa, \iota = \overline{1, n}$) – ограниченные функции пространства $L_2(\mathfrak{F})$.

Условия взаимного примыкания подобластей $\mathfrak{F}_j$ в терминах выражения $\mathcal{A}u$ будут определяться соотношениями (см. [1])

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad \int_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS = 0 \quad (1)$$

на сторонах S_j^+ и S_j^- каждой поверхности примыкания S_j (здесь и везде ниже $j = \overline{1, N}$), $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} = \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \cos(\bar{n}, x_\kappa)$ на S_j^+ или S_j^- , $\cos(\bar{n}, x_\kappa)$ – κ -й направляющий косинус внешней нормали $\bar{n} := \bar{n}(x)$ к границе $S_j \subset \partial\mathfrak{F}_j$ (т. е. S_j^+ или S_j^- соответственно).

Замечание 1. Если (1) рассматривать применительно к тепловому процессу, то первое соотношение означает равенство температур среды по обе стороны S_j^+ и S_j^- поверхностей примыкания S_j , второе – баланс тепловых потоков на S_j .

Для $\mathcal{A}u$ соотношением $\rho(u, \eta) = \int_{\mathfrak{F}} \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} dx$ зададим билинейную непрерывную симметричную форму относительно $u(x), \eta(x)$, определенную на $W_2^1(\mathfrak{F}) \times W_2^1(\mathfrak{F})$. При этом будем считать выполненными следующие условия:

$$a_{\kappa\iota}(x) = a_{\iota\kappa}(x), a_* \xi^2 \leq \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x) \xi_\kappa \xi_\iota \leq a^* \xi^2, \quad (2)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, $\xi^2 = \sum_{\kappa=1}^3 \xi_\kappa^2$, а положительные постоянные a_* , a^* и функции $a_{\kappa\iota}(x) \in L_2(\mathfrak{F})$ заданы; соотношения в (2) выполняются почти всюду на $\mathfrak{F}$.

Замечание 2. В силу (2) имеет место неравенство $\rho(u, u) \geq a_* \|u\|_{W_2^1(\mathfrak{F})}^2$ для любого $u \in W_2^1(\mathfrak{F})$. Откуда вытекает существование единственного элемента $u \in W_2^1(\mathfrak{F})$, для которого (лемма Лакса-Мильграма [4]) выполнено соотношение $\rho(u, \eta) = L(\eta)$, ($L(\eta) = (f, \eta)$, $f(x) \in L_2(\mathfrak{F})$) для любых $\eta \in W_2^1(\mathfrak{F})$ таких, что $\eta(x) = 0$ при $x \in \partial\mathfrak{F}$. В этом случае это соотношение (или интегральное тождество) является заданием уравнения $\mathcal{A}u = f$ в слабой постановке.

Пусть далее $\mathcal{X}_0(\mathfrak{F}) = \{u : u(x) \in \tilde{C}^1(\overline{\mathfrak{F}}), u(x)|_{\partial\mathfrak{F}} = 0\}$, $\tilde{C}^1(\overline{\mathfrak{F}})$ – множество функций, дифференцируемых на $\overline{\mathfrak{F}_j}$ ($j = \overline{1, N}$) и удовлетворяющих условиям (1).

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{F})$ – замыкание $\mathcal{X}_0(\mathfrak{F})$ в норме $W_2^1(\Omega)$.

2. Начально-краевая задача переноса сплошной среды

Введем пространство состояний $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ начально-краевой задачи и вспомогательное пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$, $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$, $T < \infty$.

Определение 2. Пространство $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ – замыкание в норме, определенной соотношением $\|y\|_{\mathfrak{S}_T}^{1,0} = \left(\int_{\mathfrak{S}_T} \left(y^2 + \sum_{i=1}^n y_{x_i}^2 \right) dx dt \right)^{1/2}$, совокупности функций $y(x, t)$, следы которых $y(x, t_0)$ при $t_0 \in (0, T)$ принадлежат $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ и непрерывны по t_0 в норме $W_2^1(\mathfrak{S})$.

Замечание 3. Если в определении 2 норму $\|y\|_{\mathfrak{S}_T}^{1,0}$ заменить другим соотношением, например,

$$\|y\|_{\mathfrak{S}_T}^1 = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{S}_k \times (0, T)} (y^2 + y_t^2 + \sum_{i=1}^n y_{x_i}^2) dx dt \right)^{1/2},$$

то определено пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T) \subset \tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$.

В пространстве $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ ищется решение $y(x, t)$ начально-краевой задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = f(x, t), \quad y|_{t=0} = \phi(x), \quad y|_{x \in \partial \Gamma_T} = 0, \quad (3)$$

где $f(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$, $\phi(x) \in L_2(\mathfrak{S})$.

Определение 3. Функция $y(x, t) \in \tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ – слабое решение задачи (3), если справедливо интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{S}_T} y(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt - \int_{\mathfrak{S}_T} \left(\sum_{\kappa, i=1}^n a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x_\kappa} \right) dx dt = \\ = - \int_{\mathfrak{S}} \phi(x) \eta(x, 0) dx - \int_{\mathfrak{S}_T} f(x, t) \eta(x, t) dx dt \end{aligned}$$

при любой $\eta(x, t) \in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$, $\eta(x, T) = 0$.

Теорема 1. Если выполнены условия (2) и $f(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$, $\phi(x) \in L_2(\mathfrak{S})$, то начально-краевая задача (3) разрешима в $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$.

3. Пример, линеаризованная система Навье-Стокса

В качестве иллюстрации используемого подхода и результатов теоремы 1 для вектор-функции $Y(x, t) = \{y_1(x, t), y_2(x, t), y_3(x, t)\}$, где $x, t \in \mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$, $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^3$ ($\mathfrak{S} = \bigcup_{i=1}^N \mathfrak{S}_i$), $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, вводятся пространства векторных функций $(L_{2,1}(\mathfrak{S}_T))^3$, $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T))^3$, $(\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T))^3$, аналогичных пространствам $L_{2,1}(\mathfrak{S})$, $\tilde{W}^1(\mathfrak{S})$, $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$. Рассматривается

линеаризованная система Навье-Стокса (используются общепринятые обозначения, см. [5, с. 383]):

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2} + \text{grad} p = F(x, t), \quad \text{div} Y = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right). \quad (4)$$

Условия взаимного примыкания подобластей $\mathfrak{S}_j$, $j = \overline{1, N}$, описываются соотношениями

$$Y(x, t)|_{x \in S_j^+} = Y(x, t)|_{x \in S_j^-}, \quad \int_{S_j^+} \frac{\partial Y(x, t)}{\partial \bar{n}_j^+} dS + \int_{S_j^-} \frac{\partial Y(x, t)}{\partial \bar{n}_j^-} dS = 0, \quad (5)$$

на двухсторонних поверхностях взаимного примыкания подобластей S_j , для произвольного $t \in (0, T)$ (см. аналогичные условия (1) и пояснения пункта 1); через $\bar{n}_j^+$ и $\bar{n}_j^-$ обозначены внешние нормали к S_j^+ и S_j^- , $F(x, t) = \{F_1(x, t), F_2(x, t), F_3(x, t)\}$ – вектор внешних воздействий на систему (4), $p(x, t)$ – давление в гидросистеме. Начальные и граничные условия

$$Y(x, t)|_{t=0} = Y_0(x), \quad x \in \mathfrak{S}, \quad Y(x, t)|_{x \in \partial \mathfrak{S}} = 0, \quad (6)$$

вместе с соотношениями (4), (5) определяют начально-краевую задачу (4)–(6) для функций $Y(x, t)$, $p(x, t)$ в замкнутой области $\bar{\mathfrak{S}}_T$: $\bar{\mathfrak{S}}_T = (\mathfrak{S} \cup \partial \mathfrak{S}) \times [0, T]$.

Определение 4. Пара $\{Y(x, t), p(x, t) : Y(x, t) \in (\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T))^3, p(x, t) \in C(\mathfrak{S}_T)\}$, называется слабым решением краевой задачи (4)–(6) для системы Навье-Стокса, если для функции $Y(x, t)$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} - \int_{\mathfrak{S}_T} Y(x, \tau) \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau + \nu \int_{\mathfrak{S}_T} \frac{\partial Y(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial x} dx d\tau = \\ = (Y_0(x), \eta(x, 0)) + \int_{\mathfrak{S}_T} F(x, \tau) \eta(x, \tau) dx d\tau \end{aligned}$$

при любой функции $\eta(x, t) \in (\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T))^3$, $\eta(x, T) = 0$.

Замечание 4. Из определения 4 следует, что отыскание решения $Y(x, t)$ задачи (4)–(6) является первичным, для функции $p(x, t)$ достаточно знать принадлежность ее классу $C(\mathfrak{S}_T)$, однако во многих прикладных задачах $p(x, t)$ считается известной.

Теорема 2. Пусть $Y_0(x) \in (W_0^1(\mathfrak{S}))^3$, $F(x, t) \in (L_{2,1}(\mathfrak{S}_T))^3$. Эволюционная система Навье-Стокса (4), (5) с условиями (6) слабо разрешима в пространстве $(\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T))^3$.

Литература

1. Провоторов В. В., Сергеев С. М. Математическое моделирование физических процессов в композиционных средах // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29, вып. 146. С. 188-203.
2. Барановский Е. С., Провоторов В. В., Артемов М. А., Жабко А. П. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results // Symmetry. 2021. Vol. 13, Article ID 1300.

3. Провоторов В. В., Волкова А. С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Научная книга, 2014. 188 с.
4. Lax P. D., Milgram N. Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential // Annals of Mathematics Studies. 1954. Vol. 33. P. 167-190.
5. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Москва: Мир, 1973. 414 с.

MSC 74G55

Solvability of the initial boundary value problem for the continuum transfer equation in the class of summable functions in a network-like domain

I.V. Guselnikova

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University

Abstract: A method for analyzing evolutionary models of transport processes in network-like domains is presented. The study is conducted using the Dirichlet problem for a parabolic equation in a weak formulation, where the differential equation itself is replaced by an integral identity. The proposed method is applicable with slight modifications in the case of elliptic, hyperbolic, and other problems for vector functions. An example of the latter is the linearized Navier-Stokes system, which is widely used in the description of network-like hydrodynamic processes.

Keywords: network-like domain, evolutionary model of the transfer process, Navier-Stokes system, solvability of initial boundary value problems.

References

1. Provotorov V. V., Sergeev S. M. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v kompozitsionnykh sredakh [Mathematical modeling of physical processes in composite media] // Vestnik rossiiskikh universitetov. Matematika. 2024. Vol. 29, iss. 146. P. 188-203. (in Russian)
2. Baranovskii E. S., Provotorov V. V., Artemov M. A., Zhabko A. P. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results // Symmetry. 2021. Vol. 13, Article ID 1300.
3. Provotorov V. V., Volkova A. S. Nachalno-kraevye zadachi s raspredeleennymi parametrami na grafe [Initial-boundary value problems with distributed parameters on graphs]. Voronezh: Nauchnaya kniga, 2014. 188 p. (in Russian)
4. Lax P. D., Milgram N. Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential // Annals of Mathematics Studies. 1954. Vol. 33. P. 167-190.
5. Lions J. L. Optimalnoe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi [Optimal control of systems governed by partial differential equations]. Moscow: Mir, 1973. 414 p. (in Russian)

УДК 517.929.4

Оценка перерегулирования дифференциально-разностных систем нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями

Евтина Д.С., Жабко А.П.

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация: В работе предложен метод оценки решений систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части. На практике такие запаздывания встречаются в задачах оптимального управления для динамических систем с задержкой информации различной природы. Случай систем с соизмеримыми запаздываниями уже был рассмотрен в других работах и приводился к системе с единственным запаздыванием. Случай же несоизмеримых запаздываний следует исследовать отдельно. Управляемые системы характеризуются двумя такими важными величинами, как запас устойчивости и перерегулирование. Представленный подход к оценке решений рассматриваемых систем позволяет найти величину перерегулирования. Полученный результат можно обобщить на системы с несколькими несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части, а также на случай других видов систем (например, почти периодических систем).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, системы с запаздыванием, запаздывание нейтрального типа, несоизмеримые запаздывания.

1. Введение

Исследованию систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и их приложений посвящено множество работ [1, 2]. На сегодняшний день системы уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа представляют большой интерес для исследований. Система с одним запаздыванием в нейтральной части рассмотрена в работе [3]. Известно также [3], что, когда соотношение запаздываний соизмеримо, систему можно свести к системе с одним запаздыванием. К сожалению, подход к оценке решений систем с запаздыванием нейтрального типа, представленный в работе [3], приводит к объёмным выкладкам для случая системы с несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части. Исходя из этого, было решено разработать собственный подход к оценке решений таких систем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую систему с запаздыванием нейтрального типа:

$$\frac{d}{dt} [x(t) - D_1 x(t - \tau) - D_2 x(t - h)] = A_0 x(t) + A_1 x(t - h) + \int_{-\tau}^0 Q(\theta) x(t + \theta) d\theta, \quad (1)$$

где A_0, A_1 и $D_1 \neq 0_{n \times n}$, $D_2 \neq 0_{n \times n}$ – заданные матрицы размерности $n \times n$, а компоненты матрицы $Q_{n \times n}(\theta)$ – ограниченные кусочно-постоянные функции. Далее будем

считать, что матрицы в нейтральной части системы коммутируют, т.е. $D_1 D_2 = D_2 D_1$, и система (1) экспоненциально устойчива [1]. Также положим $\tau \geq h$.

В случае, когда соотношение запаздываний τ и h есть рациональное число, система сводится к системе с одним запаздыванием [2]. В нашем случае данное соотношение иррационально, что и означает, что запаздывания несоизмеримы.

Так как система (1) стационарна, будем считать начальный момент времени $t_0 = 0$. Тогда каждое из решений системы (1) определяется начальной функцией φ из семейства $C^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) : x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]$.

Наша задача – провести оценку решений системы (1).

3. Основной результат

Известно [4], что, если система (1) экспоненциально устойчива и матрицы D_1 и D_2 в нейтральной части перестановочны, то выполняется условие $\|D_1\| + \|D_2\| < 1$.

Выразим решения системы (1) в интегральной форме:

$$x(t) = D_1 x(t - \tau) + D_2 x(t - h) + f(t), \quad (2)$$

где

$$f(t) = x(0) - D_1 x(-\tau) - D_2 x(-h) + A_0 \int_0^t x(\xi) d\xi + A_1 \int_0^t x(\xi - h) d\xi + \int_0^t \int_{-\tau}^0 Q(\theta) x(\xi + \theta) d\theta d\xi.$$

Введём оператор запаздывания $e^{-pr} \circ f(t) = f(t - r)$. Тогда множество

$$K = \left\{ A e^{-ph} + B e^{-p\tau} : A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, (A e^{-ph} + B e^{-p\tau}) \circ f(t) = A f(t - h) + B f(t - \tau) \right\}$$

образует коммутативное кольцо операторов.

После применения оператора запаздывания к правой части равенства (2) $k - 1$ раз можем привести решения системы (1) к следующему виду:

$$x(t) = (D_1 e^{-p\tau} + D_2 e^{-ph})^k \circ x(t) + \sum_{j=1}^k f_j(t),$$

где $f_1(t) = f(t)$, а $f_j(t)$, $j = \overline{2, k}$, задаются рекуррентно:

$$f_j(t) = D_1 f_{j-1}(t - \tau) + D_2 f_{j-1}(t - h).$$

Выразим решения через начальные функции. Рассмотрим такое значение k , которое будет удовлетворять условиям:

$$t - \tau \leq m\tau + (k - m)h \leq t, \quad m = \overline{0, k}. \quad (3)$$

Получим следующие оценки из неравенства (3):

$$\begin{aligned} \frac{t}{\tau} - 1 &\leq k_1 \leq k \leq \left\lceil \frac{t}{h} \right\rceil = k_2, \\ k &\leq m \leq k + \left\lceil \frac{t - kh}{\tau - h} \right\rceil \leq k + \left\lceil \frac{\tau}{h} \right\rceil, \quad \left\lceil \frac{\tau}{h} \right\rceil = \overline{m}. \end{aligned}$$

Лемма 1. Решения системы (1) представимы в виде

$$x(t) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \left(\sum_{m=0}^{\bar{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \varphi(t - m\tau - (k-m)h) + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\bar{m}} C_{k-1}^m D_1^m D_2^{k-1-m} f(t - m\tau - (k-1-m)h) \right).$$

Следствие 1. Решения системы (1) допускают оценку

$$\|x(t)\| \leq \sum_{k=k_1}^{k_2} \left(\sum_{m=0}^{\bar{m}} C_k^m \|D_1\|^m \|D_2\|^{k-m} \|\varphi(t - m\tau - (k-m)h)\| + \|f_k(t)\| \right) \leq \\ \leq \sum_{k=k_1}^{k_2} \left[\left(\|D_1\| + \|D_2\| \right)^k \|\varphi\|_\tau + \|f_k(t)\| \right],$$

$$\text{где } \|\varphi\|_\tau = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

4. Заключение

В результате исследования разработан метод оценки решений систем дифференциальных уравнений с двумя несоизмеримыми запаздываниями нейтрального типа. Полученная оценка на практике позволит найти величину перерегулирования управляемой системы, что, в свою очередь, позволит оптимизировать выбор управления. Данный подход в будущем планируется применить для систем, у которых более двух несоизмеримых запаздываний, для разностных систем, а также для систем с периодическими коэффициентами, период которых несоизмерим с запаздыванием.

Литература

1. Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.
2. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва: Наука, 1964. 128 с.
3. Kharitonov V. L. Exponential estimate for a simple neutral time delay system // Course of lectures given in St. Petersburg State University. 2012. 19 p.
4. Евтина Д. С., Жабко А. П. Исследование устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздыванием нейтрального типа // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». 2024. Т. 2. С. 67-69.

MSC 34K40

Estimation of solutions of neutral type differential-difference systems with two incommensurate delays

D.S. Evtina, A.P. Zhabko

Saint Petersburg State University

Abstract: This paper proposes a method for estimating solutions of systems of differential-difference equations of neutral type with two incommensurable delays in the neutral part. In practice, such delays occur in optimal control problems for dynamic systems with information delay of various nature. Systems with commensurable delays have already been considered in other works and were reduced to a system with a single delay. However, the case of incommensurable delays needs to be analyzed separately. Control systems are characterized by two important quantities: stability margin and overshoot. Presented approach allows finding the second one for the considered systems. The result can also be extended to systems with multiple incommensurable delays in the neutral part, as well as to other types of systems (such as almost periodic systems).

Keywords: differential equations, time-delay systems, neutral type delay, incommensurate delays.

References

1. Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.
2. Elsgoltz L. E. Vvedenie v teoriyu differentsialnykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument]. Moscow: Nauka, 1964. 128 p. (in Russian)
3. Kharitonov V. L. Exponential estimate for a simple neutral time delay system // Course of lectures given in St. Petersburg State University. 2012. 19 p.
4. Evtina D. S., Zhabko A. P. Issledovanie ustoichivosti sistem differentsialnykh uravneniy s zapazdyvaniem neytralnogo tipa [Stability analysis of neutral type delay differential equations] // Materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Ufimskaya osennaya matematicheskaya shkola» [Proceedings of the international scientific conference "Ufa Autumn Mathematical School"]. 2024. Vol. 2. P. 67-69. (in Russian)

УДК 517.9:539.3:532.5

Два способа исследования динамики упругой стенки канала квадратного сечения на основе метода Фурье

Жаркова А.С., Анкилов А.В.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: В работе исследуется динамика стенки трехмерного канала квадратного сечения, через который протекает поток идеальной несжимаемой жидкости в условиях задания закона изменения давления на входе и выходе. Рассматривается канал, жестко закрепленный с трех сторон и с незакрепленной четвертой упругой стороной (пластиной). На основе построенной математической модели, описываемой системой дифференциальных уравнений в частных производных, исследуется динамика незакрепленной упругой стенки канала с учетом взаимодействия с потоком жидкости в модели несжимаемой среды. Поведение упругого материала пластины описывается линейной моделью. Решение аэрогидродинамической части задачи в модели несжимаемой среды основано на представлении искомой функции давления газа в виде частичных сумм двойных рядов, для определения коэффициентов которых применены два способа. При этом аэрогидродинамическая нагрузка определяется через функцию, описывающую неизвестный прогиб стенки, для определения которой поставлена начально-краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных, решенная с помощью метода Галеркина.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, динамика, аэрогидроупругость, канал, упругая пластина, метод Фурье, метод Галеркина.

1. Постановка задачи для потенциала скорости

Работа является продолжением исследований [1–4]. В отличие от перечисленных работ рассматривается движение жидкости уже в трехмерном канале $J = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 < x < l, 0 < y < h, 0 < z < h\}$. Скорость невозмущенного потока идеальной несжимаемой жидкости равна V и направлена вдоль оси Ox . Предполагается, что упругой является только стенка при $y = 0$, т.е. l и h – длина и ширина пластины в недеформированном состоянии, а остальные стенки канала считаются недеформируемыми.

Если на входе и выходе из канала заданы законы изменения давления жидкости $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ соответственно, то краевая задача для неизвестных потенциала скорости возмущенного потока жидкости $\phi(x, y, z, t)$ и прогиба жестко закрепленной по краям пластины $w(x, z, t)$ примет вид:

$$\phi_{xx}(x, y, z, t) + \phi_{yy}(x, y, z, t) + \phi_{zz}(x, y, z, t) = 0, \quad (x, y, z) \in J; \quad (1)$$

$$\phi_y(x, 0, z, t) = w_t(x, z, t) + Vw_x(x, z, t), \quad (x, z) \in T_1 = \{(x, z) \in R^2 : 0 < x < l, 0 < z < h\}; \quad (2)$$

$$\phi_y(x, h, z, t) = 0, \quad (x, z) \in T_1; \quad (3)$$

$$\phi_z(x, y, 0, t) = \phi_z(x, y, h, t) = 0, \quad (x, y) \in T_2 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < l, 0 < y < h\}; \quad (4)$$

$$\phi_t(0, y, z, t) + V\phi_x(0, y, z, t) = \phi_1(t), \quad (y, z) \in T_3 = \{(y, z) \in R^2 : 0 < y < h, 0 < z < h\}; \quad (5)$$

$$\phi_t(l, y, z, t) + V\phi_x(l, y, z, t) = \phi_2(t), \quad (y, z) \in T_3; \quad (6)$$

$$\bar{P}(x, z, t) = -\rho(\phi_t(x, 0, z, t) + V\phi_x(x, 0, z, t)), \quad (x, z) \in T_1; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Mw_{tt}(x, z, t) + D(w_{xxxx}(x, z, t) + 2w_{xxzz}(x, z, t) + w_{zzzz}(x, z, t)) + \\ + \beta_2(w_{xxxxt}(x, z, t) + 2w_{xxzzt}(x, z, t) + w_{zzzzt}(x, z, t)) + N_{(x)}w_{xx}(x, z, t) + \\ + N_{(z)}w_{zz}(x, z, t) + \beta_1w_t(x, z, t) + \beta_0w(x, z, t) = \bar{P}(x, z, t); \end{aligned} \quad (8)$$

$$w(0, z, t) = 0, \quad w_x(0, z, t) = 0, \quad w(l, z, t) = 0, \quad w_x(l, z, t) = 0; \quad (9)$$

$$w(x, 0, t) = 0, \quad w_z(x, 0, t) = 0, \quad w(x, h, t) = 0, \quad w_z(x, h, t) = 0. \quad (10)$$

Индексы снизу обозначают частные производные по соответствующим переменным. Функция $\bar{P}(x, z, t)$ описывает аэродинамическое воздействие на пластину в точке (x, z) в момент времени t ; $M, D, \beta_0, \beta_1, \beta_2, N_{(x)}, N_{(z)}$ – постоянные параметры системы.

2. Постановка задачи для давления и решение аэродинамической части задачи методом Фурье

Запишем задачу (1)–(7) для функции давления жидкости $P(x, y, z, t)$:

$$P(x, y, z, t) = \phi_t(x, y, z, t) + V\phi_x(x, y, z, t); \quad (11)$$

$$P_{xx}(x, y, z) + P_{yy}(x, y, z) + P_{zz}(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in J; \quad (12)$$

$$P_y(x, 0, z, t) = w_{tt}(x, z, t) + 2Vw_{xt}(x, z, t) + V^2w_{xx}(x, z, t), \quad (x, z) \in T_1; \quad (13)$$

$$P_y(x, h, z, t) = 0, \quad (x, z) \in T_1; \quad (14)$$

$$P_z(x, y, 0, t) = P_z(x, y, h, t) = 0, \quad (x, y) \in T_2; \quad (15)$$

$$P(0, y, z, t) = \phi_1(t), \quad (y, z) \in T_3; \quad (16)$$

$$P(l, y, z, t) = \phi_2(t), \quad (y, z) \in T_3; \quad (17)$$

$$\bar{P}(x, z, t) = -\rho P(x, 0, z, t), \quad (x, z) \in T_1. \quad (18)$$

Согласно методу Фурье функцию давления $P(x, y, z, t)$ представим в виде

$$\begin{aligned} P(x, y, z, t) = \phi_1(t) + \frac{x}{l}(\phi_2(t) - \phi_1(t)) + 2 \sum_{m=1}^S P_m(t) \sin \nu_m x \operatorname{ch} \nu_m(h - y) + \\ + 2 \sum_{m=1}^S \sum_{r=1}^S P_{rm}(t) \sin \nu_m x \cos \mu_r z \operatorname{ch} \sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2}(h - y), \quad \nu_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \mu_r = \frac{r\pi}{h}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для уравнения Лапласа (12) справедливы краевые условия (14)–(17). Требуется выполнение условий (13) и (18), поэтому для определения неизвестных функций $P_m(t)$ и $P_{rm}(t)$ рассмотрим два способа.

1 способ. Для удовлетворения условия (18) подставим $P(x, y, z, t)$ в виде (19) в это условие:

$$\phi_1(t) + \frac{x}{l}(\phi_2(t) - \phi_1(t)) + 2 \sum_{m=1}^S P_m(t) \sin \nu_m x \operatorname{ch} \nu_m h +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^S \sum_{r=1}^S P_{rm}(t) \sin \nu_m x \cos \mu_r z \operatorname{ch} \sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2} h = -\frac{1}{\rho} \bar{P}(x, z, t). \quad (20)$$

Умножая обе части (20) на $\sin \nu_k x$ и на $\sin \nu_k x \cos \mu_j z$, затем интегрируя от 0 до l по переменной x и от 0 до h по переменной z , найдем функции $P_m(t)$ и $P_{rm}(t)$. При этом (19) примет вид:

$$\begin{aligned} P(x, y, z, t) = & \phi_1(t) + \frac{x}{l} (\phi_2(t) - \phi_1(t)) - 2 \sum_{m=1}^S \frac{(-1)^{m+1} \sin \nu_m x \operatorname{ch} \nu_m (h-y)}{h l \nu_m \operatorname{ch} \nu_m h} (\phi_2(t) - \phi_1(t)) - \\ & - 2 \sum_{m=1}^S \frac{\sin \nu_m x \operatorname{ch} \nu_m (h-y)}{\rho h l \operatorname{ch} \nu_m h} \iint_{T_1} \bar{P}(x, z, t) \sin \nu_m x dx dz - \\ & - 4 \sum_{m=1}^S \sum_{r=1}^S \frac{\sin \nu_m x \cos \mu_r z \operatorname{ch} \sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2} (h-y)}{\rho h l \operatorname{ch} \sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2} h} \iint_{T_1} \bar{P}(x, z, t) \sin \nu_m x \cos \mu_r z dx dz. \quad (21) \end{aligned}$$

Подставляя (8) в правую часть (21) и полученную функцию в граничное условие (13), получим уравнение для определения неизвестной функции деформации $w(x, z, t)$

$$\begin{aligned} w_{tt}(x, z, t) + 2V w_{xt}(x, z, t) + V^2 w_{xx}(x, z, t) = & \frac{2}{hl} \sum_{m=1}^S (-1)^{m+1} (\phi_2(t) - \phi_1(t)) \sin \nu_m x \operatorname{th} \nu_m h + \\ & + \frac{4}{\rho hl} \sum_{m=1}^S \sum_{r=1}^S \sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2} \sin \nu_m x \cos \mu_r z \operatorname{th} \sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2} h \cdot \iint_{T_1} (M w_{tt}(x, z, t) + \\ & + D(w_{xxxx}(x, z, t) + 2w_{xxzz}(x, z, t) + w_{zzzz}(x, z, t)) + N_{(x)} w_{xx}(x, z, t) + N_{(z)} w_{zz}(x, z, t) + \\ & + \beta_2(w_{xxxxt}(x, z, t) + 2w_{xxzzt}(x, z, t) + w_{zzzzt}(x, z, t)) + \beta_1 w_t(x, z, t) + \beta_0 w(x, z, t)) \cdot \\ & \cdot \sin \nu_m x \cos \mu_r z dz dx + \frac{2}{\rho hl} \sum_{m=1}^S \nu_m \sin \nu_m x \operatorname{th} \nu_m h \iint_{T_1} (M w_{tt}(x, z, t) + \\ & + D(w_{xxxx}(x, z, t) + 2w_{xxzz}(x, z, t) + w_{zzzz}(x, z, t)) + N_{(x)} w_{xx}(x, z, t) + N_{(z)} w_{zz}(x, z, t) + \\ & + \beta_2(w_{xxxxt}(x, z, t) + 2w_{xxzzt}(x, z, t) + w_{zzzzt}(x, z, t)) + \\ & + \beta_1 w_t(x, z, t) + \beta_0 w(x, z, t)) \sin \nu_m x dz dx, \quad (x, z) \in T_1. \quad (22) \end{aligned}$$

2 способ. Для удовлетворения условия (13), подставим $P(x, y, z, t)$ в виде (19) в это условие:

$$\begin{aligned} -2 \sum_{m=1}^S P_m(t) \nu_m \sin \nu_m x \operatorname{sh} \nu_m h - 2 \sum_{m=1}^S \sum_{r=1}^S P_{rm}(t) \sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2} \sin \nu_m x \cos \mu_r z \operatorname{sh} \sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2} h = \\ = w_{tt}(x, z, t) + 2V w_{xt}(x, z, t) + V^2 w_{xx}(x, z, t), \quad (x, z) \in T_1. \quad (23) \end{aligned}$$

Тогда функция (19) примет вид

$$P(x, y, z, t) = \phi_1(t) + \frac{x}{l} (\phi_2(t) - \phi_1(t)) - \frac{2}{hl} \sum_{m=1}^S \frac{\sin \nu_m x \operatorname{ch} \nu_m (h-y)}{\nu_m \operatorname{sh} \nu_m h} \iint_{T_1} (w_{tt}(x, z, t) +$$

$$+2Vw_{xt}(x, z, t) + V^2w_{xx}(x, z, t)) \sin \nu_m x dx dz - \frac{4}{hl} \sum_{m=1}^S \sum_{r=1}^S \frac{\sin \nu_m x \cos \mu_r z \operatorname{ch} \sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2} (h - y)}{\sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2} \operatorname{sh} \sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2} h} \cdot \iint_{T_1} (w_{tt}(x, z, t) + 2Vw_{xt}(x, z, t) + V^2w_{xx}(x, z, t)) \sin \nu_m x \cos \mu_r z dx dz.$$

Подставляя полученное выражение в (18), найдем правую часть уравнения (8). Оно примет вид

$$\begin{aligned} Mw_{tt}(x, z, t) + D(w_{xxxx}(x, z, t) + 2w_{xxzz}(x, z, t) + w_{zzzz}(x, z, t)) + N_{(x)}w_{xx}(x, z, t) + \\ + N_{(z)}w_{zz}(x, z, t) + \beta_2(w_{xxxxt}(x, z, t) + 2w_{xxzxt}(x, z, t) + w_{zzzxt}(x, z, t)) + \beta_1w_t(x, z, t) + \\ + \beta_0w(x, z, t) = -\rho \left(\phi_1(t) + \frac{x}{l} (\phi_2(t) - \phi_1(t)) \right) + \frac{2\rho}{hl} \sum_{m=1}^S \frac{\sin \nu_m x \operatorname{cth} \nu_m h}{\nu_m} \cdot \\ \cdot \iint_{T_1} (w_{tt}(x, z, t) + 2Vw_{xt}(x, z, t) + V^2w_{xx}(x, z, t)) \sin \nu_m x dx dz + \\ + \frac{4\rho}{hl} \sum_{m=1}^S \sum_{r=1}^S \frac{\sin \nu_m x \cos \mu_r z \operatorname{cth} \sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2} h}{\sqrt{\nu_m^2 + \mu_r^2}} \cdot \\ \cdot \iint_{T_1} (w_{tt}(x, z, t) + 2Vw_{xt}(x, z, t) + V^2w_{xx}(x, z, t)) \sin \nu_m x \cos \mu_r z dx dz. \quad (24) \end{aligned}$$

Решение начально-краевых задач (22), (9), (10) и (24), (9), (10) ищется методом Галеркина [5] в виде

$$w(x, z, t) = \sum_{n=1}^S \sum_{q=1}^S Q_{nq}(t) g_n(x) s_q(z). \quad (25)$$

Согласно краевым условиям (9), (10) функции $g_n(x)$, $s_q(z)$ должны удовлетворять условиям

$$g_n(0) = 0, \quad g_{nx}(0) = 0, \quad g_n(l) = 0, \quad g_{nx}(l) = 0, \quad (26)$$

$$s_q(0) = 0, \quad s_{qz}(0) = 0, \quad s_q(h) = 0, \quad s_{qz}(h) = 0. \quad (27)$$

Если системы функций $\{g_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и $\{s_q(z)\}_{q=1}^\infty$ полны на отрезках $[0, l]$ и $[0, h]$ соответственно, то ряд (25) абсолютно и равномерно сходится в области T_1 .

Подставляя функцию $w(x, z, t)$ в виде (25) в (22), (10) и (24), (10), умножая на $g_i(x)s_j(z)$, $i, j = \overline{1, S}$ и интегрируя по области T_1 , получим две задачи Коши для отыскания неизвестных функций $Q_{nq}(t)$.

Литература

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2009. 220 с.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2013. 322 с.

3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. Ульяновск: УлГТУ, 2015. 146 с.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. Ульяновск: УлГТУ, 2019. 201 с.
5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. 352 с.

MSC 74F10

Two methods based on the Fourier method for studying the dynamics of an elastic wall of a square channel

A.S. Zharkova, A.V. Ankilov

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The paper studies the dynamics of the wall of a three-dimensional square channel with an ideal incompressible fluid flow through it. The case of specifying a pressure change law at the inlet and outlet is considered. The channel is rigidly fixed on three sides and with an unfixed fourth elastic side (plate). Based on the constructed mathematical model described by a system of partial differential equations, the dynamics of an unfixed elastic channel wall is studied taking into account the interaction with the fluid flow in the incompressible medium model. The behavior of the elastic material of the plate is described by a linear model. The solution to the aerohydrodynamic part of the problem in the incompressible medium model is based on representing the desired gas pressure function as partial sums of double series, for finding the coefficients of which two methods are considered. In this case, the aerohydrodynamic load is determined through a function describing the unknown wall deflection, for which a partial differential equation is obtained, the solution of which is carried out using the Galerkin method.

Keywords: partial differential equations, dynamics, aerohydroelasticity, air duct, elastic plate, Fourier method, Galerkin method.

References

1. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Dinamika i ustoychivost uprugikh plastin pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii [Dynamics and stability of elastic plates under aero-hydrodynamic impact]. Ulyanovsk: UIGTU, 2009. 220 p. (in Russian)
2. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamicheskoi ustoychivosti deformiruemykh elementov konstruktsii pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii [Mathematical modeling in problems of dynamic stability of deformable structural elements under aero-hydrodynamic impact]. Ulyanovsk: UIGTU, 2013. 322 p. (in Russian)
3. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Funktsionaly Lyapunova v nekotorykh zadachakh dinamicheskoi ustoychivosti aerouprugikh konstruktsii [Lyapunov functionals in some problems of dynamic stability of aeroelastic structures]. Ulyanovsk: UIGTU, 2015. 146 p. (in Russian)
4. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Funktsionaly Lyapunova v nekotorykh zadachakh aerogidrouprugosti [Lyapunov functionals in some problems of aero-hydroelasticity]. Ulyanovsk: UIGTU, 2019. 201 p. (in Russian)
5. Fletcher K. Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moscow: Mir, 1988. 352 p. (in Russian)

УДК 519.63

Построение программного управления для дифференциально-разностной системы с линейно возрастающим запаздыванием

Жигалов В.С., Жабко А.П.

Санкт-Петербургский Государственный университет

Аннотация: В данной работе изучаются вопросы 0-управляемости и конструктивной идентифицируемости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. Для исследования этих вопросов были применены методы, использованные для аналогичных систем с постоянным запаздыванием в работах Хартовского В.Е., Метельского А.В. и Минюка С.А. Основным результатом исследования является расширение известных результатов на случай систем с линейно-возрастающим запаздыванием.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, линейно возрастающее запаздывание, программное управление.

1. Введение

В настоящее время не ослабевает актуальность исследования математических моделей, описываемых дифференциально-разностными уравнениями с линейно возрастающим запаздыванием [1]. Системы и уравнения с линейным запаздыванием встречаются в математических моделях динамики автомобильного потока на кольцевой автодороге, работы информационного сервера [2], смесительного бака [3] и пр.

Стоит отметить, что в отличие от автономных обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием и постоянными коэффициентами дифференциально-разностные уравнения с постоянными коэффициентами и линейным запаздыванием не являются стационарными. Данный факт усложняет их анализ, так как позволяет использовать не все методы, применимые для работы с обыкновенными уравнениями или уравнениями с постоянным запаздыванием.

2. Теорема о двойственности

Рассмотрим линейную систему дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием с управлением:

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = A\zeta(t) + A_1\zeta(\alpha t) + Bu(t), \quad t \geq 1; \quad (1)$$

при $0 < \alpha < 1$, с начальными условиями:

$$\zeta(t) = q(t), t \in [\alpha, 1], \quad (2)$$

где ζ - n -вектор решения с начальной кусочно-непрерывной функцией q , u - r -вектор управления, A, A_1, B - постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Дадим определение 0-управляемости начальной функции $q(t)$ из системы (1), (2) по аналогии с определением для уравнений с постоянным запаздыванием [4].

Определение 1. Функция $q(t)$ из начального условия (2) системы (1) является θ -управляемой, если $\exists t_1 > 1$ и существует кусочно-непрерывная функция $u(t), t \in T = [1, t_1]$, такие что

$$\zeta(t) = 0, t \in [\alpha t_1, t_1]. \quad (3)$$

Если условие (3) выполняется для любых функций $q(\cdot)$ из (2), то система (1) полностью θ -управляема.

Поставим системе (1), (2) в соответствие на промежутке T линейную систему с наблюдением:

$$\begin{cases} \frac{d\chi(t)}{dt} = -A'\chi(t) - \frac{1}{\alpha}A_1'\chi\left(\frac{t}{\alpha}\right), \\ \sigma(t) = B'\chi(t); \end{cases} \quad (4)$$

где «штрих» обозначает операцию транспонирования. Начальные условия:

$$\chi(t) = \phi\left(\frac{t_1}{t}\right), \quad t \in \left[t_1, \frac{t_1}{\alpha}\right]. \quad (5)$$

Для функции ϕ из граничного условия (5) должно выполняться условие:

$$P_1\phi(\alpha) + P_2\phi(1) = 0 \quad (6)$$

для некоторых матриц P_1, P_2 размера $n \times n$.

Дадим определение конструктивной идентифицируемости системы (4), также по аналогии с определением для систем с постоянным запаздыванием [4].

Определение 2. Система (4) с начальными условиями (5), (2) является конструктивно идентифицируемой в направлении $p(\cdot)$, если существует кусочно-непрерывная функция $v(t), t \in T$, такая что выполняется равенство:

$$\int_1^{t_1} v'(t)\sigma(t)dt = p'(1)\chi(1) + \int_1^{\frac{\alpha}{t_1}} p'(\alpha t)A_1'\chi(t)dt \quad (7)$$

для любой функции $\chi(t)$, удовлетворяющей условию (5). Функция $v(t)$ называется решающей функцией.

Если система (4) – конструктивно идентифицируема в направлении любых кусочно-непрерывных функций, то она полностью конструктивно идентифицируема.

Теорема 1. Если система (4) – конструктивно идентифицируема в направлении $p(\cdot)$, то начальная функция $q(t) = p(t)$ системы (1), (2) – θ -управляема функцией $u(t) = -v(t)$, где $v(t)$ – решающая функция для направления $p(\cdot)$ на промежутке T . Если начальная функция $q(t)$ системы (1), (2) θ -управляема функцией $u(t)$, то система (4) конструктивно идентифицируема в направлении $p(t) = q(t)$, причем $v(t) = -u(t), t \in T$.

Доказательство. Будем действовать по аналогии с авторами статьи [4]. Проинтегрируем по частям производную решения первого уравнения из (4), умноженную слева на $\zeta'(t)$ из (1), (2), на промежутке T и в соответствии с (1), (2), (4),

(5) получаем:

$$\zeta'(t_1)\chi(t_1) = \zeta'(1)\chi(1) - \int_{t_1}^{\frac{t_1}{\alpha}} \zeta'(\alpha t) A'_1 \chi(t) dt + \int_1^{\frac{t_1}{\alpha}} \zeta'(\alpha t) A'_1 \chi(t) dt + \int_1^{t_1} u'(t) B' \chi(t) dt \quad (8)$$

Докажем первую часть теоремы. Пусть система (4) является конструктивно идентифицируемой в направлении $p(\cdot)$, в качестве решающей функции на промежутке T выступает $v(t)$, т.е. выполняются равенства (7) и (8), для любых $\chi(t)$. Далее при подстановке (8) в (7) с учетом начальных условий (2), (5), наблюдения в (4) и $p(t) = q(t)$, $t \in [\alpha, 1]$ получаем:

$$\int_1^{t_1} v'(t) \sigma(t) dt = \zeta'(t_1) \chi(t_1) + \int_{t_1}^{\frac{t_1}{\alpha}} \zeta'(\alpha t) A'_1 \chi(t) dt - \int_1^{t_1} u'(t) \sigma(t) dt$$

далее, при условии $u(t) = -v(t)$, $t \in T$ получаем:

$$\zeta'(t_1) \chi(t_1) + \int_{t_1}^{\frac{t_1}{\alpha}} \zeta'(\alpha t) A'_1 \chi(t) dt = \zeta'(t_1) \phi(1) + \int_{t_1}^{\frac{t_1}{\alpha}} \zeta'(\alpha t) A'_1 \phi\left(\frac{t_1}{t}\right) dt = 0. \quad (9)$$

Последнее равенство выполняется для всех кусочно-непрерывных функций $\phi(t)$, удовлетворяющих (2). Следовательно [5], $\zeta(t) = 0$, $t \in [\alpha t_1, t_1]$, и начальная функция $q(t)$ системы (1) - 0-управляема функцией $u(t) = -v(t)$.

Для доказательства второй части теоремы нужно начать с равенства (9) и произвести рассуждения выше в обратном порядке.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Следствие 1. Если система (4) полностью конструктивно идентифицируема, то система (1), (2) полностью 0-управляема, и наоборот.

3. Заключение

Таким образом, в работе получена теорема двойственности для задач 0-управляемости и конструктивной идентифицируемости линейных систем с линейно возрастающим запаздыванием. Данный результат может быть полезен для получения конструктивных методов построения программного управления в системах с линейно возрастающим запаздыванием.

Литература

1. Хартовский В. Е. Задачи идентификации и управления выходом для систем с запаздываниями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 17-31.
2. Жабко А. П., Чиждова О. Н. Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Т. 11, № 3. С. 105-115.
3. Жабко А. П., Чиждова О. Н. Гибридный метод анализа устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием

- // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, № 4. С. 843-850.
4. Метельский А. В., Минюк С. А. Полная управляемость и полная конструктивная идентифицируемость вполне регулярных алгебро-дифференциальных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 3. С. 311-327.
 5. Li Y., Liu Y. Preprints of the 13th World Congress IFAC, San Francisco, USA, 30 June - 5 July 1996. Vol. D. P. 79-84.

MSC 93B05

Construction of program control for the differential-difference system with linearly increasing delay

V.S. Zhigalov, A.P. Zhabko

Saint-Petersburg State university

Abstract: In this paper, the issues of 0-controllability and constructive identifiability of linear differential-difference systems with linearly increasing delay are studied. To study these issues, the methods used for similar systems with a constant delay in the works of V.E. Khartovsky, A.V. Metelsky, and S.A. Minyuk were applied. The main result of the study is an extension of the known results to the case of systems with linearly increasing delay.

Keywords: differential-difference equations, linearly increasing delay, program control.

References

1. Khartovskii V. E. Zadachi identifikatsii i upravleniya vykhodom dlya sistem s zapazdyvaniyami [Identification and output control problems for time-delay systems] // *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 2011. No. 5. P. 17-31. (in Russian)
2. Zhabko A. P., Chizhova O. N. Analiz ustoichivosti odnorodnogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya s lineinym zapazdyvaniem [Stability analysis of homogeneous differential-difference equation with linear delay] // *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya* [Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes]. 2015. Vol. 11, no. 3. P. 105-115. (in Russian)
3. Zhabko A. P., Chizhova O. N. Gibridnyi metod analiza ustoichivosti lineinykh differentsial'no-raznostnykh sistem s lineino vozrastayushchim zapazdyvaniem [Hybrid method for stability analysis of linear differential-difference systems with linearly increasing delay] // *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences]. 2015. Vol. 20, no. 4. P. 843-850. (in Russian)
4. Metel'skii A. V., Minyuk S. A. Polnaya upravlyaemost' i polnaya konstruktivnaya identifikatsionnaya sposobnost' vpolne reguliruyemykh algebro-differentsial'nykh sistem s zapazdyvaniem [Complete controllability and complete constructive identifiability of completely regular algebraic-differential systems with delay] // *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. 2007. Vol. 43, no. 3. P. 311-327. (in Russian)
5. Li Y., Liu Y. Preprints of the 13th World Congress IFAC, San Francisco, USA, 30 June - 5 July 1996. Vol. D. P. 79-84.

УДК 51-7

Параллельный алгоритм для моделирования нестационарного процесса в слое катализатора*

Иншакова А.С.¹, Язовцева О.С.², Губайдуллин И.М.³

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН²,
Институт нефтехимии и катализа РАН³

Аннотация: В статье представлен сравнительный анализ параллельных алгоритмов на основе технологии OpenMP для моделирования нестационарного процесса в слое катализатора со сферической формой зерна. Химическая реакция описана одной стадией. Математическая модель включает в себя уравнения диффузии-реакции для зерна катализатора, теплопроводности для зерна катализатора и тепломассопереноса для газа в слое катализатора. Исследовано ускорение алгоритма в случае применения параллельного счета к различным вычислительным этапам. Наибольшего значения ускорение достигает при параллельном расчете процессов в слое катализатора.

Ключевые слова: нестационарные процессы, параллельный алгоритм, OpenMP.

1. Постановка задачи

Трудоемкость расчетов при исследовании нестационарных физико-химических процессов предполагает использование параллельных технологий при программной реализации алгоритмов [1]. В условиях лаборатории не всегда существует возможность удаленного подключения к высокопроизводительным системам, поэтому актуально использование технологии OpenMP для проведения вычислительных экспериментов на персональных компьютерах и ноутбуках.

Рассмотрена математическая модель, описывающая одностадийный химический процесс [2]. В модели учитывается диффузия компонент реакционной смеси в поры зерна и посредством граничных условий их выход в общий газовый поток. Теплосоперенос по слою катализатора учитывается для двух фаз. Для скелета катализатора записано уравнение теплопроводности с интегральным источниковым членом. Для газа в слое катализатора записано уравнение переноса, аналогично учитывается массоперенос по слою катализатора.

Система уравнений смешанного типа, отвечающая математической модели, имеет вид:

$$\varepsilon_z \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{D_{eff}}{\hat{r}^2} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r}^2 \frac{\partial y}{\partial \hat{r}} \right) - W, \quad (1)$$

$$c_z \frac{\partial \hat{T}_z}{\partial t} = -\alpha S_z (\hat{T}_z - \hat{T}_g) + \lambda_{eff} \frac{\partial^2 \hat{T}_z}{\partial \hat{t}^2} + \frac{\rho}{V} \int_0^V QW dV, \quad (2)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -W, \quad (3)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Института нефтехимии и катализа Российской академии наук (тема № FMRS-2025-0031).

$$uc_g \frac{\partial \hat{T}_g}{\partial \hat{l}} = \alpha S_z (\hat{T}_z - \hat{T}_g), \quad (4)$$

$$u \frac{\partial x}{\partial \hat{l}} = \beta S_z (y - x) \quad (5)$$

Здесь ε_z – пористость зерна; $y(t, \hat{l}, \hat{r})$, – мольная доля кислорода в газовой фазе в порах зерна; t – время, с; $\hat{r}$ – пространственная координата по радиусу зерна катализатора; $\hat{l}$ – пространственная координата по длине слоя; D_{eff} – коэффициент диффузии реакционной смеси в порах зерна, м²/с; $\hat{T}_z$ – температура слоя катализатора, К; $\hat{T}_g$ – температура газа, К; c_z – эффективный коэффициент теплоемкости катализатора, Дж/м³/К; α – коэффициент теплообмена, Вт/м²/К; S_z – удельная площадь поверхности катализатора, м²/м³; λ_{eff} – эффективный коэффициент теплопроводности катализатора, Вт/м/К; Q – тепловой эффект реакции, Дж/кг; u – скорость движения газового потока, м/с; x – мольная доля кислорода в газе в слое катализатора; β – коэффициент массообмена, м/с; R – радиус зерна, м; L – длина слоя катализатора, м.

Разностная схема носит явно-неявный характер. Неявная аппроксимация применена к линейным уравнениям, что позволяет сохранить эффективность алгоритма при реализации с использованием параллельных технологий [3].

Программа написана на языке C++ с использованием библиотеки OpenMP для параллельных вычислений на многопроцессорных системах. Алгоритм протестирован на устройстве Macbook Pro M1 2020. Количество ядер 8 (4 производительности и 4 эффективности). Было протестировано несколько вариантов параллельного расчета: внешнего цикла по длине слоя катализатора, внутреннего цикла по зерну катализатора и вложенная параллелизация обоих циклов. В программной реализации предусмотрен случай гонки данных (одновременного изменения одной и той же переменной без синхронизации). В контексте многозадачности гонка данных возникает, когда два или более потока одновременно обращаются к общей памяти, что нарушает корректность выполнения программы и ее производительность.

2. Сравнительный анализ ускорения алгоритмов

В качестве наглядных примеров представлены вычислительные эксперименты для 30 секунд технологического времени при различном количестве расчетных ячеек.

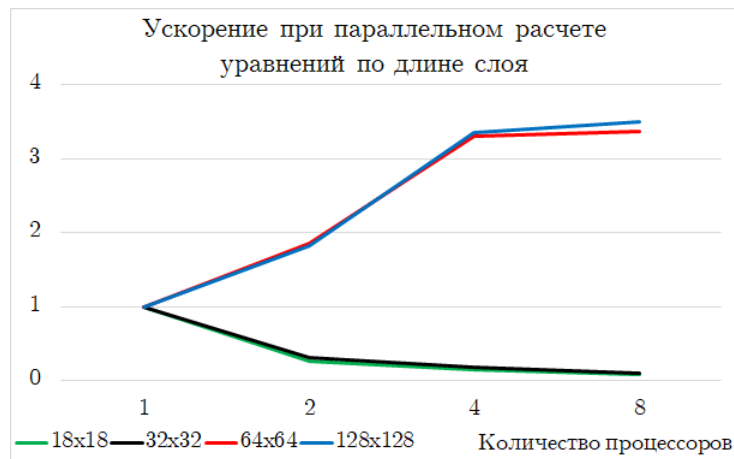


Рис. 1. Ускорение алгоритма для различных размерностей расчетной сетки при применении параллельного счета к циклу по длине слоя

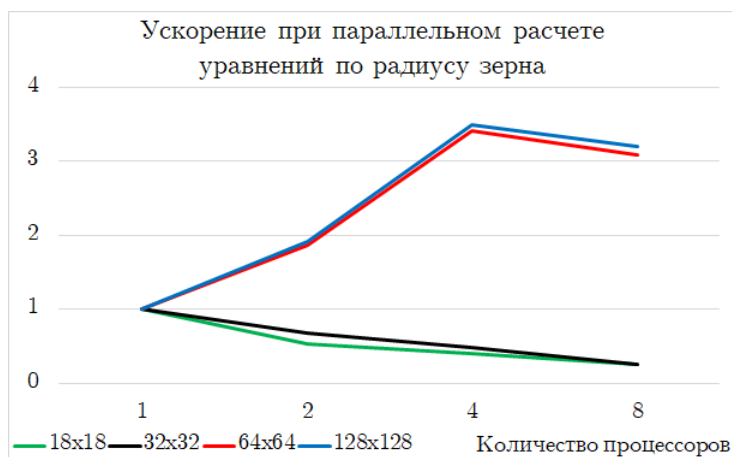


Рис. 2. Ускорение алгоритма для различных размерностей расчетной сетки при применении параллельного счета к циклу по зерну катализатора

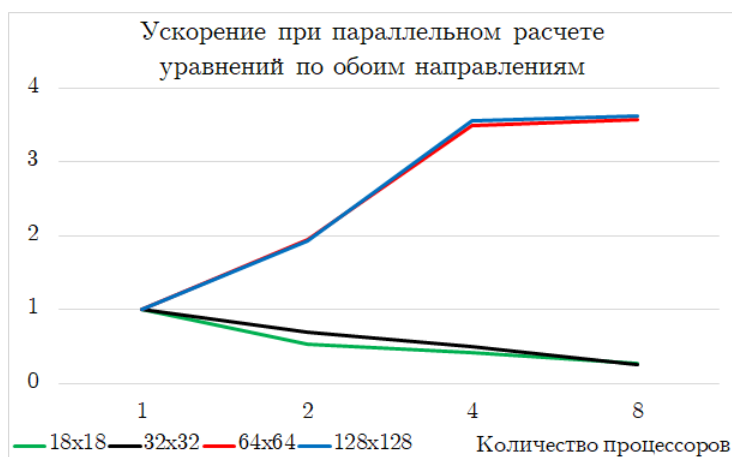


Рис. 3. Ускорение алгоритма для различных размерностей расчетной сетки при применении параллельного счета к обоим пространственным циклам

Как видно из графиков, ускорение параллельного алгоритма при небольших размерах расчетной сетки достаточно мало в силу большой затраты ресурсов на создание и управление потоками, в также несбалансированной нагрузки между ними. Ускорение на больших размерах сетки адекватно.

При расчете абсолютного значения ускорения наилучшие результаты показывает параллельный расчет обоих пространственных циклов, однако, при увеличении количества процессоров его рост замедляется. Тенденция к увеличению ускорения наблюдается при применении параллельного счета к решению уравнений по длине слоя катализатора.

Литература

1. Губайдуллин И. М., Пескова Е. Е., Язовцева О. С., Загоруйко А. Н. Численное моделирование окислительной регенерации сферического зерна катализатора // Математическое моделирование. 2022. Т. 34, № 11. С. 48-66. DOI: 10.20948/mm-2022-11-04.

2. Reshetnikov S. I., Petrov R., Zazhigalov S., Zagoruiko A. N. Mathematical modeling of regeneration of coked Cr-Mg catalyst in fixed bed reactors // Chemical Engineering Journal. 2020. Vol. 380. P. 122374. DOI: 10.1016/j.cej.2019.122374.
3. Yazovtseva O. S. Numerical Study of Wave Processes during Oxidative Regeneration of a Stationary Catalyst Layer // Mathematical Models and Computer Simulations. 2024. Vol. 16, no. S2. P. S272-S281. DOI: 10.1134/S2070048224700972.

MSC 34D20

Parallel algorithm for modeling an unsteady process in a catalyst layer

A.S. Inshakova¹, O.S. Yazovtseva², I.M. Gubaydullin³

National Research Mordovia State University¹, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences ², Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS ³

Abstract: The article presents a comparative analysis of parallel algorithms based on OpenMP technology for modeling an unsteady process in a catalyst layer with spherical grain shapes. The chemical reaction is described in one stage. The mathematical model includes the diffusion-reaction equations for the catalyst grain, heat equation for the catalyst grain, and heat and mass transfer for the gas in the catalyst layer. The acceleration of the algorithm in the case of applying parallel computation to various computational stages is investigated. The greatest acceleration is achieved when processes in the catalyst layer are calculated in parallel.

Keywords: unsteady processes, parallel algorithm, OpenMP.

References

1. Gubaydullin I. M., Peskova E. E., Yazovtseva O. S., Zagoruiko A. N. Chislennoe modelirovanie oksislitelnoi regeneratsii sfericheskogo zerna katalizatora [Numerical modeling of oxidative regeneration of spherical catalyst grains] // Matematicheskoe modelirovanie. 2022. Vol. 34, no. 11. P. 48-66. DOI: 10.20948/mm-2022-11-04. (in Russian)
2. Reshetnikov S. I., Petrov R., Zazhigalov S., Zagoruiko A. N. Mathematical modeling of regeneration of coked Cr-Mg catalyst in fixed bed reactors // Chemical Engineering Journal. 2020. Vol. 380. P. 122374. DOI: 10.1016/j.cej.2019.122374.
3. Yazovtseva O. S. Numerical Study of Wave Processes during Oxidative Regeneration of a Stationary Catalyst Layer // Mathematical Models and Computer Simulations. 2024. Vol. 16, no. S2. P. S272-S281. DOI: 10.1134/S2070048224700972.

УДК 519.622.2

Численные исследования аттрактора Лоренца в системе Шимицу-Мориока*

Корякин В.А., Казаков А.О.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Аннотация: В исследовании показано существование двух типов каскадов точек inclination flip, приводящих к появлению счетного числа областей с аттракторами Лоренца. Первый каскад происходит вдоль кривой первого касания (нарушение псевдогиперболичности), второй – трансверсально к этой кривой.

Ключевые слова: аттрактор Лоренца, гомоклинические бифуркации, система Шимицу-Мориока.

Аттрактор Лоренца [1] является одним из наиболее известных и узнаваемых типов хаотических аттракторов. Его основным свойством является то, что этот аттрактор является устойчиво хаотическим, т.е. имеет положительный старший показатель Ляпунова в открытой области пространства параметров. Доказательство устойчивости хаотичности аттрактора является сложной задачей. Для аттрактора Лоренца (при классических значениях параметров) такое доказательство было выполнено в работе [2] путем проверки условий геометрической модели Афраимовича-Быкова-Шильникова [3, 4] с помощью методов доказательных вычислений. Альтернативный подход к установлению существования аттрактора Лоренца заключается в проверке условий критериев Шильникова [5], выполнение которых гарантирует рождение аттрактора Лоренца из пары гомоклинических петель седлового состояния равновесие при некоторых дополнительных условиях вырождения. Шильников описал три таких вырождения, одно из которых – бифуркация inclination flip (переворот наклона) для пары гомоклинических петель.

В этом докладе мы изучаем аттрактор Лоренца в модели Шимицу-Мориока [6]. Мы показываем, что существует два типа каскадов точек inclination flip, которые приводят к появлению счетного числа областей с аттракторами Лоренца. Первый каскад происходит вдоль кривой первого касания (нарушение псевдогиперболичности), второй – трансверсально к этой кривой.

Литература

1. Lorenz E. N. Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, no. 2. P. 130-141.
2. Tucker W. The Lorenz attractor exists // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics. 1999. Vol. 328, no. 12. P. 1197-1202.
3. Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. On the origin and structure of the Lorenz attractor // Doklady Akademii Nauk SSSR. 1977. Vol. 234. P. 336-339.

*Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)

4. Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. Attractive nonrough limit sets of Lorenz-attractor type // Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva. 1982. Vol. 44. P. 150-212.
5. Shilnikov L. P. The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors // Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 1981. Vol. 36. P. 240-241.
6. Shilnikov A. L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka model // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. Vol. 62, no. 1-4. P. 338-346.

MSC 37G20, 37G35

Numerical studies of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka system

V.A. Koryakin, A.O. Kazakov

HSE University

Abstract: The study shows the existence of two types of inclination flip points cascades, leading to the appearance of a countable number of regions with Lorenz attractors. The first cascade occurs along the curve of the first tangent (violation of pseudo-hyperbolicity), the second – transversely to this curve.

Keywords: Lorenz attractor, homoclinic bifurcation, Shimizu-Morioka system

References

1. Lorenz E. N. Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, no. 2. P. 130-141.
2. Tucker W. The Lorenz attractor exists // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics. 1999. Vol. 328, no. 12. P. 1197-1202.
3. Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. On the origin and structure of the Lorenz attractor // Doklady Akademii Nauk SSSR [Soviet Mathematics Doklady]. 1977. Vol. 234. P. 336-339. (in Russian)
4. Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. Attractive nonrough limit sets of Lorenz-attractor type // Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva [Transactions of the Moscow Mathematical Society]. 1982. Vol. 44. P. 150-212. (in Russian)
5. Shilnikov L. P. The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors // Uspekhi Matematicheskikh Nauk [Russian Mathematical Surveys]. 1981. Vol. 36. P. 240-241. (in Russian)
6. Shilnikov A. L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka model // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. Vol. 62, no. 1-4. P. 338-346.

УДК 517.9

Анализ динамики двумерной модели нейрона Хиндмарша–Роуза*

Костромина О.С.

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Аннотация: Используя известные методы качественной теории и теории бифуркаций динамических систем на плоскости, проводится аналитический и численный анализ динамики двумерной модели нейрона Хиндмарша–Роуза в зависимости от ее параметров. Строится бифуркационная диаграмма на плоскости управляющих параметров. Бифуркационные кривые, часть которых получена аналитически, часть – численно, разбивают плоскость параметров на тринадцать областей с разной топологией фазовых портретов, установленной для каждой полученной области.

Ключевые слова: модель Хиндмарша–Роуза, предельные циклы, бифуркации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему Хиндмарша–Роуза, которая описывает динамику электрической активности отдельного биологического нейрона:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 + bx^2 + I - z, \\ \dot{y} = c - dx^2 - y, \\ \dot{z} = \varepsilon(s(x - r) - z). \end{cases} \quad (1)$$

Изначально нелинейная система Хиндмарша–Роуза описывалась системой двух дифференциальных уравнений первого порядка [1], однако в результате анализа ряда проведенных экспериментов были обнаружены некоторые новые, не учитываемые ранее, функциональные режимы нейронов. Это стало причиной, по которой Хиндмарш и Роуз добавили третье уравнение, что позволило изучить поведение нейрона с учетом этих новых режимов [2]. Данную нелинейную модель можно рассматривать как обобщение модели Фитцхью–Нагумо и упрощение модели Ходжкина–Хаксли.

Переменная x в системе (1) описывает мембранный потенциал нейрона, переменные y и z описывают активацию и дезактивацию быстрых и медленных ионных токов, протекающих через мембрану; положительные параметры a, b, c, d, s и отрицательный параметр r характеризуют нелинейные свойства проводимости мембраны. Скорость изменения переменной z определяется малым параметром $0 < \varepsilon \ll 1$, поэтому $\dot{z}$ определяет динамику медленного калиевого тока, а $\dot{y}$ — быстрого натриевого тока. Параметр I , изменяющийся в диапазоне от -10 до 10, описывает внешний ток, подаваемый на нейрон. Модель имеет восемь параметров. Обычно некоторые из них фиксируют, остальные определяют как параметры управления динамическими режимами системы. Так, часто в качестве управляющего параметра берется параметр I . Другими управляющими параметрами являются a, b, c или d , моделирующие рабо-

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, грант № 24-11-00339.

ту быстрых ионных токов. Типичными значениями параметров являются $a = c = 1$, $b = 3$, $d = 5$, $s = 4$, $r = -\frac{8}{5}$ [3, 4].

В силу малости параметра ε данную систему уравнений можно разбить на быструю и медленную подсистемы [3, 4]. В данной работе рассматривается динамика быстрой подсистемы, которую составляют первые два уравнения для переменных x и y . При $\varepsilon = 0$ значение переменной z является фиксированным и входит в быструю подсистему в качестве параметра. В результате получим двумерную систему Хиндмарша–Роуза:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 + bx^2 + I, \\ \dot{y} = c - dx^2 - y. \end{cases} \quad (2)$$

Цель данной работы — изучить возможные бифуркации двумерной системы Хиндмарша–Роуза, используя известные методы качественной теории и теории бифуркаций динамических систем на плоскости [5, 6].

2. Бифуркационная диаграмма

Разбиение плоскости параметров (d, I) на области с разной топологией фазовых портретов системы (2) при $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ показано на рис. 1, 2.

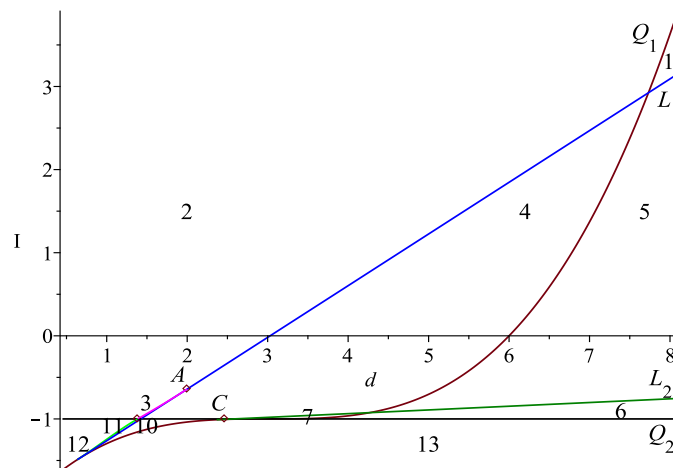


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для системы (2) при $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

Получено семь бифуркационных кривых, четыре из которых Q_1 , Q_2 , L_1 , L_2 найдены аналитически. Бифуркационные кривые Q_1 и Q_2 являются дискриминантными кривыми. Участок кривой Q_2 от точки B до точки C соответствует бифуркации петли сепаратрисы седло-узла. Остальные два участка кривой Q_2 и кривая Q_1 отвечают седло-узловой бифуркации. Бифуркационные кривые L_1 и L_2 отвечают бифуркациям Андронова–Хопфа: на участке кривой L_1 выше точки A и на кривой L_2 происходит суперкритическая бифуркация (мягкая потеря устойчивости), на участке кривой L_1 ниже точки A происходит субкритическая бифуркация (жесткая потеря устойчивости). Бифуркационные кривые L_3 , L_4 и L_5 получены численно. L_3 отвечает бифуркации двукратного предельного цикла. Она выходит из точки $A \in L_1$, координаты которой (d_0, I_0) найдены аналитически, и заканчивается в точке B на дискриминантной кривой Q_2 . L_4 и L_5 отвечают бифуркациям петли сепаратрисы седла. L_4 (L_5) выходит из точки касания кривой L_1 (L_2) с Q_1 , в которой седловая величина обращается в нуль, и заканчивается в точке B (C) на дискриминантной кривой Q_2 .

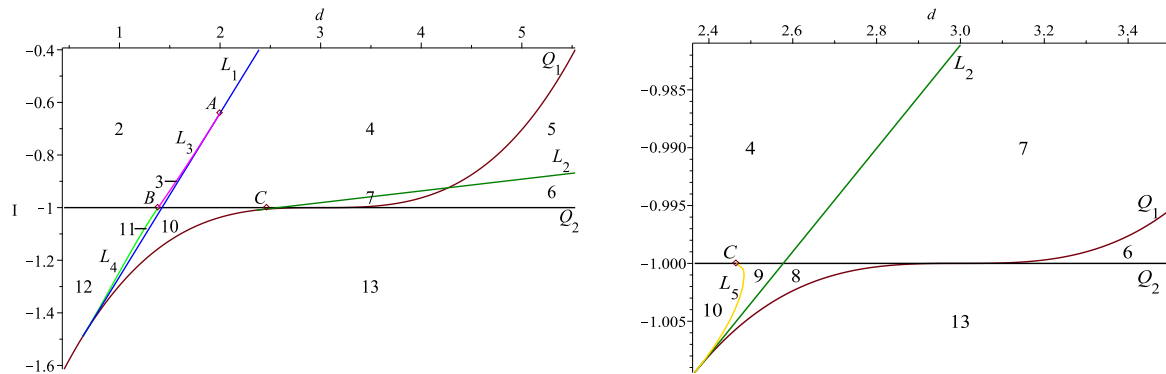


Рис. 2. Увеличенные фрагменты бифуркационной диаграммы.

3. Заключение

Двумерная модель нейрона Хиндмарша–Роуза демонстрирует бистабильное существование устойчивого предельного цикла и устойчивого состояния равновесия. Устойчивое состояние равновесия соответствует покою нейрона, устойчивый предельный цикл — периодической генерации нейроном спайков.

Устойчивое состояние равновесия данной модели может:

- исчезнуть в результате седло-узловой бифуркации, которая может произойти как вне, так и на петле сепаратрисы седло-узла;
- потерять устойчивость вследствие суперкритической или субкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

Устойчивый предельный цикл данной модели может исчезнуть вследствие:

- бифуркации петли сепаратрисы седло-узла;
- суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа;
- бифуркации петли сепаратрисы седла;
- бифуркации двукратного предельного цикла.

Литература

1. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of the nerve impulse using two first-order differential equations // Nature. 1982. Vol. 296, no. 5853. P. 162-164.
2. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A Model of Neuronal Bursting Using Three Coupled First Order Differential Equations // Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences. 1984. Vol. 221, no. 1222. P. 87-102.
3. Коломиец М., Шильников А. Методы качественной теории для модели Хиндмарш-Роуз // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 1. С. 23-52.
4. Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щапин Д. С., Некоркин В. И. Нелинейные динамические модели нейронов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 4. С. 5-58.
5. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. Москва: Наука, 1967. 488 с.

6. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Москва: Наука, 1990. 490 с.

MSC 34C15

Analysis of the dynamics of a two-dimensional Hindmarsh–Rose neuron model

O.S. Kostromina

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Abstract: Using known methods of qualitative theory and bifurcation theory of dynamic systems on a plane, an analytical and numerical analysis of the dynamics of a two-dimensional Hindmarsh–Rose neuron model is carried out depending on its parameters. A bifurcation diagram is constructed on the plane of control parameters. Bifurcation curves, some of which are obtained analytically, some of which are obtained numerically, divide the plane of parameters into thirteen regions with different topologies of phase portraits, which are established for each obtained region.

Keywords: Hindmarsh–Rose model, limit cycles, bifurcations.

References

1. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of the nerve impulse using two first-order differential equations // *Nature*. 1982. Vol. 296, no. 5853. P. 162-164.
2. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A Model of Neuronal Bursting Using Three Coupled First Order Differential Equations // *Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*. 1984. Vol. 221, no. 1222. P. 87-102.
3. Kolomiets M., Shilnikov A. Metody kachestvennoi teorii dlya modeli Khindmarsh-Rouz [Methods of qualitative theory for the Hindmarsh-Rose model] // *Nelineinaya dinamika [Nonlinear Dynamics]*. 2010. Vol. 6, no. 1. P. 23-52. (in Russian)
4. Dmitrichev A. S., Kasatkin D. V., Klin'shov V. V., Kirillov S. Yu., Maslennikov O. V., Shchapin D. S., Nekorkin V. I. Nelineinye dinamicheskie modeli neironov [Nonlinear dynamical models of neurons] // *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineinaya dinamika [University News. Applied Nonlinear Dynamics]*. 2018. Vol. 26, no. 4. P. 5-58. (in Russian)
5. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. Teoriya bifurkatsii dinamicheskikh sistem na ploskosti [Theory of bifurcations of dynamical systems on the plane]. Moscow: Nauka, 1967. 488 p. (in Russian)
6. Bautin N. N., Leontovich E. A. Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti [Methods and techniques for qualitative investigation of dynamical systems on the plane]. Moscow: Nauka, 1990. 490 p. (in Russian)

УДК 517.9

Об условиях существования вырожденных резонансных уровней в маятниковых уравнениях при квазипериодических неконсервативных параметрических возмущениях*

Костромина О.С.

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Аннотация: Проводится аналитическое и численное исследование периода движения на замкнутых фазовых кривых для маятниковых уравнений с нелинейностью в виде тригонометрического полинома второй и третьей степени. Определяются условия существования вырожденных уровней с порядками вырождения $j = 2$ и $j = 3$ для таких уравнений. При воздействии квазипериодических неконсервативных возмущений вырожденный уровень может стать резонансным (при выполнении условия соизмеримости собственной частоты соответствующей невозмущенной системы с частотами квазипериодического возмущения). Тогда говорим, что имеет место вырожденный резонанс с порядком вырождения j . Топологические структуры вырожденных резонансных зон и задача о синхронизации колебаний при прохождении инвариантного тора через вырожденную резонансную зону с порядками вырождения $j = 2$ и $j = 3$ хорошо изучены.

Ключевые слова: маятниковые уравнения, квазипериодические неконсервативные возмущения, вырожденный резонанс.

1. Введение

Работы [1–3] посвящены изучению квазипериодических по времени неконсервативных возмущений двумерных нелинейных гамильтоновых систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), \end{cases} \quad (1)$$

где ε – малый положительный параметр; $\theta_i = \omega_i t$, $i = \overline{1, m}$; функции g и f – непрерывные и 2π -периодические по θ_i ; гамильтониан H и функции g и f – достаточно гладкие по переменным x и y в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ или $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$; $g'_x + f'_y \neq 0$ в области D (условие неконсервативности возмущения); $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ – несоизмеримые над полем рациональных чисел частоты возмущения. Рассматриваются возмущения, содержащие нелинейные параметрические члены, зависящие как от фазовых координат, так и от времени, вида: $f = f_0(x, y) + f_1(x, y)u(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, $g = g_0(x, y) + g_1(x, y)v(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$.

Относительно соответствующей невозмущенной системы ($\varepsilon = 0$) предполагается, что она является нелинейной гамильтоновой и имеет ячейку $D_0 \subset D$, заполненную

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, грант № 24-21-00050.

замкнутыми фазовыми кривыми $H(x, y) = h$, $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$, и не содержащую малых окрестностей центров и сепаратрис.

Система (1) в переменных «действие I – угол θ » запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon(f(X, Y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)X'_\theta - g(X, Y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)Y'_\theta), \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon(-f(X, Y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)X'_I + g(X, Y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)Y'_I), \\ \dot{\theta}_i = \omega_i, \quad i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $X(I, \theta)$, $Y(I, \theta)$ – решение невозмущенной системы на замкнутых фазовых кривых $H(x, y) = h(I)$, $\omega(I) = \frac{2\pi}{T(h)}$ – собственная частота невозмущенной системы, $T(h)$ – период движения на замкнутых фазовых кривых. Фазовое пространство системы (2) – декартово произведение $[I_{\min}, I_{\max}] \times \mathbb{T}^{m+1}$, где $\mathbb{T}^{m+1}$ – $(m+1)$ -мерный тор, $I_{\min} \equiv I(h_{\min})$, $I_{\max} \equiv I(h_{\max})$.

Определение 1. Уровень $I = I_0$ (замкнутую фазовую кривую $H(x, y) = h(I_0)$ невозмущенной системы) будем называть вырожденным уровнем с порядком вырождения j , если выполнено условие:

$$\omega^{(k)}(I_0) = 0, \quad k = \overline{1, j-1}; \quad \omega^{(j)}(I_0) \neq 0, \quad j > 1.$$

Если $j = 1$, то уровень $I = I_0$ будем называть невырожденным. Здесь $I_0 \in (I_{\min}, I_{\max})$.

Определение 2. Уровень $I = I_{n\mathbf{k}}$ (замкнутую фазовую кривую $H(x, y) = h(I_{n\mathbf{k}})$ невозмущенной системы) будем называть резонансным уровнем при выполнении условия:

$$n\omega(I_{n\mathbf{k}}) = \sum_{i=1}^m k_i \omega_i,$$

где $(n, \mathbf{k}) = (n, k_1, \dots, k_m)$ – набор взаимно простых целых чисел.

Определение 3. Если $I_0 = I_{n\mathbf{k}}$, то уровень $I = I_{n\mathbf{k}}$ (замкнутую фазовую кривую $H(x, y) = h(I_{n\mathbf{k}})$ невозмущенной системы) будем называть вырожденным резонансным уровнем с порядком вырождения j , и говорить, что в системе (2) имеет место вырожденный резонанс. Окрестность $U_{\sqrt{\varepsilon}} = \{(I, \theta) : I_{n\mathbf{k}} - C\sqrt{\varepsilon} < I < I_{n\mathbf{k}} + C\sqrt{\varepsilon}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad C = \text{const} > 0\}$ индивидуального резонансного уровня $I = I_{n\mathbf{k}}$ будем называть резонансной зоной.

В работах [1–3] изучена топология вырожденной резонансной зоны с четным ($j = 2$) и нечетным ($j = 3$) порядками вырождения. Исследование основано на анализе усредненной системы маятникового типа, определяющей динамику в вырожденной резонансной зоне. Поскольку усредненная система имеет лишь сложные состояния равновесия, рассмотрены деформации векторного поля усредненной системы коразмерности, равной порядку вырождения, позволяющие изучить бифуркации квазипериодических решений при переходе от невырожденного резонанса к вырожденному. Получены возможные топологические структуры резонансных зон в зависимости от параметров деформации. Определены условия существования новых резонансных $(m+1)$ -мерных инвариантных торов в расширенном фазовом пространстве, что является характерной особенностью параметрических возмущений. Такие торы отвечают предельным циклам усредненной системы, не имеющим порождающих предельных циклов в соответствующей возмущенной автономной системе. Особое внимание уделяется синхронизации колебаний в окрестности вырожденного резонанса при $j = 2$

и $j = 3$ [1]. Устанавливается существование интервалов синхронизации по параметру расстройки, определяющему отклонение резонансного уровня $I_{n\mathbf{k}}$ от вырожденного уровня I_0 . В работах [2, 3] полученные результаты проиллюстрированы на примере асимметричного уравнения типа Дуффинга с немонотонным вращением при двухчастотном параметрическом квазипериодическом возмущении. Для такого уравнения имеется вырожденный резонансный уровень лишь с порядком вырождения $j = 2$.

Примером уравнения, имеющим вырожденные уровни с порядком вырождения $j \geq 2$, может служить маятниковое уравнение с нелинейностью в виде тригонометрического полинома степени n :

$$\ddot{x} + \sum_{k=1}^n p_k \sin kx = 0, \quad (3)$$

где p_k , $k = \overline{1, n}$, – параметры, $p_1 \neq 0$. В работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для $2 \leq n \leq 4$ максимально возможный порядок вырожденных уровней в уравнении (3) равен n .

В настоящей работе определяются условия существования вырожденных уровней с порядками вырождения $j = 2$ и $j = 3$ в уравнении:

$$\ddot{x} + \sum_{k=1}^3 p_k \sin kx = 0. \quad (4)$$

2. Результаты

Уравнение (4) эквивалентно гамильтоновой системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sum_{k=1}^3 p_k \sin kx \end{cases} \quad (5)$$

с гамильтонианом

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + (p_3 - p_1) \cos x - p_2 \cos^2 x - \frac{4p_3}{3} \cos^3 x + p_1 + p_2 + \frac{p_3}{3}.$$

Проводится аналитическое исследование системы (5): находим состояния равновесия системы на фазовом цилиндре $\{x(\bmod(2\pi)), y\}$ и устанавливаем их типы, строим разбиение плоскости управляющих параметров на области с качественно различными фазовыми портретами, приводим фазовые портреты для каждой области полученного разбиения.

Совокупность фазовых кривых, определяемых интегралом энергии $H(x, y) = h$, не охватывающих (охватывающих) фазовый цилиндр, формирует области колебательных (вращательных) движений маятника. Заметим, что состоянию равновесия $(0, 0)$ системы (5) отвечает $h = 0$, а состоянию равновесия $(\pi, 0) \equiv (-\pi, 0)$ – $h = 2p_1 + \frac{2p_3}{3}$.

Используя первый интеграл $H(x, y) = h$ системы (5), находим период движения $T(h)$ на замкнутых фазовых кривых:

$$T(h) = 4 \int_0^{x_0(h)} \frac{dx}{\sqrt{2(h + U(x))}} \quad (6)$$

в областях колебательных движений маятника и

$$T(h) = 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{2(h + U(x))}} \quad (7)$$

в областях вращательных движений маятника. Здесь

$$U(x) = \frac{4p_3}{3} \cos^3 x + p_2 \cos^2 x + (p_1 - p_3) \cos x - p_1 - p_2 - \frac{p_3}{3},$$

$x_0(h)$ – простой корень уравнения $U(x) + h = 0$, не являющийся абсциссой состояния равновесия.

Очевидно, что период движения $T(h)$, определяемый формулой (7), является строго монотонно убывающей функцией, поскольку

$$T'(h) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(h + U(x))^3}} < 0.$$

Следовательно, $\omega(h)$ является монотонно возрастающей функцией, а значит в областях вращательных движений маятника вырожденные уровни отсутствуют.

Изучим поведение функции $T(h)$, определяемой формулой (6), в областях колебательных движений маятника. При $p_1 > 0$, $p_2 = p_3 = 0$ функция $T(h) = \frac{4}{\sqrt{p_1}} \mathbf{K}(k)$, где $\mathbf{K}(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, k – его модуль, является монотонно возрастающей от $\frac{2\pi}{\sqrt{p_1}}$ до $+\infty$ на промежутке $(0, 2p_1)$. Следовательно, в этом случае вырожденные уровни отсутствуют.

В случае $p_3 = 0$ удастся найти аналитическое выражение для $T(h)$ для каждой области колебательных движений маятника. На плоскости параметров (p_1, p_2) выделяются области, где $T(h)$ не является монотонной функцией, а точнее имеет одну точку минимума. При этих значениях параметров имеет место вырожденный уровень с порядком вырождения $j = 2$.

В случае $p_3 \neq 0$ интеграл в (6) сводится к гиперэллиптическому интегралу, поэтому не удастся найти аналитическое выражение для $T(h)$ (проблема обращения гиперэллиптических интегралов). В этом случае задача решается численно.

Таким образом, теоретические результаты работ [1], [3] по описанию топологической структуры вырожденных резонансных зон и синхронизации квазипериодических колебаний в вырожденных случаях с порядками вырождения $j = 2$ и $j = 3$ могут быть применены, например, к системе вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sum_{k=1}^3 p_k \sin kx + \varepsilon [(-1 + p_4 \cos 3x + p_5 y \alpha(t)) y + p_6 \alpha(t)], \end{cases}$$

где ε – малый положительный параметр, $\alpha(t) = \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t$.

Литература

1. Morozov K. E., Morozov A. D. Degenerate Resonances and Synchronization of Quasiperiodic Oscillations // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 269, no. 6. P. 823-834.

2. Morozov A. D., Morozov K. E. Parametric Perturbations of a Duffing-Type Equation with Nonmonotonic Rotation // Communications in Computer and Information Science. 2023. Vol. 1914. P. 86-97.
3. Morozov A. D., Morozov K. E. Quasi-Periodic Parametric Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems with Nonmonotonic Rotation // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. Vol. 29, no. 1. P. 64-76.
4. Драгунов Т. Н., Королев С. А., Морозов А. Д. О вырожденных резонансах в уравнениях маятникового типа // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия Математика. 2006. Вып. 1(4). С. 18-28.

MSC 34C15

On the conditions for the existence of degenerate resonance levels in pendulum equations under quasiperiodic nonconservative parametric perturbations

O.S. Kostromina

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Abstract: An analytical and numerical study of the period of motion on closed phase curves for pendulum equations with nonlinearity in the form of a trigonometric polynomial of the second and third degree is carried out. Conditions for the existence of degenerate levels with degeneracy orders $j = 2$ and $j = 3$ for such equations are determined. Under the action of quasiperiodic nonconservative perturbations, a degenerate level can become a resonance level (under the condition of commensurability of the natural frequency of the corresponding unperturbed system with the frequencies of the quasiperiodic perturbation). Then we say that a degenerate resonance with the degeneracy order j takes place. The topological structures of degenerate resonance zones and the problem of synchronization of oscillations when an invariant torus passes through a degenerate resonance zone with the degeneracy orders $j = 2$ and $j = 3$ have been well studied.

Keywords: pendulum equations, quasiperiodic nonconservative perturbations, degenerate resonance.

References

1. Morozov K. E., Morozov A. D. Degenerate Resonances and Synchronization of Quasiperiodic Oscillations // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 269, no. 6. P. 823-834.
2. Morozov A. D., Morozov K. E. Parametric Perturbations of a Duffing-Type Equation with Nonmonotonic Rotation // Communications in Computer and Information Science. 2023. Vol. 1914. P. 86-97.
3. Morozov A. D., Morozov K. E. Quasi-Periodic Parametric Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems with Nonmonotonic Rotation // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. Vol. 29, no. 1. P. 64-76.
4. Dragunov T. N., Korolev S. A., Morozov A. D. O vyrozhdennykh rezonansakh v uravneniyakh mayatnikovogo tipa [On degenerate resonances in pendulum-type equations] // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. Seriya Matematika [Bulletin of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod. Mathematics Series]. 2006. Iss. 1(4). P. 18-28. (in Russian)

УДК 539.376

Движение агрессивной среды в стержне круглого поперечного сечения

Кузнецов Е.Б.¹, Леонов С.С.^{1,2}

МАИ¹, РУДН²

Аннотация: Диффузия агрессивной среды в материал стержня моделируется уравнением тепловой волны, что позволяет выделить движение диффузионного фронта.

Ключевые слова: фронт диффузии, фронт агрессии, метод Фурье.

Обычно проникновение некоторой среды в другую среду моделируется уравнением диффузии, которое является уравнением в частных производных параболического типа. Недостаток такого подхода заключается в том, что это уравнение не описывает движение фронта проникающей среды, внедрение которой происходит с бесконечной скоростью. В этом случае исследователи, см., например, [1], движение этого фронта задают искусственно. То же происходит при исследовании теплопереноса в условиях интенсивного нагрева тел, так как гипотеза о пропорциональности вектора плотности теплового потока вектору градиента температуры (закон Фурье), приводит к бесконечной скорости распространения тепловых возмущений, что противоречит фундаментальным законам естествознания.

Данный парадокс возникает из-за представления твердого тела как сплошного. Однако, если рассматривать твердое тело как среду, состоящую из множества отдельных частиц, что на самом деле имеет место, то при передаче теплового, или механического, импульса от частицы к частице проходит некоторое время запаздывания, хоть и малое, но конечное. Поэтому при возникновении градиента температуры тепловой поток запаздывает на некоторое время τ , называемое временем релаксации, т.е. временем установления термодинамического равновесия между градиентом температуры и тепловым потоком.

В связи с этим К. Каттанео, П. Верноттом и А.В. Лыковым [2, 3] в закон Фурье добавляется слагаемое, пропорциональное скорости изменения теплового потока $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ с коэффициентом пропорциональности, равным времени релаксации. После этого закон теплопроводности принимает вид

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \text{grad} u(\mathbf{r}, t) - \tau \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Здесь $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки в пространстве, функция $u(\mathbf{r}, t)$ – температура, t – время и получаем следующее уравнение диффузии

$$\tau \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \text{div} (a^2 \text{grad} u(\mathbf{r}, t)),$$

где $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности.

Последнее уравнение является уравнением гиперболического типа, задающим движение фронта тепловой волны. Оно носит волновой характер с затуханием.

Используя такой подход в [4] процесс диффузии в тонком стержне прямоугольного поперечного сечения моделировался волновым уравнением гиперболического типа, описывающим движение тепловой волны

$$\tau c_{tt} + c_t = Dc_{xx},$$

где $c = c(x, t)$ – концентрация агрессивной среды в материале удлиненного стержня; τ – время релаксации; D – коэффициент диффузии окружающей среды в материал стержня; x – координата, отсчитываемая вдоль толщины стержня, которая значительно меньше его ширины; t – время. Индексы при функции c определяют частные производные по соответствующим переменным.

В данном сообщении рассматривается осесимметричное проникновение внешней агрессивной среды интенсивностью c_0 в длинный металлический стержень круглого поперечного сечения радиуса r_0 .

Уравнение диффузии для функции $c(r, t)$ в полярной системе координат, записанное в безразмерной форме, примет вид

$$c_{tt} + 2bc_t = c_{rr} + \frac{c_r}{r}. \quad (1)$$

Полагаем, что в начальный момент времени внутри образца агрессивная среда отсутствует, тогда начальные условия будут однородными:

$$c(r, 0) = 0, \quad c_t(r, 0) = 0, \quad (2)$$

на боковой поверхности стержня концентрация среды остается постоянной и в силу осевой симметрии краевые условия примут вид

$$c(1, t) = 1, \quad c_r(0, t) = 0. \quad (3)$$

Решение задачи (1)-(3) отыскиваем, согласно методу разделения переменных Фурье и решением задачи будет ряд Фурье-Бесселя

$$c(r, t) = 1 + \sum_{n=1}^N J_0(a_n r) (A_n e^{k_{1n} t} + B_n e^{k_{2n} t}) + e^{-bt} \sum_{n=N+1}^{\infty} J_0(a_n r) (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (4)$$

где $J_0(\lambda r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, N наибольшее целое число, при котором выполняется неравенство $b > a_n$, a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ – корни функции Бесселя первого рода нулевого порядка.

В качестве примера рассмотрим задачу, моделирующую осесимметричное распространение агрессивной среды в длинном металлическом стержне круглого поперечного сечения радиуса $r_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ м, $\tau = 10^{-3}$ с, $D = 10^{-3}$ м²/с. В данном случае значение параметра $b = \frac{r_0}{2\sqrt{D\tau}} = 2$. Наименьший корень функции Бесселя, см. [5], $a_1 = 2.4048$, поэтому выполняется условие $a_1 > b$, а значит решение задачи (1)-(3) будет задаваться рядом

$$c(r, t) = 1 + e^{-bt} \sum_{n=1}^{\infty} J_0(a_n r) (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (5)$$

коэффициенты A_n, B_n в котором определяются при удовлетворении начальных условий (2)

$$c(r, 0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(a_n r) A_n = 0,$$

отсюда коэффициенты A_n представления функции $c(r, 0)$ в ряд Фурье-Бесселя будут выражаться по формулам [5]

$$A_n = -\frac{2}{(J'_0(a_n))^2} \int_0^1 r J_0(a_n r) dr. \quad (6)$$

Начальное условие для производной функции $c(r, t)$ примет вид

$$c_t(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(a_n r) (-b A_n + \omega_n B_n) = 0$$

и коэффициенты B_n будут вычисляться по формулам

$$B_n = \frac{b}{\omega_n} A_n. \quad (7)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3) об осесимметричном распространении агрессивной среды в длинном металлическом стержне круглого поперечного сечения с представленными выше данными задается рядом Фурье-Бесселя (5), коэффициенты в котором вычисляются по формулам (6), (7).

Литература

1. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. Москва: Физматлит, 2016. 504 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Формалев В. Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. Москва: Физматлит, 2015. 280 с.
4. Kuznetsov E. B., Leonov S. S. Applying of the heat wave equation in the study of the movement of an aggressive environment front // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927. P. 012078.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1972. 735 с.

MSC 35L20

Movement of an aggressive medium in a rod of circular cross-section

E.B. Kuznetsov¹, S.S. Leonov^{1,2}

MAI¹, RUDN²

Abstract: The diffusion of an aggressive environment into the rod material is modeled by the heat wave equation, which allows us to isolate the movement of the diffusion front.

Keywords: diffusion front, aggression front, Fourier method.

References

1. Lokoshchenko A. M. Polzuchest i dlitelnaya prochnost metallov [Creep and long-term strength of metals]. Moscow: Fizmatlit, 2016. 504 p. (in Russian)
2. Lykov A. V. Teoriya teploprovodnosti [Theory of heat conduction]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. (in Russian)
3. Formalev V. F. Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh. Chislennyye metody, teplovyye volny, obratnyye zadachi [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, thermal waves, inverse problems]. Moscow: Fizmatlit, 2015. 280 p. (in Russian)
4. Kuznetsov E. B., Leonov S. S. Applying of the heat wave equation in the study of the movement of an aggressive environment front // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927. P. 012078.
5. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1972. 735 p. (in Russian)

УДК 519.62

О методах определения областей абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для некоторых классов неавтономных дифференциальных уравнений

Кузнецов Е.Б.¹, Леонов С.С.^{1,2}

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)¹, Российский университет дружбы народов²

Аннотация: В данной работе рассматривается абсолютная устойчивость явного метода Эйлера решения начальной задачи для неавтономного уравнения Далквиста. Уравнение данной задачи, по сравнению с традиционным, дополнено линейным относительно аргумента слагаемым. Дан оригинальный метод построения областей абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для определенных классов начальных задач и установлены оценки шага интегрирования для найденных областей. Все полученные результаты хорошо согласуются с уже имеющимися в научной литературе.

Ключевые слова: область абсолютная устойчивость, явный метод Эйлера, задача Коши, уравнение Далквиста, обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Введение

Одним из ключевых свойств численных методов является их устойчивость, отражающая способность метода препятствовать накоплению ошибки. При решении жестких уравнений явные методы малоприменимы из-за недостаточной устойчивости, а вследствие этого – необходимости значительного уменьшения шага интегрирования. Это приводит к усложнению процесса решения. Традиционно устойчивость численных методов исследуется на начальной задаче для линейного автономного уравнения, предложенного Г. Далквистом [1]. Доказано, что при решении начальной задачи для уравнения Далквиста явные методы имеют меньшую область устойчивости, по сравнению с неявными методами, что объясняет широкое применение последних для решения жестких дифференциальных уравнений и их систем. Более подробно вопросы устойчивости методов Рунге-Кутты освещены в монографии К. Деккера и Я. Вервера [2].

Данная работа посвящена исследованию более общей начальной задачи для неавтономного уравнения Далквиста, которое, по сравнению с уравнением Далквиста, дополнено линейным относительно аргумента слагаемым. Целью данной работы являлось исследование области абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для данной задачи.

2. Постановка задачи и первые результаты

Рассмотрим задачу Коши для неавтономного линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = ay + bt \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

параметры a и b являются заданными, в общем случае комплексными, числами, причем $a \neq 0$. Предполагается, что аргумент задачи может изменяться в интервале $t \in [t_0, T]$.

Уравнение (1) будем называть неавтономным уравнением Далквиста. Описанная выше задача является обобщением начальной задачи для уравнения Далквиста (далее будем также называть его автономным)

$$\frac{dy}{dt} = ay, \quad (3)$$

получаемого из уравнения (1) при $b = 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера вида*

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4)$$

решения начальной задачи для неавтономного уравнения Далквиста (1)-(2) задается неравенством

$$|1 + ha| \leq 1. \quad (5)$$

При действительных значениях параметра a неравенство (5) дает ограничение на шаг интегрирования

$$|h| \leq \frac{2}{|a|} \quad (6)$$

при условии $ah \leq 0$. При комплексных значениях параметра a , т.е. при $a = \alpha + i\beta$, неравенство (5) задает на комплексной плоскости в переменных αh и βh круг единичного радиуса

$$(\alpha h + 1)^2 + (\beta h)^2 \leq 1 \quad (7)$$

с центром в точке $(-1; 0)$.

Таким образом, области абсолютной устойчивости и условия на шаг интегрирования для задач (1)-(2) и начальной задачи для автономного уравнения Далквиста (3) будут совпадать.

Область абсолютной устойчивости (7) явного метода Эйлера решения начальной задачи для неавтономного уравнения Далквиста (1)-(2) в переменных αh и βh будет иметь вид, изображенный на рис. 1.

3. Начальная задача для неавтономного уравнения Далквиста. Метод продолжения решения

Воспользуемся другим подходом к определению области абсолютной устойчивости, который позволит получить более общие результаты.

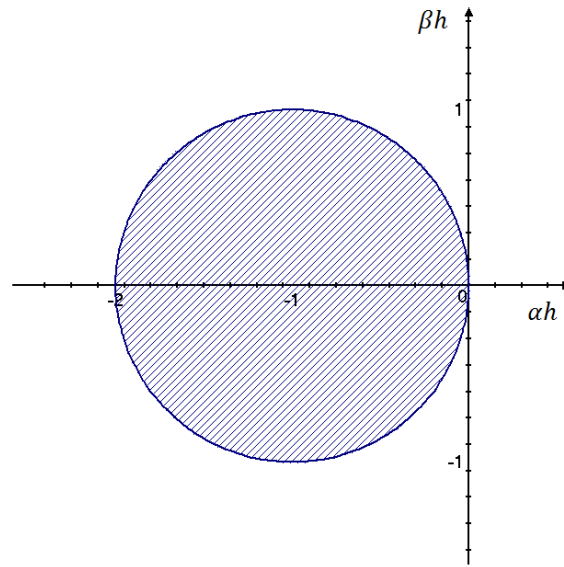


Рис. 1. Область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера решения начальной задачи для уравнения Далквиста

Применим метод продолжения решения по аргументу вида [3]

$$d\mu = \theta_1 dy + \theta_2 dt, \quad (8)$$

где θ_1 и θ_2 являются заданными действительными параметрами, удовлетворяющими условию $\theta_1^2 + \theta_2^2 \neq 0$.

Из соотношений (8) и (1), получим выражение для производной

$$\frac{dt}{d\mu} = \frac{1}{\theta_1 \frac{dy}{dt} + \theta_2} = \frac{1}{\theta_1 (ay + bt) + \theta_2},$$

используя которое перейдем от уравнения (1) к преобразованной системе

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\mu} = \frac{ay + bt}{\theta_1 (ay + bt) + \theta_2}, \\ \frac{dt}{d\mu} = \frac{1}{\theta_1 (ay + bt) + \theta_2}. \end{cases} \quad (9)$$

Начальное условие (2) для системы (9) перепишется в форме

$$y(0) = y_0, \quad t(0) = t_0. \quad (10)$$

В итоге, исследование абсолютной устойчивости для неавтономной задачи (1)-(2) свелось к исследованию абсолютной устойчивости для автономной задачи (9)-(10). Будем в дальнейшем полагать, что параметры θ_1 и θ_2 выбираются таким образом, чтобы правая часть системы (9) оставалась непрерывной во всем рассматриваемом интервале.

Явный метод Эйлера (4) для задачи (9)-(10) преобразуется в систему

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf_1(t_k, y_k), \\ t_{k+1} = t_k + hf_2(t_k, y_k). \end{cases} \quad (11)$$

Теорема 2. Область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера вида (11) решения преобразованной к аргументу вида (8), при условии $\theta_1^2 + \theta_2^2 \neq 0$, начальной задачи (9)-(10) в каждой точке интегральной кривой задается неравенством

$$\left| 1 + h \frac{\theta_2 a - \theta_1 b}{(\theta_1 (ay_k + bt_k) + \theta_2)^2} \right| \leq 1, \quad (12)$$

где y_k и t_k – численное решение задачи (9)-(10) явным методом Эйлера на k -ом шаге. При действительных значениях параметров a и b неравенство (12) дает ограничение на шаг интегрирования

$$|h| \leq \frac{2(\theta_1 (ay_k + bt_k) + \theta_2)^2}{|\theta_2 a - \theta_1 b|}, \quad (13)$$

при условии $h \cdot (\theta_2 a - \theta_1 b) \leq 0$. При комплексных значениях параметров a и b , т.е. при $a = \alpha + i\beta$ и $b = \gamma + i\delta$, неравенство (12) задает на комплексной плоскости в переменных $h\text{Re} \left[\frac{\theta_2 a - \theta_1 b}{(\theta_1 (ay_k + bt_k) + \theta_2)^2} \right]$ и $h\text{Im} \left[\frac{\theta_2 a - \theta_1 b}{(\theta_1 (ay_k + bt_k) + \theta_2)^2} \right]$ круг единичного радиуса:

$$\left(h\text{Re} \left[\frac{\theta_2 a - \theta_1 b}{(\theta_1 (ay_k + bt_k) + \theta_2)^2} \right] + 1 \right)^2 + \left(h\text{Im} \left[\frac{\theta_2 a - \theta_1 b}{(\theta_1 (ay_k + bt_k) + \theta_2)^2} \right] \right)^2 \leq 1. \quad (14)$$

Область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера (14) решения преобразованной начальной задачи (9)-(10) по виду аналогична изображенной на рис. 1, но задается в координатах $h\text{Re} \left[\frac{\theta_2 a - \theta_1 b}{(\theta_1 (ay_k + bt_k) + \theta_2)^2} \right]$ и $h\text{Im} \left[\frac{\theta_2 a - \theta_1 b}{(\theta_1 (ay_k + bt_k) + \theta_2)^2} \right]$.

Из доказанной теоремы 2 при значениях $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 1$ непосредственно следует утверждение теоремы 1. Но этот результат далеко не исчерпывает потенциал теоремы 2, применение которой может дать информацию об абсолютной устойчивости явного метода Эйлера для достаточно широкого круга начальных задач, связанных с параметризованной задачей (9)-(10).

4. Заключение

В работе исследована область абсолютной устойчивости решения начальной задачи (1)-(2) для неавтономного уравнения Далквиста. Доказано, что область абсолютной устойчивости для неавтономного уравнения Далквиста сохраняет тот же вид, что и для автономного уравнения Далквиста. Это хорошо согласуется с результатами теории устойчивости динамических систем.

Для начальной задачи (1)-(2) используется переход к преобразованной начальной задаче, аргументом которой является линейная комбинация исходных переменных y и t вида (8). Предложенный подход позволил не только получить область абсолютной устойчивости решения начальной задачи для неавтономного уравнения Далквиста, но также для целого класса связанных начальных задач.

Литература

1. Dahlquist G. A special stability problem for linear multistep methods // BIT Numerical Mathematics. 1963. Vol. 3. P. 27-43.

2. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. Москва: Мир, 1988. 334 с.
3. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. Москва: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.

MSC 65L20

On methods for determining the domains of absolute stability of the explicit Euler method for some classes of nonautonomous differential equations

E.B. Kuznetsov¹, S.S. Leonov^{1,2}

Moscow Aviation Institute¹,
RUDN University²

Abstract: In this paper authors consider the absolute stability of the explicit Euler method for solving of an initial value problem for the nonautonomous Dahlquist equation. The equation of this problem, in comparison with the traditional one, is supplemented with a linear summand with respect to the argument. Authors give an original method of constructing absolute stability domains of the explicit Euler method for certain classes of initial value problems and defined estimates of the integration step size for the founded regions. All the results obtained are in good agreement with those already available in the scientific literature.

Keywords: absolute stability domain, Euler's explicit method, Cauchy problem, Dahlquist equation, ordinary differential equations.

References

1. Dahlquist G. A special stability problem for linear multistep methods // BIT Numerical Mathematics. 1963. Vol. 3. P. 27-43.
2. Dekker K., Verwer J. Ustoichivost metodov Runge-Kutty dlya zhestkikh nelineinykh differentsialnykh uravnenii [Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow: Mir, 1988. 334 p. (in Russian)
3. Shalashilin V. I., Kuznetsov E. B. Metod prodolzheniya resheniya po parametru i nailuchshaya parametrizatsiya v prikladnoi matematike i mekhanike [The method of continuation of solution with respect to parameter and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics]. Moscow: Editorial URSS, 1999. 224 p. (in Russian)

УДК 519.67 517.91 538.94

Ошибки задачи восстановления производных функции из ее гармоник

Кузьмичев Н.Д.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В работе представлены формулы, с помощью которых можно оценить ошибку задачи восстановления производных экспериментально исследуемой зависимости из ее гармоник. Приведен предварительный анализ корректности задачи. Рассмотрены примеры восстановления зависимостей.

Ключевые слова: восстановление производных зависимости, коэффициенты (гармоники) Фурье, корректность задачи восстановления производных.

1. Введение

В экспериментальной физике, приборостроении, радиотехнике и других приложениях часто возникает задача восстановления исследуемой зависимости и ее производных из фурье гармоник возникающих при наложении на объект исследования статического и гармонического воздействий. Подобные задачи находят свое применение в физике полупроводников, сверхпроводимости, ЭПР спектроскопии и др. Для этих целей был разработан метод модуляционного анализа Фурье [1-3]. Но, несмотря на это, ряд положений указанного метода требуют более строгого математического обоснования.

2. Оценки точности восстановления производных зависимости из экспериментально определенных коэффициент Фурье

Как было отмечено во введении, при экспериментальном исследовании некоторой зависимости физического процесса часто приходится регистрировать первую и высшие гармоники исследуемой зависимости вместо непосредственного ее измерения. При этом возникает задача восстановления зависимости из ее гармоник. Как правило, исследователи регистрируют несколько гармоник с определенной ошибкой измерения и по ним восстанавливают требуемую зависимость. Предварительные оценки точности восстановления были выполнены в работах [2, 3].

Рассмотрим функцию $f(z)$ и допустим, что z меняется по гармоническому закону $z(t) = x + h \cos t$, где $x \in [a, b]$, $z \in [a - h, b + h]$ и $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда, при выполнении некоторых условий, функция $f(z(t))$ будет соответствовать ряд Фурье [3]:

$$f(x + h \cos t) = \frac{A_0(x, h)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x, h) \cos(kt). \quad (2.1)$$

Здесь $A_k(x, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x + h \cos t) \cos(kt) dt$.

Если зависимость (функция) $f(z)$ имеет производную $(m + 1)$ порядка удовлетворяющую, например, условиям Дирихле [4, 5], т.е. $(m + 1)$ -ая производная имеет

конечное число разрывов первого рода и кусочно монотонна, то этом случае сходятся ряды $\sum_{k=0}^{\infty} k^m |A_k|$, $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) A_{2k+1}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+2)^2 A_{2k+2}$.

Последние два ряда, составленные из коэффициентов Фурье ряда (2.1), определяют первую $f'(x)$ и вторую $f''(x)$ производные соответственно [3]. Найдем ошибки возникающие при аппроксимации их конечными суммами коэффициентов Фурье $A_k(x, h)$.

Пусть нам необходимо определить производную зависимости, имея в своем арсенале N экспериментально определенных зависимостей амплитуд гармоник (коэффициентов Фурье $A_k(x, h)$) $U_k(x, h)$ ($k = \overline{1, N}$). Допустим, что абсолютная экспериментальная ошибка δ_k определения амплитуды гармоники U_k убывает с ростом номера k по закону: $\delta_k \leq \frac{c_1}{k^{2+\sigma}}$. Здесь числа c_1 (например, абсолютная ошибка определения U_1) и $\sigma > 0$. Для функции у которой производная порядка m принадлежит классу Гёльдера-Липшица C^α коэффициенты Фурье убывают не медленнее, чем $\frac{B}{k^{m+\alpha}}$ ($0 < \alpha \leq 1$) [6, 7]. Здесь величина $B > 0$ – некоторая постоянная, например, $B = \max |A_1(x, h)|$. Учитывая вышесказанное получаем, что измерение U_{k+1} нужно проводить с меньшей абсолютной ошибкой, чем U_k .

Оценим величину ошибки восстановления производной. Рассмотрим следующие функции $hf'_K(x) = \sum_{k=0}^K (-1)^k (2k+1) U_{2k+1}$ и $hf'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) A_{2k+1}$ и, сравнивая эти суммы, оценим ошибку Δ восстановления:

$$\begin{aligned} \Delta = h\delta f' &= \left| \sum_{k=0}^K [(-1)^k (2k+1) (A_{2k+1} - U_{2k+1})] + \sum_{k=K+1}^{\infty} (-1)^k (2k+1) A_{2k+1} \right| < \\ &< \sum_{k=0}^K (2k+1) |A_{2k+1} - U_{2k+1}| + |R_K| < \\ &< c_1 \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \left(1 - \frac{1}{(2K+1)^\sigma} \right) \right] + \frac{B}{2(m+\alpha-1)(2K+1)^{m+\alpha-1}}. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь $|R_K|$ – остаток ряда, который зависит от дифференциальных свойств функции (зависимости) $f(x)$ и стремится к 0 при $K \rightarrow \infty$ ($m \geq 1$):

$$|R_K| = \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} (-1)^k (2k+1) A_{2k+1} \right| \leq B \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{m+\alpha}} < \frac{B}{2(m+\alpha-1)(2K+1)^{m+\alpha-1}}.$$

Для $K \gg 1$ данный остаток влияет на ошибку слабо.

Рассмотрим первый член Δ_1 правой части (2.2): $\Delta_1 = c_1 \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \left(1 - \frac{1}{(2K+1)^\sigma} \right) \right]$. Очевидно, что при $\sigma \neq 0$ и $K \rightarrow \infty$ величина $\Delta_1 \rightarrow c_1 \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \right]$. При $\sigma \ll 1$ величина $\Delta_1 = c_1 \left[1 + \frac{1}{2} \ln(2K+1) \right]$ и при $K \rightarrow \infty$ $\Delta_1 \rightarrow \infty$. Поэтому задача восстановления будет некорректно поставленной [8].

Таким образом, ошибку задачи восстановления производной можно оценивать по формуле:

$$\delta f' = \frac{c_1}{h} \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \left(1 - \frac{1}{(2K+1)^\sigma} \right) \right] + \frac{B}{2h(m+\alpha-1)(2K+1)^{m+\alpha-1}}. \quad (2.3)$$

Для второй производной получаются следующие оценки:

$$\delta f'' = \frac{c_2}{h^2} \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{1}{2^\sigma} - \frac{1}{(2K+2)^\sigma} \right) \right] + \frac{B}{2h^2(m+\alpha-1)(2K+2)^{m+\alpha-1}}. \quad (2.4)$$

3. Анализ корректности задачи восстановления производных

Теперь исследуем при выполнении, каких условий задача восстановления будет корректной. Величина ошибки и корректность задачи восстановления производной в основном определяется первым членом (2.3): $\delta f' \simeq \frac{c_1}{h} \left[1 + \frac{1}{2\sigma} \left(1 - \frac{1}{(2K+1)^\sigma} \right) \right]$. При значениях $\sigma \ll 1$ имеем:

$$\delta f' \Big|_{\sigma \ll 1} = \left(\frac{c_1}{h} \right) \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right) \ln(2K+1) \right]. \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) логарифмически стремится к бесконечности при $K \rightarrow \infty$, делая задачу восстановления не корректной. Кроме того, множитель $\frac{c_1}{h}$ может быть сравним с производной, т.е. $f' \sim \frac{c_1}{h}$, что также делает задачу не корректной.

Для $\sigma < 1$ или $\sigma \sim 1$ при $K \gg 1$ ошибка $\delta f'$ является конечной величиной:

$$\delta f' \Big|_{\sigma \sim 1} = \left(\frac{c_1}{h} \right) \left(1 + \frac{1}{2\sigma} \right). \quad (2.6)$$

При $\frac{c_1}{h} \ll f'$ задача восстановления производной будет корректной.

Аналогичные рассуждения можно привести и для второй производной.

Литература

1. Кузьмичев Н. Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // Журнал технической физики. 1994. Т. 64, вып. 12. С. 63-74.
2. Кузьмичев Н. Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных // Журнал технической физики. 1997. Т. 37, вып. 7. С. 124-127.
3. Кузьмичев Н. Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 2. С. 70-80.
4. Кузьмичев Н. Д. Применение метода модуляционного Фурье-анализа для задачи восстановления производных // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 44-59.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. Москва: Наука, 1974. 656 с.
6. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. Продолжение курса / Под ред. А. Н. Тихонова. Москва: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.
7. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Москва: Физматгиз, 1961. 936 с.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1986. 288 с.

MSC 41A05; 42A10

Errors in the problem of reconstructing derivatives of a function from its harmonics

N.D. Kuzmichev

National Research Mordovian State University

Abstract: The paper presents formulas that can be used to estimate the error of reconstructing derivatives of an experimentally investigated dependence from its harmonics. A preliminary analysis of the problem's correctness is given. Examples of dependency recovery are considered.

Keywords: recovery of dependence derivatives, Fourier coefficients (harmonics), correctness of derivative recovery.

References

1. Kuzmichev N. D. Gisterezisnaya namagnichennost i generatsiya garmonik magnitnymi materialami: analiz spektra garmonik namagnichennosti na primere vysokotemperaturnykh sverkhprovodnikov [Hysteresis magnetization and harmonic generation by magnetic materials: analysis of magnetization harmonic spectrum using high-temperature superconductors as an example] // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki [Journal of Technical Physics]. 1994. Vol. 64, iss. 12. P. 63-74. (in Russian)
2. Kuzmichev N. D. Otsenki oshibok modulyatsionnogo vosstanovleniya funktsii otklika i ee proizvodnykh [Error estimates for modulation recovery of response function and its derivatives] // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki [Journal of Technical Physics]. 1997. Vol. 37, iss. 7. P. 124-127. (in Russian)
3. Kuzmichev N. D. Primenenie ryadov Teilora-Fure dlya chislennogo i eksperimentalnogo opredeleniya proizvodnykh izuchaemoi zavisimosti [Application of Taylor-Fourier series for numerical and experimental determination of derivatives of the studied dependence] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of the Middle Volga Mathematical Society]. 2011. Vol. 13, no. 2. P. 70-80. (in Russian)
4. Kuzmichev N. D. Primenenie metoda modulyatsionnogo Fure-analiza dlya zadachi vosstanovleniya proizvodnykh [Application of modulation Fourier analysis method for the problem of derivative recovery] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of the Middle Volga Mathematical Society]. 2024. Vol. 26, no. 1. P. 44-59. (in Russian)
5. Smirnov V. I. Kurs vysshei matematiki [Course of Higher Mathematics]. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1974. 656 p. (in Russian)
6. Ilyin V. A., Sadovnichii V. A., Sendov B. Kh. Matematicheskii analiz. Prodolzhenie kursa [Mathematical Analysis. Continuation of the Course] / Ed. by A. N. Tikhonov. Moscow: Moscow University Press, 1987. 358 p. (in Russian)
7. Bari N. K. Trigonometricheskie ryady [Trigonometric Series]. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 936 p. (in Russian)

8. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow: Nauka, 1986. 288 p. (in Russian)

УДК 519.65; 519.62; 517.521

Приближение производной функции коэффициентами Фурье

Кузьмичев Н.Д.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Приведено доказательство теоремы, согласно которой производную функции, принадлежащей классу Гёльдера-Липшица $C^\alpha(G)$, можно с любой наперед заданной точностью аппроксимировать конечной суммой её нечётных коэффициентов Фурье для гармонически модулированного аргумента.

Ключевые слова: класс Гёльдера-Липшица, гармонически модулированный аргумент, зависимости коэффициентов Фурье, аппроксимация производной функции.

1. Введение

В экспериментальной физике, технике и при математическом моделировании явлений с помощью дифференциальных уравнений необходимо иметь не только исследуемую зависимость, но и её производные. Например, в эксперименте измеряют зависимости гармоник исследуемой физической характеристики при гармоническом и статическом воздействиях на изучаемый объект. Тогда возникает задача восстановления изучаемой характеристики и ее производных из найденных зависимостей фурье-гармоник. На этот случай разработаны основы метода модуляционного анализа Фурье [1, 2-5], но ряд положений требуют расширения на более широкий класс функций.

2. Теорема об приближение производной функции, принадлежащей классу Гёльдера-Липшица её коэффициентами Фурье для гармонически модулированного аргумента

Теорема 1. Любую производную $f'(y)$ функции $f(y)$, принадлежащую классу Гёльдера-Липшица C^α на некотором множестве G , можно аппроксимировать с любой наперед заданной точностью ε следующей конечной суммой коэффициентов её ряда Фурье для гармонически модулированного аргумента $y = x + h \cos t$

$$\left| \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n-1) A_{2n-1}(x, h) - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

h – амплитуда модуляции, $t \in [-\pi, \pi]$, $x \in [a, b]$, $y \in [a-h, b+h] = G$ и

$$A_m(x, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \cos(mt) dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что функция $f(y)$ имеет производную $f'(y)$ принадлежащую классу Гёльдера-Липшица [6, 7] на некотором множестве G :

$f'(y) \in C^\alpha (0 < \alpha \leq 1)$. Аргумент y заставим изменяться по гармоническому закону $y(t) = x + h \cos t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда, если $x \in [a, b]$, то $y \in G = [a - h, b + h]$. Здесь h – амплитуда модуляции. Суперпозиция функций $f(y(t))$ удовлетворяет условию: $f(-\pi) = f(\pi)$ для любых $x \in [a, b]$. Из выше отмеченных условий следует, что ряд Фурье функции $f(x + h \cos t)$ сходится равномерно для любых $x \in [a, b]$ [6-8]:

$$f(x + h \cos(t)) = \frac{A_0(x, h)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x, h) \cos(nt). \quad (1)$$

Левую и правую часть (1) продифференцируем по t и положим $t = \frac{\pi}{2}$:

$$hf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) A_{2n-1}(x, h). \quad (2)$$

Докажем справедливость выражения (2). Рассмотрим следующую сумму составленную из коэффициентов $A_n(x, h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + h \cos(t)) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x + h \cos(t)) \cos(nt) dt$:

$$\begin{aligned} hf'_N(x) &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} A_{2n-1}(x, h) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x + h \cos(t)) \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n-1) \cos[(2n-1)t] dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Подынтегральную сумму (3), состоящую из косинусов нечётной кратности, просуммируем. В результате получим следующий интеграл:

$$hf'_N(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x + h \cos(t)) K_N(t) dt. \quad (4)$$

В выражении (4) интегральное ядро $K_N(t)$ имеет вид:

$$K_N(t) = \frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2(\cos(t))^2} + (-1)^{N+1} (2N+1) \frac{\cos(2Nt)}{2 \cos(t)}.$$

Отметим, что $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} K_N(t) dt = 0$. Учитывая данное замечание, формулу (4) запишем в виде:

$$hf'_N(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x + h \cos(t)) - f(x)] K_N(t) dt. \quad (5)$$

Рассмотрим интеграл (5) с первым членом ядра $K_N(t)$ и применим к нему формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Тогда получим:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(x + \Theta h \cos(t)) \frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2 \cos(t)} dt.$$

Здесь $\Theta = \Theta(h)$ и $0 < \Theta(h) < 1$. Интеграл $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{\cos(t)} dt = 1$ [5, 6].
Значит, мы можем записать с учетом сказанного выше следующую формулу:

$$f'_N(x) - f'(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [f'(x + \Theta h \cos(t)) - f'(x)] \frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2 \cos(t)} dt. \quad (6)$$

Введем новую переменную $z = t + \frac{\pi}{2}$, и в силу периодичности подынтегрального выражения, сместим пределы интегрирования (6):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [f'(x + \Theta h \sin(t)) - f'(x)] \frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z} dz. \quad (7)$$

Данный интеграл при $N \rightarrow \infty$ стремится к 0 [5, 6], т.е. для любого сколь угодно малого числа $\frac{\varepsilon}{2}$ можно указать номер $N_1 > N$ такой, что модуль интеграла (7) будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Теперь рассмотрим интеграл (2.5) со вторым членом ядра $K_N(t)$ и также применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Получим:

$$\frac{2N+1}{\pi} (-1)^{N+1} \int_0^\pi f'(x + h\Theta \cos(t)) \cos(2Nt) dz. \quad (8)$$

Интеграл $\int_0^\pi f'(x + h\Theta \cos(t)) \cos(2Nt) dz$ при $N \rightarrow \infty$ стремится к 0, так как по условию теоремы $f'(y) \in C^\alpha$ и является коэффициентом Фурье порядка $2N$ подынтегральной функции $f'(x + h\Theta \cos(t))$, который имеет порядок убывания $O\left(\frac{1}{(2N)^{1+\alpha}}\right)$ [8]. В целом, с учетом множителя $(2N+1)$ перед интегралом в выражении (8), получим, что данное выражение стремится к 0, как $O\left(\frac{1}{(2N)^\alpha}\right)$. Значит, для любого сколь угодно малого числа $\frac{\varepsilon}{2}$ можно указать номер $N_2 > N$ такой, что модуль выражения (8) будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. В итоге, объединяя две выведенные оценки, мы получили, что

$$\left| f'(x) - \frac{2}{\pi h} \int_0^\pi f(x + h \cos(t)) \left\{ \frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2(\cos(t))^2} + (-1)^{N+1} (2N+1) \frac{\cos(2Nt)}{2 \cos(t)} \right\} dt \right| < \varepsilon.$$

Из этого следует, что

$$\left| \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n-1) A_{2n-1}(x, h) - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, если производная функции $f'(y)$ принадлежит классу Гёльдера-Липшица ($f'(y) \in C^\alpha(0 < \alpha \leq 1)$), то её можно аппроксимировать с любой наперёд

заданной точностью ε следующей конечной суммой коэффициентов ряда Фурье зависящей от параметра x ($x \in [a, b]$, $y \in [a - h, b + h]$):

$$f'(x) \approx f'_N(x) = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n-1) A_{2n-1}(x, h). \quad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Литература

1. Вертц Дж., Болтон Дж. Теория и практические приложения метода ЭПР. Москва: Мир, 1975. 548 с.
2. Кузьмичев Н. Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // Журнал технической физики. 1994. Т. 64, № 12. С. 63-74.
3. Кузьмичев Н. Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 1. С. 70-80.
4. Кузьмичев Н. Д. Применение метода модуляционного Фурье-анализа для задачи восстановления производных // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 44-59.
5. Кузьмичев Н. Д. Приближение гёльдеровых функций их коэффициентами Фурье для гармонически модулированного аргумента // Материалы XI Международной научной молодежной школы-семинара им. Е. В. Воскресенского. Саранск, 2024. С. 94-98.
6. Кузьмичев Н. Д. Аппроксимация функции и ее производной, принадлежащих классу Гёльдера-Липшица, их коэффициентами Фурье для гармонически модулированного аргумента // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2025. Т. 65, № 4. С. 417-425.
7. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. Продолжение курса / Под ред. А. Н. Тихонова. Москва: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.
8. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Москва: Физматгиз, 1961. 936 с.

MSC 41A05; 42A10; 42B05

Approximation of the derivative of a function by Fourier coefficients

N.D. Kuzmichev

National Research Mordovian State University

Abstract: The theorem's proof is given according to which the derivative of a function belonging to the Helder-Lipschitz class $C^\alpha(G)$ can be approximated with any pre-determined accuracy by a finite sum of its odd Fourier coefficients for a harmonically modulated argument.

Keywords: the Gelder-Lipschitz class, a harmonically modulated argument, the dependence of the Fourier coefficients, approximation of the derivative of a function.

References

1. Wertz J., Bolton J. Teoriya i prakticheskie prilozheniya metoda EPR [Theory and Practical Applications of EPR Method]. Moscow: Mir, 1975. 548 p. (in Russian)
2. Kuzmichev N. D. Gisterezisnaya namagnichennost i generatsiya garmonik magnitnymi materialami: analiz spektra garmonik namagnichennosti na primere vysokotemperaturnykh sverkhprovodnikov [Hysteresis magnetization and harmonic generation by magnetic materials: analysis of magnetization harmonic spectrum using high-temperature superconductors as an example] // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki [Journal of Technical Physics]. 1994. Vol. 64, no. 12. P. 63-74. (in Russian)
3. Kuzmichev N. D. Primenenie ryadov Teilora-Fure dlya chislennogo i eksperimentalnogo opredeleniya proizvodnykh izuchaemoi zavisimosti [Application of Taylor-Fourier series for numerical and experimental determination of derivatives of studied dependence] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2011. Vol. 13, no. 1. P. 70-80. (in Russian)
4. Kuzmichev N. D. Primenenie metoda modulyatsionnogo Fure-analiza dlya zadachi vosstanovleniya proizvodnykh [Application of modulation Fourier analysis method for derivative recovery problem] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2024. Vol. 26, no. 1. P. 44-59. (in Russian)
5. Kuzmichev N. D. Priblizhenie gelderovykh funktsii ikh koeffitsientami Fure dlya garmonicheskogo modulirovannogo argumenta [Approximation of Hölder functions by their Fourier coefficients for harmonically modulated argument] // Materialy XI Mezhdunarodnoi nauchnoi molodezhnoi shkoly-seminara im. E. V. Voskresenskogo [Proceedings of XI International Scientific Youth School-Seminar named after E. V. Voskresensky]. Saransk, 2024. P. 94-98. (in Russian)
6. Kuzmichev N. D. Approksimatsiya funktsii i ee proizvodnoi, prinadlezhashchikh klassu Geldera-Lipshitsa, ikh koeffitsientami Fure dlya garmonicheskogo modulirovannogo argumenta [Approximation of function and its derivative belonging

- to Hölder-Lipschitz class by their Fourier coefficients for harmonically modulated argument] // Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2025. Vol. 65, no. 4. P. 417-425. (in Russian)
7. Ilyin V. A., Sadovnichii V. A., Sendov B. Kh. Matematicheskii analiz. Prodolzhenie kursa [Mathematical Analysis. Continuation of the Course] / Ed. by A. N. Tikhonov. Moscow: Moscow University Press, 1987. 358 p. (in Russian)
 8. Bari N. K. Trigonometricheskie ryady [Trigonometric Series]. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 936 p. (in Russian)

УДК 519.63

Энтропийный анализ одной полностью консервативной разностной схемы с адаптивной искусственной вязкостью для численного решения задач газодинамики в переменных Эйлера

Ладонкина М.Е.^{1,2}, Повещенко Ю.А.^{1,2}, Чжан Х.²

ИПМ им. М.В.Келдыша РАН¹, МФТИ (НИУ)²

Аннотация: В работе проводится анализ энтропии при моделировании процессов газовой динамики при применении полностью консервативной разностной схемы с адаптивной искусственной вязкостью в эйлеровых переменных. Результаты показывают соответствие расчетов законам физики без учета уравнения энтропии.

Ключевые слова: полностью консервативная разностная схема, адаптивная искусственная вязкость, энтропия, задача Сода, задача Энфельдта, вычислительная газовая динамика.

1. Полностью консервативные разностные схемы

Уравнения газовой динамики представляют собой выражения основных законов сохранения (массы, импульса и энергии) в сплошной среде. Поэтому естественно строить дискретную модель изучаемой среды так, чтобы в ней выполнялись аналоги этих законов. Практика показывает, что применение таких схем особенно эффективно для решения задач, в которых профили решений резко изменяются во времени и пространстве. Дальнейшее развитие принципов интегральных согласований массы, импульса и различных видов энергий привело к понятию полностью консервативных разностных схем (ПКРС) [1], в дискретном виде сохраняющих также внутреннюю и кинетическую энергии системы и применяемых при лагранжевых и эйлеровых способах описания сплошной среды [1–3]. Введение адаптивной искусственной вязкости (АИВ) [4] в ПКРС позволяет подавлять возникающие в численном решении осцилляции локально, управляя пространственной аппроксимацией дискретной модели и не изменяя при этом её консервативно согласованных свойств по компонентам различных видов энергий, массопереносу и импульсу.

Рассмотрим двухслойную по времени полностью консервативную разностную схему пространственно-одномерного течения сжимаемого газа в переменных Эйлера в декартовой системе координат:

$$m_t = -vDIN_D\mu_D^{\sim}, \quad (1)$$

$$(mu)_t = -vGRAD_{\sigma}\pi^{\sim} - vDIT_D(\mu_D^{\sim} \cdot u_D^{\sim}), \quad (2)$$

$$(m\varepsilon)_t = -\frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} (\pi^{\sim}VDIV_{\sigma}u^{\sim})_{\Omega} - vDIN_D\mu_{ED}^{\sim}, \quad (3)$$

$$(m\frac{u^2}{2})_t = -v(u^{\sim}, GRAD_{\sigma}\pi^{\sim}) - vDIN_D(\mu_D^{\sim}\frac{u_D^2}{2}), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}\mu &= \rho u, \quad \mu_E = \varepsilon \mu = Eu, \quad E = \rho \varepsilon, \quad \rho^\sim = \rho^{(\psi_\rho)}, \quad \psi_\rho = const, \\ M_D^\sim &= \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_D^\sim = M_D^\sim - \nu_\rho^\sim GRAND \rho^\sim, \\ \pi_\Omega^\sim &= P_\Omega^{(0.5)} - \nu_u^\sim DIV_\sigma(\rho^\sim u^{(\psi_u)}), \quad P_\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} P_\omega, \quad \psi_u = const, \\ M_{ED}^\sim &= \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_\omega u_\omega)^{(0.5)}, \quad \mu_{ED}^\sim = M_{ED}^\sim - \nu_E^\sim GRAND(\rho^\sim \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}), \quad \psi_\varepsilon = const.\end{aligned}$$

Величины из набора искусственных вязкостей $\nu = \{\nu_\rho^\sim, \nu_u^\sim, \nu_E^\sim\}$ определяются в ячейках формулами $\nu_\rho^\sim = \beta_\rho \frac{h^2}{\tau}$, $\nu_u^\sim = \beta_u \frac{h^2}{\tau}$ и $\nu_E^\sim = \beta_E \frac{h^2}{\tau}$ [5], где $\beta = \{\beta_\rho, \beta_u, \beta_E\}$ – приведенные вязкости, зависящие от числа Куранта kr . В силу полученных [5] достаточных условий выполнения принципа максимума для моделирования процесса массопереноса уравнением неразрывности при наличии АИВ нижняя граница коэффициента β связана с числом Куранта kr , которое является тем самым масштабным физическим фактором, влияющим на подавление локальных неустойчивостей в задаче. Математические обоснования устойчивости для уравнений импульса и энергии носят аналогичный характер. В статье [5] разработаны некоторые методы наполнения АИВ и вычисления полученных ПКРС.

2. Численные эксперименты

Для тестирования предлагаемых методов адаптивной искусственной вязкости проводятся расчёты задач Эйфельдта [6] и Сода [7].

Часть результатов расчётов представлена в рис. 1а и рис. 1б. Результаты показывают эффективность данных методов. Часто при моделировании процессов газовой динамики с согласованием законов баланса сохранения массы, импульса и внутренней энергии при учёте энтропии полученные результаты не совпадают с аналитическим представлением [8]. В данных расчётах с применением предложенных методов численные значения скорости и термодинамических величин (плотность, внутренняя энергия и энтропия (P/ρ^γ , γ – показатель адиабаты)) совпадают с аналитическими.

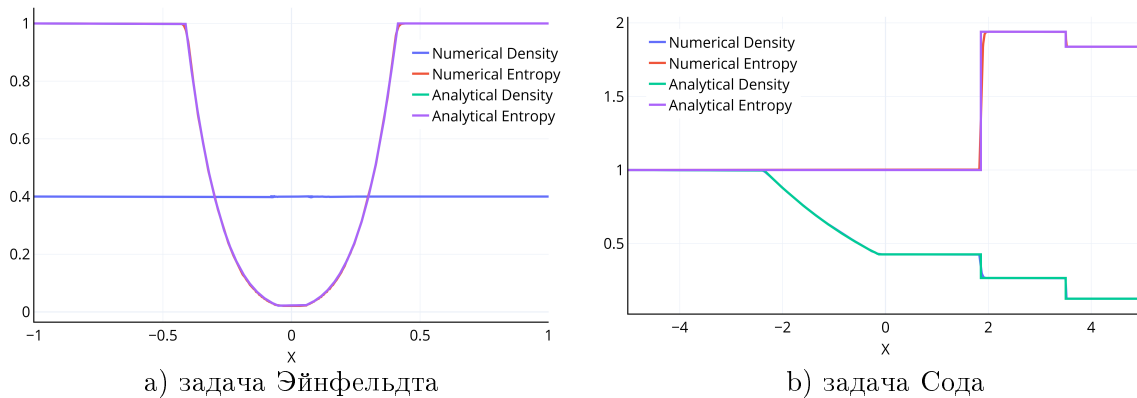


Рис. 1. Профиль плотности и энтропии.

Численное и аналитическое решение задач а) Эйфельдта, б) Сода.

Литература

1. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 953-958.
2. Кузьмин А. В., Макаров В. Л. Об одном алгоритме построения полностью консервативных разностных схем // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1982. Т. 22, № 1. С. 123-132.
3. Кузьмин А. В., Макаров В. Л., Меладзе Г. В. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнения газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20, № 1. С. 171-181.
4. Попов Ю. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2014. 200 с.
5. Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Чжан Х. Сравнительный анализ некоторых итерационных процессов для реализации полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 404-423.
6. Einfeldt B., Munz C. D., Roe P. L., Sjögreen B. On Godunov-type methods near low densities // Journal of Computational Physics. 1991. Vol. 92, No. 2. P. 273-295.
7. Sod G. A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1978. Vol. 27, No. 1. P. 1-31.
8. Guermond J. L., Nazarov M., Popov B., Tomas I. Second-order invariant domain preserving approximation of the Euler equations using convex limiting // SIAM Journal on Scientific Computing. 2018. Vol. 40, No. 5. P. A3211-A3239.

MSC 65M22

Entropy analysis of one completely conservative difference scheme with adaptive artificial viscosity for the numerical solution of gas dynamics problems in Euler variables

M.E. Ladonkina^{1,2}, Yu.A. Poveshchenko^{1,2}, H. Zhang²

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences¹,
Moscow Institute of Physics and Technology²

Abstract: In this paper, an analysis of entropy is carried out in modeling gas dynamics processes using a completely conservative difference scheme with adaptive artificial viscosity in Euler variables. The results show satisfaction of the law of physics of entropy without taking into account the entropy equation.

Keywords: completely conservative difference scheme, adaptive artificial viscosity, entropy, Sod's problem, Enfeldt's problem, computational gas dynamics.

References

1. Popov Yu. P., Samarskii A. A. Polnostyu konservativnye raznostnye skhemy [Fully conservative difference schemes] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1969. Vol. 9, No. 4. P. 953-958. (in Russian)
2. Kuzmin A. V., Makarov V. L. Ob odnom algoritme postroeniya polnostyu konservativnykh raznostnykh skhem [On an algorithm for constructing fully conservative difference schemes] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1982. Vol. 22, No. 1. P. 123-132. (in Russian)
3. Kuzmin A. V., Makarov V. L., Meladze G. V. Ob odnoi polnostyu konservativnoi raznostnoi skheme dlya uravneniya gazovoi dinamiki v peremennykh Eilera [On a fully conservative difference scheme for gas dynamics equations in Euler variables] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1980. Vol. 20, No. 1. P. 171-181. (in Russian)
4. Popov Yu. V., Fryazinov I. V. Metod adaptivnoi iskusstvennoi vyazkosti chislennogo resheniya uravnenii gazovoi dinamiki [Method of adaptive artificial viscosity for numerical solution of gas dynamics equations]. Moscow: Krasand, 2014. 200 p. (in Russian)
5. Ladonkina M. E., Poveshchenko Yu. A., Zhang H. Sravnitel'nyi analiz nekotorykh iteratsionnykh protsessov dlya realizatsii polnostyu konservativnykh raznostnykh skhem dlya uravnenii gazovoi dinamiki v peremennykh Eilera [Comparative analysis of some iterative processes for implementing fully conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2024. Vol. 26, No. 4. P. 404-423. (in Russian)

УДК 519.65:519.63

Об ортогональных сплайнах и их применении в вариационно-сеточных методах решения краевых задач

Леонтьев В.Л.

Научный Центр мирового уровня «Передовые цифровые технологии»
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого

Аннотация: Излагается теория ортогональных сплайнов и ее применение в смешанных вариационно-сеточных методах решения краевых задач механики деформируемого твердого тела, основанных на вариационном принципе Рейсснера. Рассматривается ортогонализация кубических сплайнов Шенберга с помощью авторской геометрической процедуры, не изменяющей, в отличие от процедуры ортогонализации Грама-Шмидта, конечные носители сплайнов. Обсуждаются результаты ортогонализации сплайнов Шенберга третьей степени с помощью четырех вспомогательных сплайнов Шенберга. Получены оценки погрешности аппроксимации любой функции трех пространств Соболева ортогональными сплайнами Шенберга. Предлагается использование ортогональных кубических сплайнов Шенберга при решении краевых задач, связанных с системами дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: ортогональные сплайны, авторская геометрическая процедура ортогонализации сплайнов, кубические сплайны Шенберга, краевые задачи, смешанные вариационно-сеточные методы, дифференциальные уравнения в частных производных, погрешность аппроксимации.

1. Обзор теории ортогональных сплайнов. Ортогонализация кубических сплайнов Шенберга

Дается описание ортогональных сплайнов одного, двух и трех аргументов, а также смешанных вариационных принципов, лежащих в основе алгоритмов смешанных вариационно-сеточных методов. Рассматривается применение авторской геометрической процедуры ортогонализации сплайнов [1] к кубическим сплайнам Шенберга [2], не изменяющей, в отличие от процедуры ортогонализации Грама-Шмидта, конечные носители сплайнов. В статье [3] показано, что в случае использования ступенчатых функций для модификации материнского сплайна Шенберга третьей степени достигается возможность ортогонализации системы сплайнов, порождаемой материнским сплайном на сетке. В статье [3] найдены несколько вариантов ортогонализации кубических сплайнов Шенберга ступенчатыми функциями с действительными и комплексными коэффициентами, а также только с действительными коэффициентами. Показано, что для ортогонализации сплайнов Шенберга достаточно использовать только четыре ступенчатые функции. В статье [3] доказана теорема о порядке аппроксимации любой функции пространства Соболева линейными комбинациями построенных ортогональных сплайнов Шенберга, который является более низким, чем для неортогональных сплайнов Шенберга. Полученные в статье [3] ортогональные сплайны Шенберга имеют разрывы первого рода, что снижает их аппроксимативные свойства. Обсуждаются результаты исследований в случае использования для орто-

гонализации сплайнов Шенберга третьей степени четырех вспомогательных сплайнов Шенберга, имеющих размеры конечных носителей в пять раз меньше размера конечного носителя материнского сплайна Шенберга. При этом учитываются результаты, полученные в статье [3]. Доказывается, что порядок аппроксимации любой функции пространства Соболева линейными комбинациями модифицированных сплайнов Шенберга не уменьшается в результате такой ортогонализации по сравнению с порядком аппроксимации линейными комбинациями классических неортогональных сплайнов Шенберга третьей степени. Построенный модифицированный материнский кубический сплайн Шенберга, в отличие от сплайна Шенберга [3], модифицированного ступенчатыми функциями, является непрерывной функцией, у которой нет разрывов первой и второй производных, т.е. его гладкость значительно выше.

2. О применении ортогональных кубических сплайнов Шенберга при решении краевых задач

Показано, что погрешность аппроксимации любой функции пространства Соболева W_2^0 ортогональными сплайнами Шенберга имеет порядок h^4 . Погрешность аппроксимации любой функции пространства Соболева W_2^1 и ее первой производной ортогональными сплайнами Шенберга имеет порядок h^3 . Погрешность аппроксимации любой функции пространства Соболева W_2^2 , а также ее первой и второй производных, имеет порядок h^2 . Эти оценки характеризуют высокую точность аппроксимации, которая, совместно с высокой гладкостью сплайнов, создает предпосылки для эффективного применения линейных комбинаций ортогональных сплайнов Шенберга третьей степени, как для непосредственной аппроксимации функций, так и для аппроксимации искомых решений краевых задач.

Предлагается использование ортогональных кубических сплайнов Шенберга при решении краевых задач механики деформируемого твердого тела, связанных с системами дифференциальных уравнений в частных производных. Ортогональные сплайны Шенберга третьей степени, полученные модификацией четырьмя вспомогательными сплайнами Шенберга с уменьшенными по размерам конечными носителями, являются вкладом в общую теорию сплайнов и в теорию ортогональных сплайнов [1], и порождают новые возможности при построении алгоритмов вариационно-сеточных методов, основанных на вариационных принципах Рейсснера и Ху-Вашицу [1].

В частности, применение ортогональных сплайнов Шенберга третьей степени в таких алгоритмах создает предпосылки для повышения фактической точности аппроксимаций искомых решений краевых задач и для увеличения скорости сходимости приближенных решений. Кроме того, ортогональность сплайнов Шенберга третьей степени позволяет исключить при этом узловые неизвестные, соответствующие силовым факторам и деформациям, до начала решения глобальной системы вариационно-сеточных уравнений на компьютере, что делает такие смешанные вариационно-сеточные методы сравнимыми по вычислительным затратам на отыскание приближенных решений с численными методами, основанными на вариационном принципе Лагранжа.

Литература

1. Леонтьев В. Л. Ортогональные сплайны и специальные функции в методах вычислительной механики и математики. Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 466 с.

2. Schoenberg I. J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quarterly of Applied Mathematics. 1946. Vol. 4. P. 45-99, 112-141.
3. Леонтьев В. Л. Об ортогонализации сплайнов Шенберга // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 2. С. 111-126. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126.

MSC 41A15, 35G05

On orthogonal splines and their application in variational-grid methods for solving boundary value problems

V.L. Leontiev

World-Class Research Center for Advanced Digital Technologies at
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

Abstract: The theory of orthogonal splines and its application in mixed variational-grid methods for solving boundary value problems of deformable solid mechanics based on the Reissner variational principle are described. The orthogonalization of Schoenberg cubic spline is considered using the author's geometric procedure, which does not change the finite supports of the splines, unlike the Gram-Schmidt orthogonalization procedure. The results of orthogonalization of Schoenberg splines of the third degree using of auxiliary Schoenberg splines are discussed. Estimates of the approximation error of any function of three Sobolev spaces by orthogonal Schoenberg splines are obtained. The use of orthogonal cubic Schoenberg splines in solving boundary value problems related to systems of partial differential equations is proposed.

Keywords: orthogonal splines, the author's geometric procedure for orthogonalizing splines, cubic Schoenberg splines, boundary value problems, mixed variational-grid methods, partial differential equations, approximation error.

References

1. Leontiev V. L. Ortogonalnye splainy i spetsialnye funktsii v metodakh vychislitelnoi mekhaniki i matematiki [Orthogonal splines and special functions in computational mechanics and mathematics methods]. Saint Petersburg: POLITEKH-PRESS, 2021. 466 p. (in Russian)
2. Schoenberg I. J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quarterly of Applied Mathematics. 1946. Vol. 4. P. 45-99, 112-141.
3. Leontiev V. L. Ob ortogonalizatsii splainov Shenberga [On orthogonalization of Schoenberg splines] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2025. Vol. 27, no. 2. P. 111-126. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126. (in Russian)

УДК 519.63

Эффективность параллельных реализаций классических итерационных методов решения уравнения Пуассона в цилиндрических координатах

Логинов В.В., Пескова Е.Е.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье представлен сравнительный анализ эффективности параллельных реализаций классических итерационных методов (Якоби, Гаусса-Зейделя, SOR) для решения уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат. В основу исследования положены методы ускорения вычислений с использованием технологии CUDA и библиотеки PyCUDA.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, цилиндрическая система координат, GPU-ускорение, параллельные вычисления, итерационные методы, CUDA

1. Введение

Уравнение Пуассона является фундаментальным в математической физике и широко применяется для описания потенциалов, распределения температур, давления и других величин в различных областях науки и техники. Особое значение оно приобретает при моделировании процессов в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) , которые часто используются для описания задач с геометрией цилиндрической формы [1].

Общее уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(r, \phi, z), \quad (1)$$

где $u(r, \phi, z)$ — искомая функция, $f(r, \phi, z)$ — заданная функция источника.

Численное решение этого уравнения требует дискретизации области и применения эффективных итерационных методов для решения возникающих систем уравнений. Учитывая большой объём вычислений при трёхмерных моделях, становится необходимым использовать высокопроизводительные вычислительные платформы, такие как графические ускорители.

2. Обзор методов решения уравнения Пуассона

Метод Якоби — это один из самых простых в реализации итерационных методов. Он основывается на том, что значение функции в каждой точке обновляется с использованием значений её соседей с предыдущей итерации. Для этого метода легко применимы технологии параллельных вычислений, так как каждый узел обновляется независимо от других. Однако нужно учитывать, что у метода довольно медленная сходимость, особенно на сетках большой размерности, что ограничивает его эффективность при решении сложных задач.

Введем обозначения: n — номер итерации, (i, j, k) — индексы пространственной ячейки по координатам r , ϕ и z , соответственно; h_r , h_ϕ и h_z — шаги интегрирования

по координатам r , ϕ и z , соответственно.

Итерационная формула для метода Якоби:

$$u_{(i,j,k)}^{(n+1)} = \left(\frac{u_{(i+1,j,k)}^{(n)} + u_{(i-1,j,k)}^{(n)}}{h_r^2} + \frac{u_{(i+1,j,k)}^{(n)} - u_{(i-1,j,k)}^{(n)}}{2r_i h_r^2} + \frac{u_{(i,j+1,k)}^{(n)} + u_{(i,j-1,k)}^{(n)}}{r_i^2 h_\phi^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{(i,j,k+1)}^{(n)} + u_{(i,j,k-1)}^{(n)}}{h_z^2} - f_{(i,j,k)} \right) / \left(\frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{r_i^2 h_\phi^2} + \frac{2}{h_z^2} \right). \quad (2)$$

Метод Гаусса-Зейделя улучшает сходимость решения, поскольку на каждом шаге итерации используются уже обновлённые значения переменных, что позволяет ускорить процесс сходимости по сравнению с методом Якоби. Однако, это приводит к трудностям при параллельной реализации, поскольку обновление значений в каждой точке зависит от значений, вычисленных в других точках, что создаёт последовательные зависимости и нарушает независимость вычислений, необходимую для эффективного параллелизма.

Итерационная формула для метода Гаусса-Зейделя:

$$u_{(i,j,k)}^{(n+1)} = \left(\frac{u_{(i+1,j,k)}^{(n)} + u_{(i-1,j,k)}^{(n+1)}}{h_r^2} + \frac{u_{(i+1,j,k)}^{(n)} - u_{(i-1,j,k)}^{(n+1)}}{2r_i h_r^2} + \frac{u_{(i,j+1,k)}^{(n)} + u_{(i,j-1,k)}^{(n+1)}}{r_i^2 h_\phi^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{(i,j,k+1)}^{(n)} + u_{(i,j,k-1)}^{(n+1)}}{h_z^2} - f_{(i,j,k)} \right) / \left(\frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{r_i^2 h_\phi^2} + \frac{2}{h_z^2} \right). \quad (3)$$

Метод SOR – это улучшенная версия метода Гаусса-Зейделя. В нём вводится дополнительный параметр релаксации ω , который регулирует скорость сходимости. При правильном выборе ω сходимость ускоряется. Параллельная реализация метода SOR сталкивается с такими же трудностями, как и метод Гаусса-Зейделя, из-за зависимостей между значениями, которые обновляются последовательно. Несмотря на это, метод остаётся мощным инструментом для решения больших задач, но требует дополнительной настройки для эффективной работы на параллельных системах.

Итерационная формула для метода SOR:

$$u_{(i,j,k)}^{(n+1)} = (1-\omega)u_{(i,j,k)}^{(n)} + \omega \left(\frac{u_{(i+1,j,k)}^{(n)} + u_{(i-1,j,k)}^{(n+1)}}{h_r^2} + \frac{u_{(i+1,j,k)}^{(n)} - u_{(i-1,j,k)}^{(n+1)}}{2r_i h_r^2} + \frac{u_{(i,j+1,k)}^{(n)} + u_{(i,j-1,k)}^{(n+1)}}{r_i^2 h_\phi^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{(i,j,k+1)}^{(n)} + u_{(i,j,k-1)}^{(n+1)}}{h_z^2} - f_{(i,j,k)} \right) / \left(\frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{r_i^2 h_\phi^2} + \frac{2}{h_z^2} \right). \quad (4)$$

где ω – параметр релаксации, который регулирует скорость сходимости. Значения параметра выбираются в диапазоне от 1 до 2.

3. Результаты вычислительных экспериментов

Рассмотренные методы были реализованы с использованием библиотеки Numba [2] для вычислений на CPU. На рис. 1–2 представлены результаты сравнения описанных методов. Из проведённых экспериментов видно, что метод SOR (метод последовательной релаксации) имеет значительное преимущество перед методом Якоби и методом Гаусса-Зейделя как по скорости сходимости, так и по времени выполнения.

В частности, метод SOR показал пятикратное улучшение по сравнению с методом Якоби и трёхкратное по сравнению с методом Гаусса-Зейделя. Однако, несмотря на эти преимущества, при увеличении размерности сетки время выполнения растёт значительно, что требует оптимизации методов.

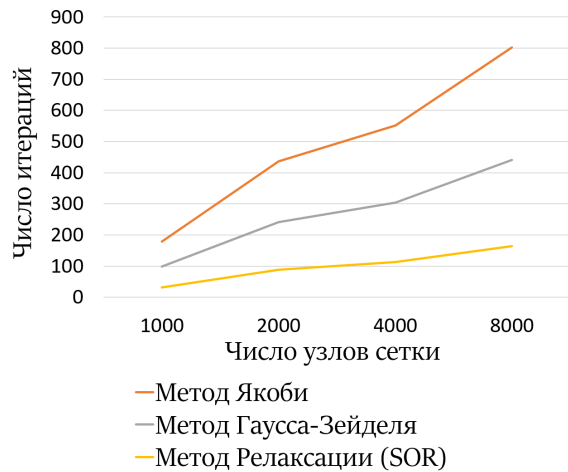


Рис. 1. Сравнение скорости сходимости.

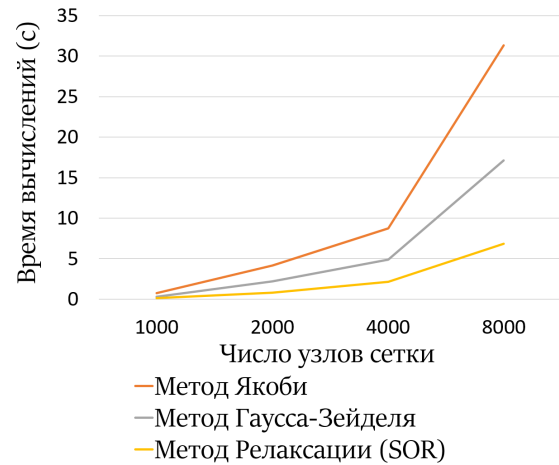


Рис. 2. Сравнение времени выполнения.

Использование GPU позволяет эффективно масштабировать задачу и сокращать время вычислений за счет массового параллелизма. Однако, как упоминалось ранее, некоторые методы не поддерживают параллельную реализацию. Одним из решений этой проблемы является красно-чёрное разбиение области [3], при котором сетка делится на красные и чёрные узлы, а вычисления выполняются поочерёдно. Однако при использовании на GPU такой подход даёт улучшения лишь в пределах погрешности из-за особенностей реализации параллельных вычислений на CUDA.

На рис. 3 представлено сравнение параллельного метода Якоби между CPU и GPU с использованием библиотеки PyCUDA [4]. Реализация параллельного метода на видеокарте даёт 4 кратное ускорение при небольшом числе узлов и достигает до 10 кратного ускорения при увеличении числа узлов по сравнению с реализацией параллельных вычислений на центральном процессоре.

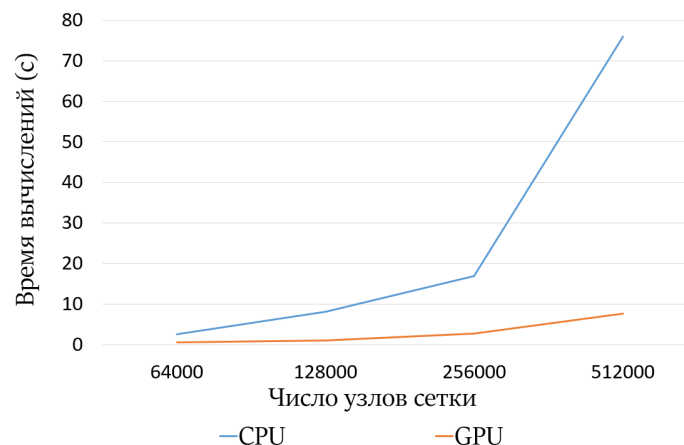


Рис. 3. Сравнение времени выполнения программы на CPU и GPU.

Литература

1. Peskova E. E., Snytnikov V. N. The Influence of Laser Radiation on the Laminar Flow of a Chemically Active Gas-Dust Medium in a Narrow Circular Tube // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2024. Vol. 58, no. 3. P. 517-525.
2. Numba: A Just-In-Time Compiler for Python [Электронный ресурс]. URL: <https://numba.pydata.org/> (дата обращения: 10.07.2025).
3. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем / Пер. с англ. Москва: Мир, 1991. 368 с.
4. PyCUDA: Python interface to CUDA [Электронный ресурс]. URL: <https://documen.tician.de/pycuda/> (дата обращения: 10.07.2025).

MSC 65L20

The efficiency of parallel implementations of classical iterative methods for solving the Poisson equation in cylindrical coordinates.

V.V. Loginov, E.E. Peskova

National Research Mordovia State University

Abstract: The article presents a comparative analysis of the efficiency of parallel implementations of classical iterative methods (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR) for solving the Poisson equation in cylindrical coordinates on graphics processing units (GPUs). The study is based on computational acceleration techniques using CUDA technology and the PyCUDA library.

Keywords: Poisson equation, cylindrical coordinates, GPU acceleration, parallel computing, iterative methods, CUDA.

References

1. Peskova E. E., Snytnikov V. N. The Influence of Laser Radiation on the Laminar Flow of a Chemically Active Gas-Dust Medium in a Narrow Circular Tube // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2024. Vol. 58, no. 3. P. 517-525.
2. Numba: A Just-In-Time Compiler for Python [Online]. Available: <https://numba.pydata.org/> (accessed: 10.07.2025).
3. Ortega J. Vvedenie v parallelnye i vektornye metody resheniya lineinykh sistem [Introduction to Parallel and Vector Methods for Solving Linear Systems]. Moscow: Mir, 1991. 368 p. (in Russian)
4. PyCUDA: Python interface to CUDA [Online]. Available: <https://documen.tician.de/pycuda/> (accessed: 10.07.2025).

УДК 517.977.5

Метод параметризации для решения задач оптимального управления с многокомпонентным управлением*

Лутошкин И.В., Чекмарев А.Г.

Ульяновский государственный университет

Аннотация: Предложено развитие метода параметризации для задач оптимального управления, описываемых системой дифференциальных уравнений и терминальными ограничениями. Рассмотрен случай многомерного вектора управлений и независимой параметризации координат управления. Разработаны алгоритмы для вычисления производных первого и второго порядка в задаче нелинейного программирования, порожденной параметризацией управляющих функций.

Ключевые слова: оптимальное управление, численные методы, метод параметризации, метод второго порядка.

1. Постановка

Поиск оптимального управления нелинейными динамическими системами возникает при построении моделей в различных областях науки, техники, технологии, социальных системах и др. [1]. Для решения соответствующих задач наиболее часто применяются численные методы [1–3]. В настоящей работе для задач оптимального управления с многомерным вектором управления развивается метод параметризации [1, 4, 5] на случай применения методов второго порядка.

Рассмотрим задачу оптимального управления, представленную автономной системой дифференциальных уравнений, терминальными ограничениями, терминальным функционалом и фиксированным начальным состоянием:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$\begin{cases} g_l(x(T)) = 0, & l = \overline{1, m_1}, \\ g_l(x(T)) \leq 0, & l = \overline{m_1 + 1, m}, \end{cases} \quad (3)$$

$$J = g_0(x(T)) \rightarrow \min. \quad (4)$$

Здесь x – вектор фазовых переменных ($x \in \mathbb{R}^n$), u – вектор управления ($u \in \mathbb{R}^r$). Терминальные функции $g_l(z)$, $1 \leq l \leq m$, $z \in \mathbb{R}^n$, и функции $f_i(x, u)$, $1 \leq i \leq n$, дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам. Фазовая траектория и управление рассматривается при $t_0 \leq t \leq T$. Конечный момент T является либо фиксированным, либо свободным, но при этом ограничен некоторой величиной T^* сверху.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-28-00542, <https://rscf.ru/project/24-28-00542/>.

Предполагается, что множество допустимых значений управления $U \subset \mathbb{R}^r$ является выпуклым связным компактом; каждому управлению $u(t)$, удовлетворяющему (2), отвечает траектория $x(t)$ системы (1), определенная на $[t_0, T]$; задача (1)-(4) разрешима в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in [t_0, T]$.

2. Параметризация

Введем r независимых разбиений отрезка $[t_0, T]$:

$$t_0 \leq t_{\mu 1} \leq \dots \leq t_{\mu N_\mu} \equiv T, \quad 1 \leq \mu \leq r. \quad (5)$$

На отрезках каждого разбиения μ ($\mu = \overline{1, r}$) закрепим структуру соответствующего управления u_μ :

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{\mu(k-1)} \leq t < t_{\mu k}, \quad k = \overline{1, N_\mu}. \quad (6)$$

Здесь $v_\mu^k \in \mathbb{R}^{d(k, \mu)}$ – вектор параметров.

Введем вектор параметров $w_\mu^k = (t_{\mu k}, v_\mu^k) \equiv (w_{\mu, 0}^k, w_{\mu, 1}^k, \dots, w_{\mu, d(k, \mu)}^k)$. Если в задачу Коши (1) подставить управление (5), (6), то получаемое решение $x(t)$ представляется функцией $z(t; w_1^1, \dots, w_1^{N_1}, w_2^1, \dots, w_2^{N_2}, \dots, w_r^1, \dots, w_r^{N_r})$.

Введем обозначение $w_\mu = (w_\mu^1, w_\mu^2, \dots, w_\mu^{N_\mu})$ ($1 \leq \mu \leq r$) и определим функции

$$\varphi_l(w_1, w_2, \dots, w_r) = g_l(z(T; w_1, w_2, \dots, w_r)). \quad (7)$$

В этом случае исходная задача (1)-(4) аппроксимируется задачей нелинейного программирования:

$$\varphi_0(w_1, w_2, \dots, w_r) \rightarrow \min \quad \text{при ограничениях} \quad (8)$$

$$\varphi_l(w_1, w_2, \dots, w_r) = 0, \quad 1 \leq l \leq m_1, \quad (9)$$

$$\varphi_l(w_1, w_2, \dots, w_r) \leq 0, \quad m_1 + 1 \leq l \leq m, \quad (10)$$

$$W = \{w_\mu^k : w_{\mu, 0}^{k-1} \leq w_{\mu, 0}^k, \quad u_\mu^k(t; v_\mu^k) \in U, \quad w_{\mu, 0}^{k-1} \leq t \leq w_{\mu, 0}^k, \quad (11)$$

$$k = \overline{1, N_\mu}; \quad w_{\mu, 0}^0 = t_0, w_{\mu, 0}^{N_\mu} \equiv T \leq T^*, \quad \mu = \overline{1, r}\}. \quad (12)$$

Для эффективного решения задачи нелинейного программирования (8) требуется применения методов первого и второго порядка с вычислением соответствующих производных функций $\varphi_l(w_1, w_2, \dots, w_r)$, $0 \leq l \leq m$.

Поскольку функции (7) заданы опосредованно, вычисление производных функций (7) сводится к отдельному алгоритму. Алгоритм вычисления производных включает в себя решение задачи Коши для сопряженных переменных, решение задачи Коши для матричного импульса, применение функции Понтрягина.

Литература

1. Лутошкин И. В. Динамические модели экономических систем и методы их анализа. Ульяновск: УлГУ, 2024. 188 с.
2. Eichmeir P., Nachbagauer K., Lauf T. et al. Time-Optimal Control of Dynamic Systems Regarding Final Constraints // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 16, no. 3. Art. 031003. 12 p. DOI: 10.1115/1.404933476.

3. Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P. Notes on numerical methods for solving optimal control problems // IEEJ Journal of Industry Applications. 2016. Vol. 5, iss. 2. P. 154-166. DOI: 10.1541/ieejia.5.154.
4. Горбунов В. К., Лутошкин И. В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 67-84.
5. Лутошкин И. В., Чекмарев А. Г. Развитие метода параметризации для решения задач оптимального управления и разработка концепции программного комплекса // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 260-279. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202403.260-279.

MSC 49M99

The parameterization method for solving optimal control problems with multicomponent control

I.V. Lutoshkin, A.G. Chekmarev

Ulyanovsk State University

Abstract: The development of the parameterization method for optimal control problems described by a system of differential equations and terminal constraints is carried out. The case of a multidimensional control vector and independent parameterization of control coordinates is considered. Algorithms are derived for calculating first- and second-order derivatives in a nonlinear programming problem generated by the parameterization of control functions.

Keywords: optimal control, numerical methods, the parameterization method, second order method.

References

1. Lutoshkin I. V. Dinamicheskie modeli ekonomicheskikh sistem i metody ikh analiza [Dynamic models of economic systems and methods of their analysis]. Ulyanovsk: UIGU, 2024. 188 p. (in Russian)
2. Eichmeir P., Nachbagauer K., Lauf T. et al. Time-Optimal Control of Dynamic Systems Regarding Final Constraints // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 16, no. 3. Art. 031003. 12 p. DOI: 10.1115/1.404933476.
3. Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P. Notes on numerical methods for solving optimal control problems // IEEJ Journal of Industry Applications. 2016. Vol. 5, iss. 2. P. 154-166. DOI: 10.1541/ieejia.5.154.
4. Gorbunov V. K., Lutoshkin I. V. Razvitie i opyt primeneniya metoda parametrizatsii v vyrozhdennykh zadachakh dinamicheskoi optimizatsii [Development and application experience of parameterization method in degenerate dynamic optimization problems] // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Control Theory and Systems]. 2004. No. 5. P. 67-84. (in Russian)
5. Lutoshkin I. V., Chekmarev A. G. Razvitie metoda parametrizatsii dlya resheniya zadach optimalnogo upravleniya i razrabotka kontseptsii programmno kompleksa [Development of parameterization method for solving optimal control problems and software concept development] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2024. Vol. 26, no. 3. P. 260-279. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202403.260-279. (in Russian)

УДК 517.91

Модель течения двухфазной жидкости с неоднородной эффективной вязкостью

Мартынов С.И.

Сургутский государственный университет

Аннотация: Рассматриваются течения жидкости с частицами вдоль плоской стенки с заданным напряжением на свободной поверхности и в трубе круглого сечения с заданным градиентом давления на основе модели сплошной среды с эффективной вязкостью. Предполагается, что эффективная вязкость меняется с расстоянием от стенок. Уравнения динамики рассматриваемой среды в этом случае содержат слагаемые с градиентом эффективной вязкости. Однако для исследуемой неоднородности эффективной вязкости полученные уравнения имеют точные решения, что позволяет оценить расход и воздействие на стенки рассматриваемой двухфазной среды.

Ключевые слова: моделирование, вязкая жидкость, частицы, эффективная вязкость, точное решение.

1. Введение

Математическое моделирование динамики систем жидкость-частицы представляет собой не простую теоретическую задачу. Это связано со сложностью рассматриваемых систем, в которых необходимо учитывать коллективное взаимодействие частиц между собой и жидкостью. Фактически имеются два подхода, используемых для описания коллективной динамики систем активных частиц в жидкости. Один из них связан с прямым численным моделированием динамики таких систем на основе современных достижений информационных технологий. Однако, с учетом того, что для реальных систем с наночастицами даже при однопроцентных объемных концентрациях число частиц в единице объема смеси имеет порядок $10^{12} - 10^{15}$, то данный подход даже при современном уровне информационных технологий практически нереализуем. Поэтому в теоретических исследованиях при моделировании динамики таких систем в основном используется второй подход, при котором гидродинамическое взаимодействие частиц учитывается в приближении среднего поля [1, 2]. Задача осложняется еще и тем, что помимо гидродинамического необходимо учитывать и другие взаимодействия, обусловленных наличием у частиц и в самой жидкости электрических зарядов и других потенциалов. Кроме того, необходимо учитывать взаимодействие частиц с твердыми поверхностями, ограничивающих объем таких систем. С учетом сказанного выше можно сделать вывод, что моделирование динамики такого большого числа частиц с учетом их гидродинамического взаимодействия в настоящее время пока доступно только в приближении среднего поля. Это означает, что речь идет о модели сплошной среды с параметрами, характеризующими такую среду в целом. Одним из таких параметров является эффективная вязкость системы, которая определяется экспериментально или на основе теоретической модели [3]. При этом необходимо отметить, первый подход позволяет более точно учесть результат гидродинамического взаимодействия частиц, чем модель сплошной среды. Так, в работе [4] на основе прямого численного моделирования коллективной динамики

решалась задача о движении каталитического наномотора в облаке заряженных частиц разного знака. Показано, что результате гидродинамического взаимодействия возможно перемещение наномотора даже в случае равенства нулю суммарного заряда окружающих его заряженных частиц. Моделирование же на основе уравнений электрогидродинамики приводит к необходимости наличия асимметрии в зарядах для перемещения наномотора. Такое различие можно объяснить тем, что уравнения электрогидродинамики фактически учитывают воздействие на жидкость только частиц, дающих объемный заряд, т.е. только малой части из всех, имеющих заряд, так как частицы, чей суммарный заряд равен нулю вообще не учитываются при расчете течения жидкости. В случае нейтральной системы заряженных частиц воздействие на жидкость со стороны заряженных частиц в этой модели отсутствует. Из прямого численного моделирования динамики первой следует, что такое воздействие имеет место и приводит к перемещению наномотора.

2. Основные уравнения и допущения

Рассматривается двухфазная среда жидкость – частицы эффективная вязкость которой η представляется в виде $\eta = \eta_0(1 + K\varphi)$, здесь η_0 – вязкость жидкости носителя, $\varphi = nV_p$ – объемная концентрация частиц, n – числовая концентрация частиц, V_p – объем одной частицы, K – коэффициент, учитывающий изменение вязкости с расстоянием от стенок, ограничивающих объем среды [5]. Плотность двухфазной среды $\rho = \rho(\varphi)$ зависит от объемной концентрации частиц, которая тоже может менять с расстоянием от стенок. В стационарном случае уравнения динамики двухфазной среды со скоростью $\mathbf{u}$ имеют вид:

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Здесь тензор плотности потока импульса Π_{ij} представляется в следующем виде

$$\Pi_{ij} = \rho u_i u_j + p + \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (2)$$

Тензор вязких напряжений σ_{ij} определяется так же, как и для однофазной жидкости с коэффициентом второй вязкости среды ζ . Диффузионное уравнение для концентрации частиц со скоростью $\mathbf{v}$ имеет стандартный вид:

$$\operatorname{div}(n\mathbf{v}) = 0, \quad n(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = -nb\nabla U - D\nabla n, \quad (3)$$

Здесь $D = \frac{k_B T}{b}$ – коэффициент диффузии частиц, b – подвижность частиц, $k_B T$ – произведение постоянной Больцмана и температуры, U – потенциальная энергия внешнего поля, действующего на частицы. Будем предполагать, что сила со стороны этого поля перпендикулярна скорости среды $\mathbf{u}$. Это означает, что скорости частиц и среды совпадают $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Из второго уравнения (3) следует равновесное распределение частиц по закону $n \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right)$ из которого следует выполнение условия $\nabla \varphi \cdot \mathbf{u} = 0$. Второе уравнение (1) при этом дает условие $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ и тензор σ_{ij} , принимает вид

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Тогда из первого уравнения (1) с учетом вида тензора Π_{ij} и условия, что скорость среды в выбранной системе прямоугольных координат имеет только одну составляющую получаем следующее уравнение для динамики рассматриваемой сплошной среды:

$$-\nabla p + (\nabla \eta \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

Необходимо отметить, что полученное уравнение (4) имеет место и для одномерной концентрации частиц $n = \text{const}$. Градиент эффективной вязкости η , направленный перпендикулярно скорости сплошной среды $\mathbf{u}$, может быть создан за счет гидродинамического взаимодействия частиц со стенкой (увеличение пристеночной эффективной вязкости) или градиентом температуры, от которой зависит вязкость несущей жидкости.

3. Точные решения

Рассмотрим сдвиговое течение жидкости с частицами вдоль плоской стенки за счет создаваемого на поверхности слоя толщины h напряжения τ . Выберем систему прямоугольных координат таким образом, что ось OX направлена вдоль стенки, а ось OY – перпендикулярно ей с началом на поверхности стенки. Уравнение (4) и граничные условия в этом случае имеют вид

$$\frac{d\eta(y)}{dy} \frac{du_x}{dy} + \eta(y) \frac{d^2 u_x}{dy^2} = 0, \quad \eta(h) \left(\frac{du_x}{dy} \right)_{y=h} = \tau, \quad u_x(0) = 0.$$

Задача имеет следующее решение

$$\eta(y) \frac{du_x}{dy} = \tau, \quad u_x(y) = \tau \int \frac{dy}{\eta(y)} + C.$$

Для определения константы интегрирования C из условия равенства нулю скорости жидкости на поверхности стенки необходимо знать зависимость эффективной вязкости от поперечной координаты y . Но при этом напряжение на стенке и в любом сечении, параллельном стенке, одинаковое и равно заданному напряжению на поверхности τ .

Рассмотрим еще одно течение, допускающее точное решение уравнения (4), а именно течение с заданным градиентом давления $-\frac{dp}{dx} = C_1 > 0$ в трубе круглого сечения радиуса R . В системе координат, в которой ось OX направлена вдоль оси трубы, а $r = (y^2 + z^2)^{1/2}$ уравнение (4) и граничное условие на стенке трубы имеют следующий вид

$$C_1 + \frac{d\eta(r)}{dr} \frac{du_x}{dr} + \eta(r) \left(\frac{d^2 u_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_x}{dr} \right) = 0, \quad u_r(0) = 0.$$

Это уравнение заменой $\frac{du_x}{dr} = w(r)$ сводится к уравнению первого порядка типа Бернулли, решение которого находится непосредственно

$$\eta(r) \frac{du_x}{dr} = -\frac{C_1 r}{2}, \quad u_x(r) = -C_1 \int \frac{r dr}{2\eta(r)} + C_2.$$

Как видно из приведенного решения, напряжение на стенке трубы не зависит от вязкости, а определяется только заданным градиентом давления и радиусом трубы.

При изменении вязкости меняется только профиль скорости и, следовательно, расход сплошной среды. Подобные задачи рассматривались в гемодинамике [6, 7] для определения распределения эритроцитов в кровеносных сосудах. Еще одно применение полученных результатов - теоретическое обоснование увеличения нефтеотдачи пласта при воздействии наножидкостей на пласт [8]. Полученные выше результаты свидетельствуют, что увеличение нефтеотдачи пласта нельзя объяснить ростом силы трения за счет большей вязкости жидкости с частицами в рамках модели сплошной среды. Но, как было указано выше, прямое моделирование динамики частиц и жидкости дает более корректный результат по сравнению с моделью сплошной среды.

4. Заключение

Получено аналитическое решение для двух течений жидкости с частицами в рамках модели сплошной среды с неоднородной эффективной вязкостью, которая представляется в линейном приближении по объемной концентрации частиц. При этом считается, что и коэффициент в слагаемом с объемной концентрацией частиц зависит от расстояния от стенок, ограничивающих жидкость с частицами. Рассматривается случай, когда объемная концентрация частиц постоянна или неоднородна поперек течения из-за внешних сил, действующих на частицы. При этих условиях уравнения динамики сплошной среды допускают точное стационарное решение для течения сдвига с заданным напряжением на свободной поверхности и течения в трубе круглого сечения с заданным градиентом давления. Оба решения показывают, что такая неоднородность эффективной вязкости меняет профиль скорости течения, но не меняет напряжение в среде и силу, действующую на стенки со стороны сплошной среды.

Литература

1. Koessel F. R., Jabbari-Farouji S. Emergent pattern formation of active magnetic suspensions in an external field // *New Journal of Physics*. 2020. Vol. 22. Art. 103007.
2. Manikas K., Vogiatzis G. G., Hütter M., Anderson P. D. Structure formation in suspensions under uniform electric or magnetic field // *Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design*. 2021. Vol. 4. P. 77-97.
3. Келбалиев Г. И., Тагиев Д. Б., Расулов С. Р., Манафов М. Р. Структурообразование и эффективная вязкость неньютоновской нефти // *Инженерно-физический журнал*. 2023. Т. 96, № 1. С. 57-65.
4. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Модель гидродинамического механизма перемещения наномоторов // *Математическое моделирование*. 2020. Т. 32, № 12. С. 81-94.
5. Полунин В. М., Ряполов П. А., Жакин А. И., Шельдешова Е. В. Вязкость магнитной жидкости при колебаниях в сильном магнитном поле // *Акустический журнал*. 2019. Т. 65, № 4. С. 477-483.
6. Damiano E. R., Long D. S., Smith M. L. Estimation of viscosity profiles using velocimetry data from parallel flows of linearly viscous fluids: application to microvascular haemodynamics // *Journal of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 512. P. 1-19.
7. Медведев А. Е. Двухфазная модель течения крови в крупных и мелких кровеносных сосудах // *Математическая биология и биоинформатика*. 2011. Т. 6, № 2. С. 228-249.

8. Sircar A., Rayavarapu K., Bist N., Yadav K., Singh S. Applications of nano-particles in enhanced oil recovery // Petroleum Research. 2022. No. 1. P. 77-90.

MSC 76D07, 76D09, 76D17

Model of two-phase fluid flow with non-uniform effective viscosity

S.I. Martynov

Surgut State University

Abstract: The paper considers flows of fluid with particles along a flat wall with a given stress on the free surface and in a circular pipe with a given pressure gradient based on a continuous medium model with effective viscosity. It is assumed that the effective viscosity changes with distance from the walls. The equations of the dynamics of the medium under consideration in this case contain terms with a gradient of effective viscosity. However, for the considered inhomogeneity of effective viscosity, the obtained equations have exact solutions, which allows us to estimate the flow rate and the effect of the two-phase medium under consideration on the walls.

Keywords: numerical simulation, viscous liquid, collective interaction of particles, chain, deformation.

References

1. Koessel F. R., Jabbari-Farouji S. Emergent pattern formation of active magnetic suspensions in an external field // *New Journal of Physics*. 2020. Vol. 22. Art. 103007.
2. Manikas K., Vogiatzis G. G., Hütter M., Anderson P. D. Structure formation in suspensions under uniform electric or magnetic field // *Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design*. 2021. Vol. 4. P. 77-97.
3. Kelbaliev G. I., Tagiev D. B., Rasulov S. R., Manafov M. R. Strukturoobrazovanie i effektivnaya vyazkost nenyutonovskoi nefti [Structure formation and effective viscosity of non-Newtonian oil] // *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal [Journal of Engineering Physics]*. 2023. Vol. 96, no. 1. P. 57-65. (in Russian)
4. Martynov S. I., Tkach L. Yu. Model gidrodinamicheskogo mekhanizma peremeshcheniya nanomotorov [Model of hydrodynamic mechanism of nanomotor motion] // *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*. 2020. Vol. 32, no. 12. P. 81-94. (in Russian)
5. Polunin V. M., Ryapolov P. A., Zhakin A. I., Sheldeshova E. V. Vyazkost magnitnoi zhidkosti pri kolebaniyakh v silnom magnitnom pole [Viscosity of magnetic fluid under oscillations in strong magnetic field] // *Akusticheskii zhurnal [Acoustical Physics]*. 2019. Vol. 65, no. 4. P. 477-483. (in Russian)
6. Damiano E. R., Long D. S., Smith M. L. Estimation of viscosity profiles using velocimetry data from parallel flows of linearly viscous fluids: application to microvascular haemodynamics // *Journal of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 512. P. 1-19.
7. Medvedev A. E. Dvukhfaznaya model techeniya krovi v krupnykh i melkikh krovenosnykh sosudakh [Two-phase model of blood flow in large and small blood vessels] // *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika [Mathematical Biology and Bioinformatics]*. 2011. Vol. 6, no. 2. P. 228-249. (in Russian)

8. Sircar A., Rayavarapu K., Bist N., Yadav K., Singh S. Applications of nano-particles in enhanced oil recovery // Petroleum Research. 2022. No. 1. P. 77-90.

УДК 517.95:536.2:533.2

Математическое моделирование процесса комбинированного сжигания и анализ влияния разных способов инъекции на эффективность сгорания

Мизхер У.Д.¹, Мизхер М.Д.², Абрашкин П.М.³, Вельмисов П.А.³

Южный технический университет¹, Университет Аль-Шатра²,
Ульяновский государственный технический университет³

Аннотация: Поиск экологически чистых альтернативных источников энергии является одной из главных забот современного общества. Биогаз является потенциальным альтернативным топливом, получаемым из органических отходов. Биогаз содержит меньше метана, что снижает теплоту сгорания, и больше углекислого газа, что влияет на скорость распространения пламени. Максимальная адиабатическая температура в камере сгорания котлов тепловых электростанций может быть снижена с одновременным повышением устойчивости горения биогаза за счет комбинированного сжигания природного газа и биогаза при условии тщательного перемешивания топливной смеси с окислителем. В данном исследовании сначала строится аналитическое стационарное температурное поле в струях с использованием автомодельных решений уравнений осесимметричного движения жидкости (газа) в модели вязкой несжимаемой среды. Это решение служит начальным приближением для последующего решения задачи с помощью программного продукта ANSYS Fluent, который используется для моделирования и исследования тепловых и газодинамических процессов в камере сгорания. Процесс горения топливно-воздушной смеси моделируется с использованием модели турбулентности $k - \varepsilon$ (реальная). Проведено численное исследование распределения температуры газа в струе.

Ключевые слова: газодинамика, температура, биогаз, комбинированное горение, модель турбулентности $k - \varepsilon$, ANSYS Fluent.

1. Конфигурация для численного решения и граничные условия

Начальное приближение в предлагаемом численном методе получается из аналитического решения задач тепло и массопереноса струйного течения. Вместо того, чтобы начинать вычисления с нуля, программное обеспечение ANSYS будет использовать первое приближение из [1], [2], которое будет введено в программу в точке, где задача определена с требуемыми граничными условиями. В результате решение задачи более точно и получено за меньшее время.

В граничные условия (рис. 1) для комбинированного процесса сжигания природного газа и биогаза были включены расход воздуха $\dot{m}_{air} = 0.1$ кг/с, расход биогаза $\dot{m}_{biogas} = 0.01$ кг/с, и для расхода природного газа (ch_4) рассмотрены два случая:

1. Расход природного газа $\dot{m}_{ch_4} = 0.005$ кг/с.
2. Расход природного газа $\dot{m}_{ch_4} = 0.005 (1 + \sin(16t))$ кг/с.

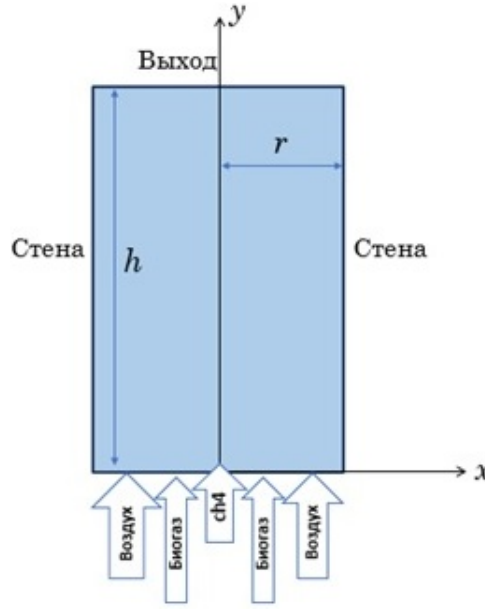


Рис. 1. Схема камеры сгорания и настройки граничных условий

2. Основные уравнения математической модели

Уравнение непрерывности, уравнения Навье-Стокса и уравнение энергии являются тремя компонентами математической модели, которая предлагается для имитации процесса горения потока топлива и воздуха [3–5]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\tau_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u'_i u'_j}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial \rho e u_i}{\partial x_i} = \rho \dot{q} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} - \frac{\partial P u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_i}, \quad (3)$$

где

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\rho k + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij}. \quad (5)$$

Здесь u_i и u_j – компоненты скорости; t – время; ρ – плотность; P – давление; δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ если $i \neq j$); μ – динамическая вязкость; μ_t – турбулентная вязкость; $(-\rho \overline{u'_i u'_j})$ – напряжения Рейнольдса; e – внутренняя энергия; q – скорость объемного подвода тепла на единицу массы; T – температура; λ – теплопроводность.

Используется модель турбулентности $k - \varepsilon$ (реальная). Кинетическая энергия турбулентности k и скорость ее диссипации ε удовлетворяют следующим уравнениям переноса [6, 7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varepsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S_\varepsilon - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu\varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} G_b + S_\varepsilon,$$

где $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$; $C_1 = \max \left[0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right]$; $\eta = S \frac{k}{\varepsilon}$; $C_{3\varepsilon} = \tanh \left| \frac{v}{u} \right|$.

Константы модели $C_{1\varepsilon}$, C_2 , σ_k и σ_ε имеют следующие значения по умолчанию [6]: $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_2 = 1.9$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.2$; G_k представляет собой генерацию кинетической энергии турбулентности из-за средних градиентов скорости; G_b – генерацию кинетической энергии турбулентности из-за плавучести; Y_M представляет собой вклад флуктуационного расширения в сжимаемой турбулентности в общую скорость рассеяния (диссипации); σ_k , σ_ε являются турбулентными числами Прандтля для k и ε соответственно; S_ε , S_k – определяемые пользователем исходные члены; S – тензор средней скорости деформации; $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кинематическая вязкость; C_μ – эмпирический коэффициент; $C_\mu = 0.09$; u и v – компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно.

3. Некоторые результаты исследования

С помощью разработанного комплекса программ [8] были исследованы процессы совместного горения природного газа и биогаза. Программное обеспечение было использовано для моделирования процесса горения в камере сгорания, схема которой представлена на рис. 1. Стенки камеры сгорания имеют постоянную температуру $T_w = 300$ К и следующие геометрические характеристики: $r = 100$ мм; $h = 1000$ мм. В состав горелочного устройства входят канал подачи биогаза 16 мм, канал подачи газа (метана) 4 мм и канал подачи воздуха 180 мм. Ниже на рис. 2 представлены некоторые результаты расчетов.

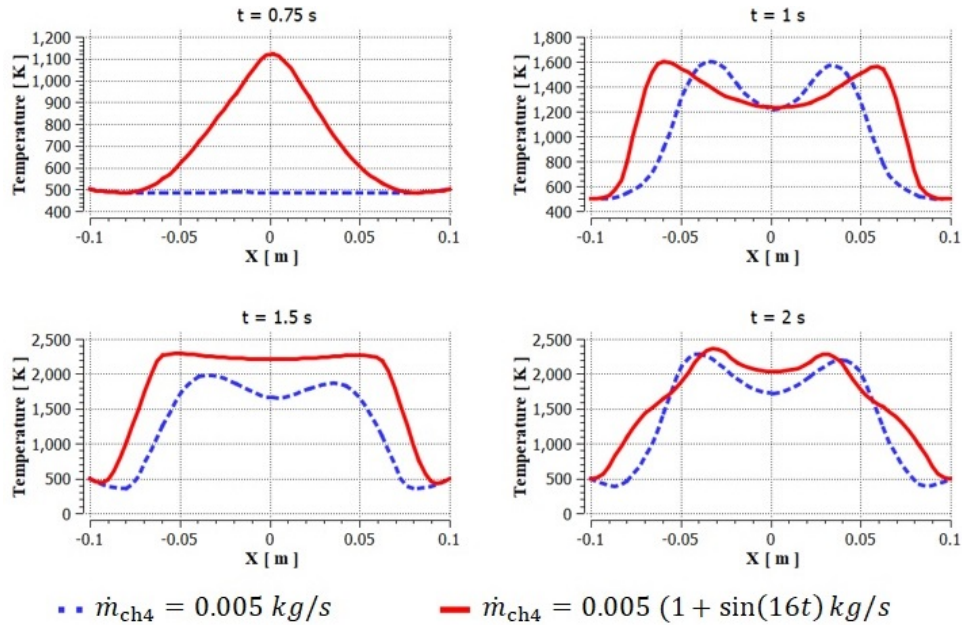


Рис. 2. Распределение температуры на выходе из камеры сгорания в зависимости от времени

На рис. 2 отражены распределения температуры на выходе в различные моменты времени. Рисунок иллюстрирует, как синусоидальная функция подачи природного газа влияет на эффективность процесса совместного сжигания.

В результате численного эксперимента построены также контуры распределения температуры и контуры распределения CO_2 (углекислого газа) в зоне горения в различные периоды для расходов природного газа ($\dot{m}_{ch4} = 0.005$ кг/с) и ($\dot{m}_{ch4} = 0.005(1 + \sin(16t))$ кг/с).

Литература

1. Velmisov P. A., Mizher U. J. Asymptotic study of heat and mass transfer processes in viscous fluids. AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2333, No 1.
2. Velmisov P. A., Mizher U. J., Semenova E. P. Asymptotic study of nonlinear viscous gas flows. AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2048, No 1.
3. Hoffman K. A., Chiang S. T. Computational Fluid Dynamics. 4th ed. Vol. II. USA: EESbooks.com, 2000.
4. Chung T. J. Computational Fluid Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
5. Anderson J. D. Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications. New York: McGraw-Hill, 1995.
6. ANSYS Fluent Theory Guide. 2021 R2. USA: ANSYS Inc., 2021. 1069 p.
7. Versteeg H. K., Malalasekera W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics. 2nd ed. 2007. 517 p.
8. Мизхер У. Д., Ковальногов В. Н., Вельмисов П. А., Чукалин А. В., Федоров Р. В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021615282 Российская Федерация. Программный комплекс для исследования стационарных газодинамических и тепловых процессов в камере сгорания с автоматизированной подготовкой геометрических и граничных условий модели : № 2021614306 : заявл. 29.03.2021 : опубл. 06.04.2021.

MSC 49K20, 76F60, 80A20

Mathematical modeling of the combined combustion process and analysis of the effect of different injection methods on combustion efficiency

U.J. Mizher¹, M.J. Mizher², P.M. Abrashkin³, P.A. Velmisov³

Southern Technical University¹, Al-Shatrah University²,
Ul'yanovsk State Technical University³

Abstract: The search for environmentally friendly alternative energy sources is one of the main concerns of modern society. Biogas is a potential alternative fuel derived from organic waste. Biogas contains less methane, which reduces the heat of combustion, and more carbon dioxide, which affects the flame spreading rate. The maximum adiabatic temperature in the combustion chamber of thermal power plant boilers can be reduced while increasing the stability of biogas combustion through the combined combustion of natural gas and biogas, provided the fuel mixture is thoroughly mixed with oxidizer.

In this study, an analytical stationary temperature field in the jets is first constructed using self-similar solutions of the equations of axisymmetric fluid (gas) motion in a viscous incompressible medium model. This solution serves as an initial approximation for the subsequent solution of the problem using the ANSYS Fluent software product, which is used for modeling and research of thermal and gas-dynamic processes in the combustion chamber. The combustion process of fuel-air mixture is modeled using the $k - \varepsilon$ (real) turbulence model. A numerical study of the gas temperature distribution in the jet is carried out.

Keywords: gas dynamics, temperature, biogas, combined combustion, turbulence model $k - \varepsilon$, ANSYS Fluent.

References

1. Velmisov P. A., Mizher U. J. Asymptotic study of heat and mass transfer processes in viscous fluids. AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2333, No 1.
2. Velmisov P. A., Mizher U. J., Semenova E. P. Asymptotic study of nonlinear viscous gas flows. AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2048, No 1.
3. Hoffman K. A., Chiang S. T. Computational Fluid Dynamics. 4th ed. Vol. II. USA: EESbooks.com, 2000.
4. Chung T. J. Computational Fluid Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
5. Anderson J. D. Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications. New York: McGraw-Hill, 1995.
6. ANSYS Fluent Theory Guide. 2021 R2. USA: ANSYS Inc., 2021. 1069 p.
7. Versteeg H. K., Malalasekera W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics. 2nd ed. 2007. 517 p.

8. Mizher U. J., Kovalnogov V. N., Velmisov P. A., Chukalin A. V., Fedorov R. V. Software package for studying stationary gas-dynamic and thermal processes in a combustion chamber with automated preparation of geometric and boundary conditions of the model: Certificate of state registration of computer program No. 2021615282, Russian Federation. (2021).

УДК 550.36:536.24

Особенности распределения температурного поля в пористом пласте с аномальной нефтью

Морозкин Н.Д., Галлямов В.В., Морозкин Н.Н.

Уфимский университет науки и технологий

Аннотация: В работе исследуется изменение температуры во времени на стенке скважины для нефти, вязкость которой существенно зависит от градиента давления. Такие нефти называют неньютоновскими или аномальными поскольку процесс фильтрации флюидов описывается не законом Дарси, а некоторым нелинейным законом. Рассматривается однотемпературная модель, т.е. предполагается, что температура флюида в пласте и температура ядра совпадают. При этом исследуются только естественные режимы разработки без каких-либо дополнительных воздействий на пласт. Показано, что в отличие от ньютоновской нефти, температура которой на стенке скважины непрерывно увеличивается с возрастанием времени, температура высоковязкой нефти в начальный период времени увеличивается, затем уменьшается и через определённое время вновь начинает возрастать. Такое нестандартное поведение температуры высоковязкой нефти связано с изменением во времени области разрушения структуры пласта.

Ключевые слова: высоковязкая нефть, закон Дарси, температура, давление, градиент давления, пористость, плотность, зона разрушения структуры пласта.

1. Постановка задачи

Математически процесс нестационарной фильтрации высоковязкой нефти в осесимметричном пористом пласте в цилиндрических координатах описывается уравнением сохранения массы

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \vartheta) \quad (1)$$

где m — пористость пласта,

$$\rho = \rho_0 [1 + \rho_{fl} (P - P_0)], \quad (2)$$

ρ_{fl} — коэффициент сжимаемости флюида, ρ_0 — начальная плотность, P — давление, P_0 — начальное давление, ϑ — скорость фильтрации:

$$\vartheta = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (3)$$

В работе [1] для высоковязких нефтей приведены экспериментальные данные зависимости вязкости от градиента давления. В результате аппроксимации табличных данных эту зависимость можно записать в виде:

$$\mu = \frac{\mu_H - \mu_L}{1 + e^{\alpha(\frac{\partial P}{\partial r} - G)}} + \mu_L, \quad (4)$$

здесь μ_H — вязкость нефти с неразрушенной структурой, G — градиент давления предельного разрушения структуры (ГДПРС), μ_L — вязкость нефти при достижении

градиентом давления значения ГДПРС, α — параметр, подбираемый в зависимости от свойств нефти.

Процесс распространения тепла описывается уравнением сохранения энергии

$$(m\rho_{fl}c_{fl} + (1-m)\rho_{sk}c_{sk})\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \rho_{fl}c_{fl}\vartheta\frac{\partial T}{\partial r} + m\eta\rho_{fl}c_{fl}\frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon\vartheta\rho_{fl}c_{fl}\frac{\partial P}{\partial r}, \quad (5)$$

$$R_w < r < R_k, 0 < t < \bar{t},$$

где λ — коэффициент теплопроводности пористой среды, η — адиабатический коэффициент, ε — коэффициент Джоуля-Томпсона, R_w — радиус скважины, R_k — радиус расчётной области.

Уравнения (1) и (5) дополняются начальными и граничными условиями. Для уравнения (1) они записываются в виде:

$$P(0, r) = P_k, \quad R_w \leq r \leq R_k \quad (6)$$

$$P(t, R_w) = P_w, \quad P(t, R_k) = P_k, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad (7)$$

А для уравнения (5) эти условия записываются так:

$$T(0, r) = T_0, \quad R_w \leq r \leq R_k, \quad (8)$$

$$T(t, R_k) = T_0, \quad \frac{\partial T(t, R_w)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}. \quad (9)$$

2. Методика решения

Система уравнений (1)–(4), (6), (7) решается методом конечных разностей с использованием неявной разностной схемы [2]. При этом на каждом временном слое приходится решать систему нелинейных алгебраических уравнений. Такая система уравнений решается при помощи метода Ньютона, а системы линейных алгебраических уравнений на итерациях метода Ньютона решаются методом прогонки.

Уравнение сохранения энергии (5) с начальными (8) и граничными (9) условиями решается также методом конечных разностей. Поскольку в уравнение (5) входят члены, содержащие производные давления по t и r , то в целях упрощения расчётов дискретизация системы уравнений (5), (8), (9) осуществляется на той же сетке, что и уравнений (1)–(4), (6), (7).

3. Результаты вычислительного эксперимента

3.1. Входные данные

Для проведения вычислительных экспериментов выбраны следующие параметры:

$$\begin{aligned} R_w &= 0.1 \text{ м}, & p_w &= 5 \cdot 10^6 \text{ Па}, & T_0 &= 300 \text{ К}, \\ R_k &= 100 \text{ м}, & p_k &= 10^7 \text{ Па}, & c_{fl} &= 1800 \text{ Дж/(кг·К)}, \\ \beta_{sl} &= 10^{-8} \text{ 1/Па}, & \mu_H &= 0.1 \text{ Па·с}, & \rho_{fl} &= 940 \text{ кг/м}^3, \\ \beta_{sk} &= 4.5 \cdot 10^{-10} \text{ 1/Па}, & m &= 0.2, & c_{sk} &= 450 \text{ Дж/(кг·К)}, \\ G &= 1.5 \cdot 10^5 \text{ Па/м}, & \mu_L &= 0.001 \text{ Па·с}, & \rho_{sk} &= 2300 \text{ кг/м}^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1000 \text{ кг/м}^3, & k &= 10^{-12} \text{ м}^2, & \eta &= 1.7 \cdot 10^{-7} \text{ К/Па}, \\ P_0 &= 10^7 \text{ Па}, & \lambda &= 2.5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, & \xi &= 4.5 \cdot 10^{-7} \text{ К/Па}, & \alpha &= 10 \text{ м/Па}. \end{aligned}$$

3.2. Результаты расчётов

Расчёты давления из решения системы уравнений (1)–(4), (6), (7) приведены в работе [3]. Приведём результаты расчётов изменения температуры во времени на стенке скважины, поскольку именно эта температура представляет особый интерес для практики. Результаты представлены в виде графика (рис. 1).

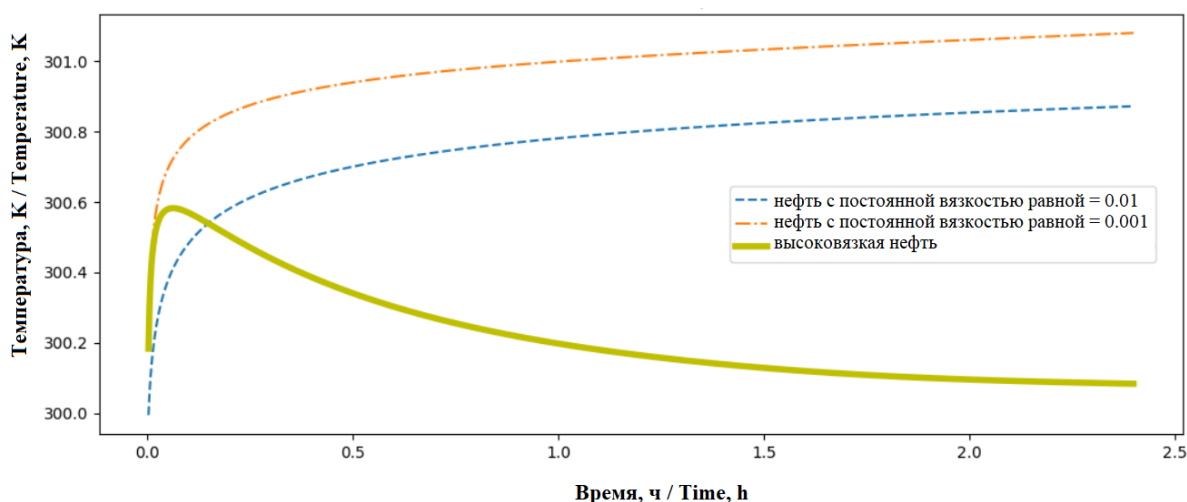


Рис. 1. Изменение температуры на стенке скважины во времени для нефтей различной вязкости спустя 2.5 часа.

Из рис. 1 видно, что температура высоковязкой нефти в начальный период времени так же, как и нефти с постоянной вязкостью, увеличивается, а затем снижается, в то время как температура нефти с постоянной вязкостью всё время увеличивается. Дальнейшие расчёты показывают, что для приведенных исходных данных процесс снижения продолжается в первые 24 часа, затем идёт процесс постоянного увеличения температуры.

Такое необычное поведение температуры высоковязкой нефти, как оказалось, связано с изменением зоны разрушения структуры пласта [3]. В первые часы после запуска скважины зона разрушения структуры пласта интенсивно расширяется, и температура снижается за счёт поступления более холодной нефти из зоны разрушения. Затем зона разрушения стабилизируется, и температура высоковязкой нефти с увеличением времени монотонно возрастает.

Литература

1. Девликамов В. В., Хабибуллин З. А., Кабиров М. М. Аномальные нефти. Москва: Недра, 1975. 168 с.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1983. 616 с.
3. Морозкин Н. Н. Исследование процесса нестационарной фильтрации вязкопластичной нефти // Нефтяное хозяйство. 2016. № 6. С. 112-114.

MSC 76S05

Features of Temperature-Field Distribution in a Porous Reservoir Containing Non-Newtonian (Abnormal) Oil

N.D. Morozkin, V.V. Gallyamov, N.N. Morozkin

Ufa University of Science and Technology

Abstract: The paper investigates the time-dependent temperature behaviour in the near-wellbore zone of a reservoir producing oil whose viscosity strongly depends on the pressure gradient. Such crudes are referred to as non-Newtonian (abnormal) oils because their flow is governed not by Darcy's law but by a certain nonlinear filtration law. A single-temperature model is adopted, i.e. the temperatures of the reservoir fluid and of the rock matrix are assumed identical. Only natural production regimes (no external thermal or hydraulic stimulation) are considered. It is shown that, unlike Newtonian oil whose temperature near the wellbore increases monotonically with time, the temperature of a high-viscosity oil first rises, then falls, and after a certain period rises again. It is also demonstrated that this non-standard thermal behaviour of high-viscosity oil related to the evolution of the reservoir-structure degradation zone.

Keywords: high-viscosity oil, Darcy's law, temperature, pressure, pressure gradient, porosity, density, reservoir destructure zone.

References

1. Devlikamov V. V., Khabibullin Z. A., Kabirov M. M. Anomal'nye nefti [Abnormal oils]. Moscow: Nedra, 1975. 168 p. (in Russian)
2. Samarskii A. A. Teoriya raznostnykh skhem [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1983. 616 p. (in Russian)
3. Morozkin N. N. Issledovanie protsessa nestatsionarnoi fil'tratsii vyazkoplasticheskoi nefti [Study of unsteady filtration process of viscoplastic oil] // Neftyanoe khozyaistvo [Oil Industry]. 2016. No. 6. P. 112-114. (in Russian)

УДК 531.3-007.248

Математическое моделирование напряженного состояния ВНЧС в латеральной окклюзии

Морозкин Н.Д., Колонских Д.М.

Уфимский университет науки и технологий

Аннотация: Рассматривается задача численного анализа напряженно-деформированного состояния височно-нижнечелюстного сустава (ВНЧС) при латеральной окклюзии, решаемая методом конечных элементов (МКЭ). Нижнечелюстной сустав является важным элементом жевательной функции и артикуляции, изучение его механических свойств имеет ключевое значение для понимания патофизиологии заболеваний, выработки индивидуализированных подходов к профилактике и лечению, а также разработки ортопедических и стоматологических имплантатов. Математическое моделирование позволяет предсказать поведение сустава под нагрузкой. Представлена конечно-элементная модель нижней челюсти человека, на основе которой проведен расчет и анализ главных напряжений при латеральной окклюзии.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, тензор напряжений, метод конечных элементов, височно-нижнечелюстной сустав, латеральная окклюзия.

1. Введение

Височно-нижнечелюстной сустав (ВНЧС) является сложной биомеханической системой. Нарушения в его работе могут привести к различным патологиям, включая дисфункцию и болевой синдром. Латеральная окклюзия, при которой зубы нижней челюсти с одной стороны находятся в контакте с зубами верхней челюсти, создает несимметричные нагрузки на ВНЧС. Анализ современных научных публикаций в области челюстно-лицевой хирургии демонстрирует выраженную асимметрию патологических изменений в височно-нижнечелюстном суставе [1], с преобладанием дегенеративных процессов на балансирующей стороне по сравнению с рабочей. Применение методов математического моделирования, в частности конечно-элементного анализа, обеспечивает количественную оценку напряженно-деформированного состояния структур ВНЧС при различных функциональных нагрузках.

Височно-нижнечелюстной сустав относится к категории мышечно-суставных структур. Его функциональная организация определяется мышечным аппаратом, который регулирует как биомеханику внутрисуставных элементов, так и динамику основных фаз артикуляции. Морфофункциональной особенностью ВНЧС служит асимметричное крепление мышечных волокон к суставному диску, создающее условия для его динамической стабилизации в процессе функционирования.

Задача расчёта напряженно-деформированного состояния височно-нижнечелюстного сустава (ВНЧС) при боковой окклюзии требует учета асимметричности биомеханической системы. В связи с этим, наиболее адекватное решение достигается при использовании трехмерной конечно-элементной модели.

2. Постановка задачи

Необходимо провести расчет напряжений, возникающих в ВНЧС под воздействием мышечных сил в боковой окклюзии.

Обозначим исследуемую трёхмерную область как Ω , а ее границу как Γ . Напряженное состояние тела описывается симметричным тензором σ состоящим из нормальных и касательных напряжений, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия [2]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (1)$$

с условиями на границе области:

а) приложение мышечных усилий к границе Γ_F :

$$F = \sigma \cdot n, \quad (2)$$

б) жёсткое закрепление на границе Γ_S :

$$u = 0, \quad (3)$$

где $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$ – тензор напряжений, $u^T = [u_x, u_y, u_z]$ – перемещения, Γ_F

– граница области приложения сил $F^T = [F_x, F_y, F_z]$, $n_x = \cos(x, \vec{n})$, $n_y = \cos(y, \vec{n})$ и $n_z = \cos(z, \vec{n})$ направляющие косинусы внешней нормали к Γ_F .

Необходимо провести расчет напряженно-деформированного состояния нижней челюсти на основе решения системы уравнений (1) с учетом заданных краевых условий (2) и (3).

3. Разбиение области на дискретные элементы

В качестве метода решения поставленной задачи использован метод конечных элементов (МКЭ). Суть метода заключается в аппроксимации искомой непрерывной функции с использованием набора приближенных значений, вычисленных на определенных элементах исследуемой области (конечных элементах). Набор этих элементов формирует конечно-элементную модель объекта. Процесс дискретизации области, осуществляемый в данном контексте, называется триангуляцией. Под триангуляцией в трехмерном случае понимается разбиение исследуемой области Ω на M непересекающихся тетраэдров.

В работе [3] представлен и реализован в виде комплекса программ оригинальный метод триангуляции сложных трехмерных областей. В результате получена трёхмерная конечно-элементная модель нижней челюсти. В первую очередь нас интересует напряжённое состояние, возникающие в височном суставе и суставном диске, так как именно эти области чаще всего подвержены патологиям.

4. Расчёт методом конечных элементов

Наиболее эффективная схема расчета упругодеформированного состояния методом конечных элементов основана на формулировке исходной задачи в перемещениях [4]. Данный подход требует преобразования исходных уравнений из напряженной формы в уравнения, выраженные через компоненты вектора перемещений.

Для этого исходное уравнение (1) умножается на весовую функцию $N(x, y, z)$ определенную и дифференцируемую в области Ω , и интегрируется:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma \cdot N d\Omega = 0. \quad (4)$$

Формула Грина [4] позволяет преобразовать эти соотношения к виду:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}N)^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_F} NF d\Gamma = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{D}^T$ – символическая матрица, состоящая из частных производных,

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

После перехода от непрерывной задачи (5) к дискретной, на конечном числе элементов получаем систему алгебраических уравнений:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (6)$$

где $\mathbf{U}$ – искомый вектор узловых перемещений, матрица жесткости $\mathbf{K}$ и правая часть $\mathbf{F}$ получаются суммированием вкладов отдельных матриц элементов и соответствующих векторов нагрузки элементов с компонентами

$$\mathbf{k}_{ji}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_j^{eT} \mathbf{E}^e \mathbf{B}_i^e d\Omega, \mathbf{f}_j = \int_{\Gamma_F^e} N_j^e F d\Gamma, \quad (7)$$

где $\mathbf{B}_i = \mathbf{D}N_i$ – матрица градиентов, $\mathbf{E}$ – симметричная матрица упругих характеристик, содержащая соотношения модуля упругости Юнга и коэффициента Пуассона для каждого конечного элемента e .

После вычисления узловых перемещений рассчитываются деформации и напряжения.

5. Вычислительный эксперимент

Для выполнения расчетов разработана специализированная программа, обеспечивающая возможность внесения различных модификаций в конечную элементную модель. Программа позволяет менять отношения величин и направления векторов мышечных усилий, места прикрепления мышц, фиксацию различных участков челюсти, а также физико-механические характеристики и редактирование геометрии модели. Программа рассчитывает перемещения в узлах модели, определяет компоненты тензора напряжений, вычисляет главные напряжения и предоставляет возможность получения произвольных сечений челюсти.

Результаты расчетов распределения главных напряжений в височных суставах нижней челюсти в состоянии латеральной окклюзии представлены на рис. 1. В данной конфигурации левая сторона челюсти функционирует как рабочая, в то время как правая сторона выполняет роль балансирующей.

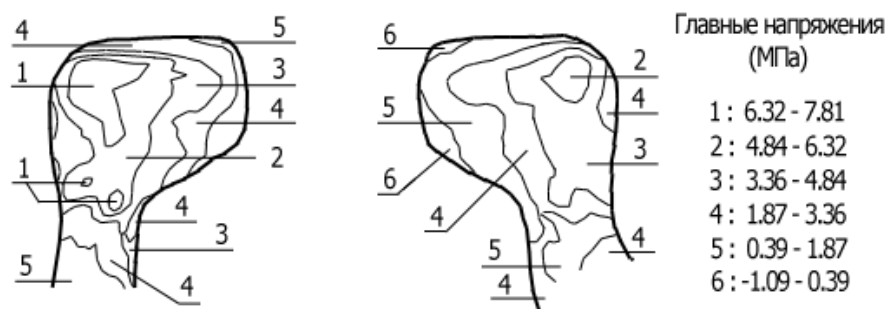


Рис. 1. Распределение главных напряжений в суставных головках (слева балансирующая сторона, справа – рабочая).

Суставная головка рабочей стороны испытывает напряжения преимущественно в переднем отделе. На балансирующей стороне выделяются два участка локальных напряжений: один расположен на центрально-передней поверхности суставной головки, а другой – у основания головки. Установлено, что балансирующая сторона испытывает напряжение, на 66% большее по сравнению с рабочей, особенно в переднем отделе, несмотря на то, что нагрузка прикладывается именно к рабочей стороне во время жевания. Это объясняет клиническую уязвимость данной зоны [1].

6. Заключение

Создание трехмерной конечно-элементной математической модели позволяет провести анализ напряжённого состояния ВНЧС в латеральной окклюзии. Полученные данные подчеркивают необходимость своевременной окклюзионной коррекции, так как циклические жевательные нагрузки могут приводить к кумулятивным микротравмам. Особое внимание следует уделять переднему отделу суставного диска – основной зоне риска дегенеративных изменений при латеральной окклюзии.

Литература

1. Zhang Y. Biomechanical effects of occlusal alterations on the temporomandibular joint during lateral movements // Journal of Prosthetic Dentistry. 2020. Vol. 124, no. 3. P. 345-352.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Пер. с англ. Москва: Мир, 1987. 542 с.
3. Морозкин Н. Д., Чудинов В. В., Попков В. С., Колонских Д. М. Адаптивная триангуляция трехмерных областей со сложной геометрией // Вестник Башкирского университета. 2005. № 4. С. 3-7.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Москва: Мир, 1986. 312 с.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Москва: Мир, 1979. 392 с.

MSC 74S05

Mathematical modeling of TMJ stress in lateral occlusion

N.D. Morozkin, D.M. Kolonskikh
Ufa University of Science and Technology

Abstract: The problem of numerical analysis of the stress-strain state of the temporomandibular joint (TMJ) in lateral occlusion, solved by the finite element method (FEM), is considered. The mandibular joint is an important element of masticatory function and articulation, the study of its mechanical properties is of key importance for understanding the pathophysiology of diseases, developing individualized approaches to prevention and treatment, as well as the development of orthopedic and dental implants. Mathematical modeling makes it possible to predict the behavior of a joint under load. A finite element model of the human mandible is presented, on the basis of which the calculation and analysis of the principal stresses during lateral occlusion is carried out.

Keywords: stress-strain state, stress tensor, finite element method, temporomandibular joint, lateral occlusion.

References

1. Zhang Y. Biomechanical effects of occlusal alterations on the temporomandibular joint during lateral movements // Journal of Prosthetic Dentistry. 2020. Vol. 124, no. 3. P. 345-352.
2. Vasidzu K. Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Variational Methods in Elasticity and Plasticity Theory]. Moscow: Mir, 1987. 542 p. (in Russian)
3. Morozkin N. D., Chudinov V. V., Popkov V. S., Kolonskikh D. M. Adaptivnaya triangulyatsiya trekhmernykh oblastei so slozhnoi geometrii [Adaptive triangulation of three-dimensional domains with complex geometry] // Vestnik Bashkirskogo universiteta [Bulletin of Bashkir University]. 2005. No. 4. P. 3-7. (in Russian)
4. Zenkevich O., Morgan K. Konechnye elementy i approksimatsiya [Finite Elements and Approximation]. Moscow: Mir, 1986. 312 p. (in Russian)
5. Segerlind L. Primenenie metoda konechnykh elementov [Applied Finite Element Analysis]. Moscow: Mir, 1979. 392 p. (in Russian)

УДК 517.9:534.1

О трёхмерных системах, близких к интегрируемым*

Морозов К.Е.

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Аннотация: В настоящее время весьма полно изучены неконсервативные возмущения двумерных гамильтоновых систем. В данной работе рассматривается обобщение этой теории на трёхмерный случай, когда невозмущенная система является нелинейной, интегрируемой и имеет область, заполненную замкнутыми фазовыми траекториями. В случае автономных возмущений основное внимание уделяется задаче о предельных циклах. В качестве примеров рассматриваются две системы: уравнение Ван дер Поля с автоматической регулировкой частоты и система Лоренца в случае больших чисел Рэлея. Для неавтономных возмущений исследуются резонансы и выводится усреднённая система, определяющая динамику в резонансной зоне.

Ключевые слова: возмущение, усреднение, предельные циклы, резонансы.

1. Введение

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} + \varepsilon f_1(x, y, z, \omega_1 t, \dots, \omega_m t), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} + \varepsilon f_2(x, y, z, \omega_1 t, \dots, \omega_m t), \\ \dot{z} = \varepsilon f_3(x, y, z, \omega_1 t, \dots, \omega_m t), \end{cases} \quad (1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, H, f_i – достаточно гладкие функции. Предположим, что функции f_i являются 2π -периодическими по $\omega_k t$, а частоты $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ несоизмеримы:

$$(\mathbf{k}, \Omega) = \sum_{i=1}^m k_i \omega_i \neq 0 \quad \forall \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m.$$

В этом случае f_i суть квазипериодические функции t . Пусть возмущение неконсервативно:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \neq 0, \quad (x, y, z) \in G.$$

Наряду с системой (1), будем также рассматривать возмущённую автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} + \varepsilon g_1(x, y, z), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} + \varepsilon g_2(x, y, z), \\ \dot{z} = \varepsilon g_3(x, y, z), \end{cases} \quad (2)$$

*Работа поддержана грантом РФФИ № 24-21-00050

где

$$g_i(x, y, z) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_i(x, y, z, \omega_1 t, \dots, \omega_m t) dt, \quad i = \overline{1, 3}.$$

При $\varepsilon = 0$ система (1) интегрируема. Предположим, что плоскости $z = c$ при $c \in (c^-, c^+)$ и поверхности $H(x, y, z) = h$ при $h \in (h^-, h^+)$ пересекаются по замкнутым фазовым траекториям и обозначим через $D \subset G$ область¹, состоящую из этих траекторий. Пусть область D отделена от состояний равновесия и сепаратрисных многообразий. Основной целью работы является анализ поведения решений системы (1) в области D .

Трёхмерные интегрируемые системы общего вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y, z), \\ \dot{y} = Q(x, y, z), \\ \dot{z} = R(x, y, z), \end{cases} \quad (3)$$

при некоторых условиях могут быть приведены к виду системы (1) при $\varepsilon = 0$ [1].

2. Автономное возмущение. Предельные циклы

Обратимся к автономной системе (2). В первую очередь нас интересуют условия существования предельных циклов. При $\varepsilon = 0$ имеем $z = c, c \in (c^-, c^+)$ и первые два уравнения отделяются, образуя гамильтонову систему с одной степенью свободы, зависящую от c как от параметра

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, y, c)}{\partial y}, \quad (4)$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H(x, y, c)}{\partial x}. \quad (5)$$

Пусть функции $X(\theta, I, c), Y(\theta, I, c)$ определяют в этой системе переход к переменным действие I -угол θ . Сделаем в (1) замену

$$x = X(\theta, I, z), \quad y = Y(\theta, I, z).$$

В результате приходим к системе вида

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon B_1(\theta, I, z), \\ \dot{z} = \varepsilon B_2(\theta, I, z), \\ \dot{\theta} = \omega(I, z) + \varepsilon B_3(\theta, I, z), \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(\theta, I, z) &= X'_\theta \tilde{g}_2 - Y'_\theta \tilde{g}_1 + \tilde{g}_3(X'_z Y'_\theta - X'_\theta Y'_z), & B_2(\theta, I, z) &= \tilde{g}_3, \\ B_3(\theta, I, z) &= -X'_I \tilde{g}_2 + Y'_I \tilde{g}_1 + \tilde{g}_3(X'_I Y'_z - X'_z Y'_I), \\ \tilde{g}_i(\theta, I, z) &= g_i(X(\theta, I, z), Y(\theta, I, z), z), & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

¹Нетрудно видеть, что D -полноторий.

Здесь B_s суть достаточно гладкие функции, 2π -периодические по θ , а ω – собственная частота. Фазовым пространством системы (6) является полноторий $(I(h^-), I(h^+)) \times (c^-, c^+) \times S^1$. Рассмотрим усреднённую систему

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= B_{10}(u_1, u_2), \\ \dot{u}_2 &= B_{20}(u_1, u_2),\end{aligned}$$

где

$$B_{i0}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_s(\theta, u_1, u_2) d\theta, \quad i = 1, 2.$$

Справедлива следующая теорема [1]

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

$$\begin{aligned}B_{s0}(u_{10}, u_{20}) &= 0, \quad s = 1, 2, \\ \Delta &\neq 0, \quad \sigma \neq 0,\end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial(B_{01}, B_{02})}{\partial(u_1, u_2)}, \quad \sigma = \frac{\partial B_{10}}{\partial u_1} + \frac{\partial B_{20}}{\partial u_2} \text{ при } u_1 = u_{10}, u_2 = u_{20}.$$

Тогда существует $\varepsilon_* > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$:

- 1) система (2) имеет в $O(\varepsilon)$ – окрестности невозмущённой фазовой кривой L_0 , определяемой значениями первых интегралов $I = u_{10}, z = u_{20}$, единственный предельный цикл L_ε ;
- 2) $L_\varepsilon \rightarrow L_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- 3) цикл L_ε асимптотически (орбитально) устойчив, если $\sigma < 0, \Delta > 0$, и неустойчив в противном случае.

По аналогии с порождающим уравнением Пуанкаре–Понтрягина для двумерных систем будем называть систему уравнений

$$B_{s0}(u_1, u_2) = 0, \quad s = 1, 2,$$

порождающей.

Для иллюстрации приведём два примера (см. подробности в [1]): уравнение Ван дер Поля с автоматической регулировкой частоты

$$\ddot{x} + \omega(z)x = \varepsilon(\alpha - x^2)\dot{x}, \quad \dot{z} = \varepsilon f(x, \dot{x}, z),$$

и систему Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = -zx + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz.$$

С помощью замены переменных и времени

$$x \rightarrow \sqrt{2\sigma(r-1)}x, \quad z \rightarrow (r-1)(z+x^2), \quad t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{\sigma(r-1)}},$$

система Лоренца приводится к виду

$$\begin{aligned}\ddot{x} + (z-1)x + x^3 &= -\varepsilon\gamma\dot{x}, \\ \dot{z} &= \varepsilon(-az + \beta x^2),\end{aligned} \tag{7}$$

где $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{r-1}}, a = \frac{b}{\sqrt{\sigma}}, \beta = \frac{2\sigma-b}{\sqrt{\sigma}}, \gamma = \frac{\sigma+1}{\sqrt{\sigma}}$ [2]. Если число Рэлея $r \gg 1$, то $0 < \varepsilon \ll 1$ и система (7) имеет вид (2).

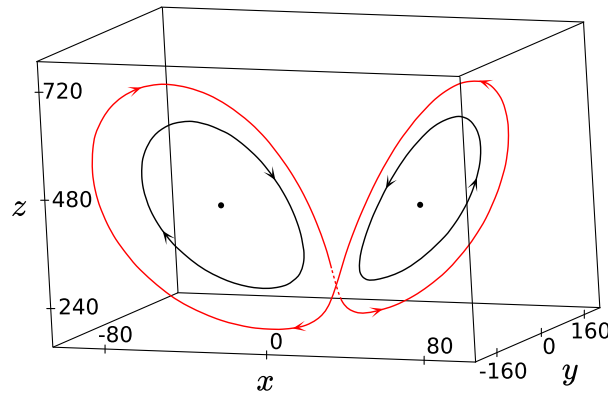


Рис. 1. Предельные циклы системы Лоренца при $b = 2.6$, $\sigma = 3.3$, $r = 500$. Красным цветом выделен устойчивый цикл, чёрным – седловые.

3. Неавтономное возмущение. Резонансы

Обратимся теперь к исходной системе (1). Как и в автономном случае, перейдём к переменным действие I -угол θ и, кроме того, рассмотрим систему в расширенном фазовом пространстве, вводя m дополнительных угловых координат θ_i :

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \varepsilon F_1(I, z, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m), \\ \dot{z} &= \varepsilon F_2(I, z, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m), \\ \dot{\theta} &= \omega(I, z) + \varepsilon F_3(I, z, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m), \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i, \quad i = \overline{1, m}.\end{aligned}\tag{8}$$

Здесь функции F_i определяются аналогично B_i . Система (8) определена на прямом произведении $(I(h^-), I(h^+)) \times (c^-, c^+) \times T^{m+1}$. При $\varepsilon = 0$ фазовое пространство расщепляется на $(m+1)$ -мерные инвариантные торы T^{m+1} , движение на которых условно-периодическое. Основная сложность в исследовании системы (8) при $\varepsilon \neq 0$ связана с резонансами.

Определение 1. *Инвариантный тор невозмущённой системы (системы (8) при $\varepsilon = 0$), соответствующий значениям первых интегралов (I, z) , будем называть резонансным, если существуют взаимно-простые целые числа $(n, \mathbf{k}) = (n, k_1, \dots, k_m)$ такие, что*

$$n\omega(I, z) - (\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}) = 0, \quad (\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}) = k_1\omega_1 + \dots + k_m\omega_m.\tag{9}$$

При заданных n и $\mathbf{k}$ соотношение (9) можно рассматривать как уравнение относительно (I, z) . График этого уравнения будем называть *резонансной кривой*. Подчеркнем, что здесь вообще имеется бесконечное множество *неизолированных* друг от друга резонансных инвариантных торов, соответствующих одному и тому же набору $(n, \mathbf{k})$. Это существенно отличает рассматриваемый случай от случая двумерных систем [3, 4]

Фиксируем некоторый резонансный тор $(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}})$ и обратимся к выводу усреднённой системы в его окрестности. Для этого приведём систему (8) к стандартной форме метода усреднения [5]. Сделаем в (8) замену

$$I = I_{n\mathbf{k}} + \mu w_1, \quad z = z_{n\mathbf{k}} + \mu w_2, \quad \theta = w_3 + \frac{1}{n}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Theta}),$$

где $(\mathbf{k}, \Theta) = \sum_{i=1}^m k_i \theta_i$, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$. Система преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{w}_s &= \mu F_s + \mu^2 \tilde{F}_s + o(\mu^2) \equiv \mu W_s(\mathbf{w}, \Theta, \mu), \quad i = 1, 2, \\ \dot{w}_3 &= \mu \sum_{i=1}^2 b_i w_i + \mu^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} w_i w_j + F_3 \right) + o(\mu^2) \equiv \mu W_3(\mathbf{w}, \Theta, \mu), \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_s &= F_s(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, w_3 + \frac{1}{n}(\mathbf{k}, \Theta), \Theta), \quad s = 1, 2, 3, \\ \tilde{F}_s &= w_1 \frac{\partial F_s}{\partial I}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, w_3 + \frac{1}{n}(\mathbf{k}, \Theta), \Theta) + w_2 \frac{\partial F_s}{\partial z}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, w_3 + \frac{1}{n}(\mathbf{k}, \Theta), \Theta), \quad s = 1, 2, \\ (b_1, b_2) &= \nabla \omega(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}) \equiv (\partial \omega / \partial I, \partial \omega / \partial z), \\ b_{11} &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial I^2}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}), \quad b_{12} = b_{21} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial I \partial z}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}), \quad b_{22} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}). \end{aligned}$$

Подставляя $\theta_i = \omega_i t$ в первые три уравнения, получим систему в стандартной форме

$$\dot{\mathbf{w}} = \mu W(\mathbf{w}, \omega_1 t, \dots, \omega_m t, \mu), \quad (10)$$

где $W = (W_1, W_2, W_3)$. Тогда усреднённая система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_s &= A_s(v) + \mu \sum_{i=1}^2 P_{si}(v) u_i + o(\mu^2), \quad s = 1, 2, \\ \dot{v} &= \sum_{i=1}^2 b_i u_i + \mu \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} u_i u_j + A_3(v) \right) + o(\mu^2), \end{aligned} \quad (11)$$

где введено медленное время $\tau = \mu t$ и

$$\begin{aligned} A_s(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, v) &= \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} F_s d\theta_1 \dots d\theta_m, \\ P_{s1}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, v) &= \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial F_s}{\partial I} d\theta_1 \dots d\theta_m, \\ P_{s2}(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}, v) &= \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial F_s}{\partial z} d\theta_1 \dots d\theta_m. \end{aligned}$$

Можно показать [3], что функции A_s, P_{si} являются периодическими по v с наименьшим общим периодом $T = \frac{2\pi}{n}$, следовательно, фазовым пространством усреднённой системы (11) является полноторий $D \times S^1$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

Из классических результатов Боголюбова [5] известны следующие факты о соответствии систем (10) и (11): 1) разность между решениями этих систем, совпадающими при $t = t_0$, будет сколь угодно малой на сколь угодно большом промежутке времени при достаточно малом μ ; 2) если система (11) имеет гиперболическое состояние равновесия, то в системе (10) ему отвечает квазипериодическое решение того же

типа устойчивости; 3) если система (11) имеет гиперболический предельный цикл, то в системе (10) этому циклу соответствует $(m + 1)$ -мерный инвариантный тор. Отметим, что для анализа предельных циклов системы (11) применима методика, описанная в предыдущем разделе.

Рассмотрим усреднённую систему первого приближения (систему (11) при $\mu = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= A_1(v, I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}), \\ \dot{u}_2 &= A_2(v, I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}), \\ \dot{v} &= b_1 u_1 + b_2 u_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Предположим, что $\nabla\omega(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}) \neq 0$ ($b_1^2 + b_2^2 \neq 0$). Резонансы, для которых выполнено это условие, будем называть *невыврожденными*. Если система уравнений

$$A_s(v, I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}) = 0, \quad s = 1, 2, \quad (13)$$

имеет решение v_0 , то система первого приближения (12) имеет прямую $v = v_0$, $b_1 u_1 + b_2 u_2 = 0$, сплошь заполненную неизолрованными состояниями равновесия. Резонансную траекторию $H(x, y, z) = h(I_{n\mathbf{k}})$, $z = z_{n\mathbf{k}}$, для которой (13) имеет решение, будем называть *расщепляемой*. Условия расщепляемого резонанса при заданных $n, \mathbf{k}$ задаются системой трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} A_s(v, I, z) &= 0, \quad s = 1, 2, \\ n\omega(I, z) - (\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Если хотя бы одно из уравнений (13) не имеет решений, то усреднённая система (12) не имеет состояний равновесия. Очевидно, что при этом одна из производных $\dot{u}_1, \dot{u}_2$ не меняет знака. Тогда в системе (10) (как и в исходной системе (1)) наблюдается "дрейф" траекторий и решения покидают резонансную зону за конечное время. В этом случае будем говорить о *проходимом* резонансе. Представим функции $A_s(v, I, z)$ в виде:

$$A_s(v, I, z) = \tilde{A}_s(v, I, z) + B_s(I, z),$$

где $B_s(I, z) = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi/n} A_s(v, I, z) dv$ – среднее значение функции $A_s(v, I, z)$. Несложно видеть, что система уравнений $B_s(I, z) = 0, s = 1, 2$, является порождающей для возмущённой автономной системы (2). Решения системы (14) удовлетворяют неравенствам

$$|B_s(I, z)| < \max_v |\tilde{A}_s(v, I, z)|, \quad s = 1, 2. \quad (15)$$

Если в фиксированной точке резонансной кривой $(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}})$ хотя бы одно из неравенств (15) выполняется с противоположным знаком, то эта точка соответствует проходимому резонансу. Условия (15) будут выполнены, в частности, если $B_s(I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}) = 0, s = 1, 2$. В этом случае вблизи соответствующей невозмущённой траектории у системы (2) при малых ε появляется предельный цикл.

Дифференцируя третье уравнение системы (12) по t , придём к уравнению маятникового типа

$$\ddot{v} = b_1 A_1(v, I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}) + b_2 A_2(v, I_{n\mathbf{k}}, z_{n\mathbf{k}}). \quad (16)$$

Отметим, что хотя фазовый портрет уравнения (16) даёт некоторое представление о топологии резонансной зоны, по нему нельзя сделать точных выводов о поведении решений исходной системы (1) на бесконечном промежутке времени.

Литература

1. Морозов К. Е. О неконсервативных возмущениях трёхмерных интегрируемых систем // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6. С. 766-780. DOI: 10.18500/0869-6632-003136.
2. Юдович В. И. Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Рэлея // ВИНТИ. 1978. № 2611-78. С. 2-8.
3. Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 420 с.
4. Морозов А. Д., Морозов К. Е. Квазипериодические возмущения двумерных гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1607-1615. DOI: 10.1134/S0012266117120047.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1958. 408 с.

MSC 34C15, 34C27, 34C37

On three-dimensional systems close to integrable ones*

K.E. Morozov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Abstract: At present, nonconservative perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems have been studied quite thoroughly. This paper considers the generalization of this theory to the three-dimensional case, where the unperturbed system is nonlinear, integrable and has a region filled with closed phase trajectories. In the case of autonomous perturbations, the main focus is on the problem of limit cycles. Two systems are considered as examples: the Van der Pol equation with automatic frequency control and the Lorenz system in the case of large Rayleigh numbers. For non-autonomous perturbations, the investigation involves resonance analysis and deriving an averaged system that determines the dynamics in the resonance zone.

Keywords: perturbations, averaging, limit cycles, resonances.

References

1. Morozov K. E. O nekonservativnykh vozmushcheniyakh trekhmernykh integriruemyykh sistem [On non-conservative perturbations of three-dimensional integrable systems] // *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineinaya dinamika* [University News. Applied Nonlinear Dynamics]. 2024. Vol. 32, no. 6. P. 766-780. DOI: 10.18500/0869-6632-003136. (in Russian)
2. Yudovich V. I. Asimptotika predelnykh tsiklov sistemy Lorentsa pri bolshikh chislakh Releya [Asymptotics of limit cycles of the Lorenz system at large Rayleigh numbers] // *VINTI*. 1978. No. 2611-78. P. 2-8. (in Russian)
3. Morozov A. D. Rezonansy, tsikly i khaos v kvazikonservativnykh sistemakh [Resonances, cycles and chaos in quasi-conservative systems]. Moscow-Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2005. 420 p. (in Russian)
4. Morozov A. D., Morozov K. E. Kvaziperiodicheskie vozmushcheniya dvumernykh gamiltonovykh sistem [Quasi-periodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems] // *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations]. 2017. Vol. 53, no. 12. P. 1607-1615. DOI: 10.1134/S0012266117120047. (in Russian)
5. Bogolyubov N. N., Mitropolskii Yu. A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebaniy [Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations]. Moscow: Nauka, 1958. 408 p. (in Russian)

*The work is supported by the RSciF, grant № 24-21-00050.

УДК 519.6

Параллельный код для исследования дозвуковых потоков теплопроводной газовой смеси

Мустайкин М.С., Пескова Е.Е.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Исследование посвящено разработке параллельного кода на основе технологии MPI для численного исследования дозвуковых многокомпонентных газовых потоков в трубчатом реакторе. Математическая модель исследуемого процесса представляет собой уравнения Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха в цилиндрической системе координат. В настоящий момент в коде открыта возможность учета многокомпонентности смеси и процесса теплопроводности.

Ключевые слова: математическое моделирование, дозвуковые течения, многокомпонентная среда, уравнения Навье-Стокса, технология MPI.

Разработка вычислительных алгоритмов для моделирования дозвуковых газовых потоков с учетом внешних источников энергии и катализаторов представляет собой важную научно-практическую задачу [1–3]. Такие исследования позволяют прогнозировать поведение химически активных систем при варьировании управляющих параметров, что имеет ключевое значение для прикладных инженерных расчетов. Данные задачи являются трудоемкими из-за необходимости учета большого количества физико-химических процессов, что подводит к необходимости разработки специализированных вычислительных алгоритмов и их параллельной реализации.

Целью настоящей работы является разработка параллельного вычислительного алгоритма и 3D программ для решения задач дозвуковой динамикой химически активной многокомпонентной теплопроводной среды.

В предыдущих исследованиях авторы разработали основу параллельного вычислительного алгоритма для дозвуковых течений, пренебрегая многокомпонентностью среды, диффузией и теплопередачей [4]. В настоящей работе предложено расширение математической модели, учитывающее вклад теплопроводности и многокомпонентности, что позволяет более точно описывать процессы переноса энергии в рассматриваемых системах.

В основе параллельного алгоритма лежит принцип геометрической декомпозиции области, в основе вычислительного алгоритма – принцип расщепления по физическим процессам. Для этого на каждом шаге по времени в каждой подобласти решаются следующие задачи:

1. Вычисляются конвективные потоки с помощью потоков Русанова с модификацией стабилизирующего члена.
2. Вычисляются диссипативные потоки, отвечающие процессу теплопроводности, по схеме с центральными разностями.
3. Находятся величины энтальпии, плотности, температуры, концентрации компонент смеси, скорости без учета давления.
4. Находится давление посредством решения уравнения Пуассона методом Якоби. Проводится корректировка вектора скорости.

Вычислительный эксперимент проводился при следующих условиях: рассматривалась цилиндрическая труба, в которой в начальный момент времени покоится ме-

тан. Слева поступает смесь из метана и этилена (60% и 40% соответственно). Температура газа в начальный момент времени и температура втекающей смеси 873 К. Температура стенок 1373 К. Картина распределения массовой доли метана представлена на рис. 1. Видно, что в левой части трубы массовая доля метана составляет уже 60%. Картина изменения температуры представлена на рис 2. Газ уже полностью прогрелся от стенок, область пониженной температуры осталась лишь на входе.

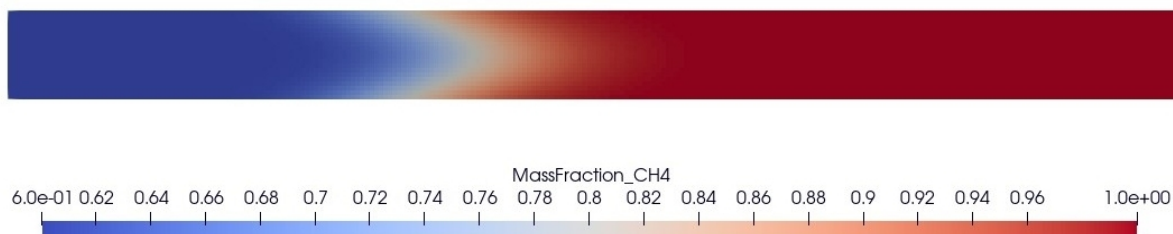


Рис. 1. Массовая доля метана

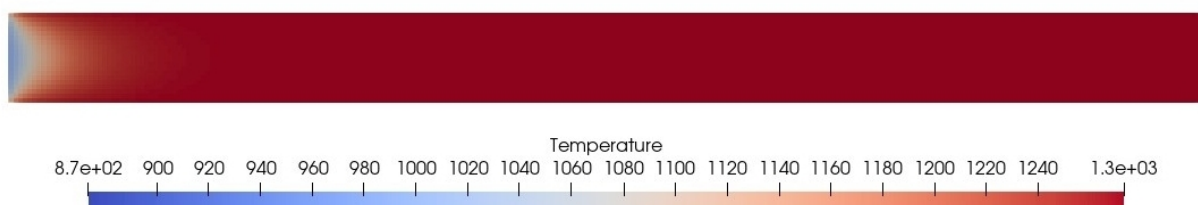


Рис. 2. Температура, К

Литература

1. Yakush S., Semenov O., Alexeev M. Premixed Propane-Air Flame Propagation in a Narrow Channel with Obstacles // *Energies*. 2023. Vol. 16. Art. 1516. DOI: 10.3390/en16031516.
2. Peskova E. E. Mathematical Modeling of Nonstationary Problems Related to Laser Thermochemistry of Methane in the Presence of Catalytic Nanoparticles // *Doklady Mathematics*. 2024. Vol. 109, no. 3. P. 256-261.
3. Пескова Е. Е., Снытников В. Н. Численное исследование конверсии метановых смесей под воздействием лазерного излучения // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2023. Т. 25, № 3. С. 159-173.
4. Мустайкин М. С., Пескова Е. Е. Параллельный алгоритм для численного исследования дозвуковых реагирующих течений в цилиндрической системе координат // *Параллельные вычислительные технологии: XIX Всероссийская конференция с международным участием. Короткие статьи и описания плакатов*. С. 211-217.

MSC 65L20

Parallel code for studying subsonic flows of a thermally conductive gas mixture

M.S. Mustaykin, E.E. Peskova

National Research Mordovia State University

Abstract: The paper is devoted to the development of a parallel code based on MPI technology for the numerical study of subsonic multicomponent gas flows in a tubular reactor. The mathematical model of the process under study is the Navier-Stokes equations in the approximation of small Mach numbers in a cylindrical coordinate system. At the moment, the possibility of taking into account the multicomponent nature of the mixture and the process of thermal conductivity is open in the code.

Keywords: mathematical modeling, subsonic flows, multicomponent medium, Navier-Stokes equations, MPI technology.

References

1. Yakush S., Semenov O., Alexeev M. Premixed Propane-Air Flame Propagation in a Narrow Channel with Obstacles // *Energies*. 2023. Vol. 16. Art. 1516. DOI: 10.3390/en16031516.
2. Peskova E. E. Mathematical Modeling of Nonstationary Problems Related to Laser Thermochemistry of Methane in the Presence of Catalytic Nanoparticles // *Doklady Mathematics*. 2024. Vol. 109, no. 3. P. 256-261.
3. Peskova E. E., Snytnikov V. N. Chislennoe issledovanie konversii metanovykh smesei pod vozdeistviem lazernogo izlucheniya [Numerical study of methane mixtures conversion under laser radiation] // *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2023. Vol. 25, no. 3. P. 159-173. (in Russian)
4. Mustaykin M. S., Peskova E. E. Parallelnyi algoritm dlya chislennogo issledovaniya dozvukovykh reagiruyushchikh techenii v tsilindricheskoi sisteme koordinat [Parallel algorithm for numerical study of subsonic reacting flows in cylindrical coordinate system] // *Parallelnye vychislitelnye tekhnologii: XIX Vserossiiskaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiem. Kratkie statyi i opisaniya plakatov* [Parallel Computing Technologies: 19th All-Russian Conference with International Participation. Short papers and poster descriptions]. P. 211-217. (in Russian)

УДК 519.60

О применении генетических алгоритмов для аппроксимации экспериментальных данных термической деструкции парафина*

Мустафина С.И., Корнилова А.А., Гиззатова Э.Р.

Уфимский университет науки и технологий

Аннотация: Работа посвящена разработке математической модели для точной аппроксимации экспериментальных данных, описывающих процессы термической деструкции парафина. В качестве основного инструмента оптимизации используется генетический алгоритм, позволяющий эффективно искать решения в сложных многомерных пространствах без строгих ограничений на форму исходных данных. Рассмотрены два подхода. Первый — глобальная аппроксимация всего массива данных с помощью алгебраической суммы трёх кинетических функций (реакция третьего порядка, двумерная диффузия и поверхностная реакция). Второй — поэлементная оптимизация, при которой индивидуальная популяция параметров формируется для каждой экспериментальной точки.

Ключевые слова: генетический алгоритм, термическая деструкция парафина, аппроксимация экспериментальных данных.

1. Введение

Исследование процессов термической деструкции различных веществ, в том числе полимеров и их композитных структур, представляет собой важную задачу в области материаловедения и экологии. Понимание этих процессов необходимо для разработки экологически безопасных методов переработки отходов, а также для улучшения характеристик материалов, таких как термостойкость и долговечность.

Моделирование процессов термической деструкции помогает оптимизировать технологии переработки и снизить воздействие на окружающую среду. Однако использование традиционных кинетических схем нередко приводит к трудностям, связанным с многокомпонентностью систем, сложностью взаимодействия различных фаз и непредсказуемостью поведения материалов при высоких температурах [1]. В связи с этим для решения подобных задач все чаще обращаются к численным методам [2], использующим случайные величины. Эти методы представляют собой эффективные инструменты, так как не требуют сложных преобразований исходных данных и не накладывают жестких граничных условий [3]. Одним из таких методов является генетический алгоритм.

Генетический алгоритм — это метод оптимизации, который основывается на принципах естественного отбора и эволюции. В ходе его работы создается популяция возможных решений, которые затем подвергаются процессу «естественного отбора»: лучшие решения выбираются для «скрещивания» с другими решениями и «мутации», создавая новые возможные «особи». Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение. Генетический алгоритм хорошо подходит для задач, в которых пространство возможных решений имеет сложную структуру,

*Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2023-0002).

где использование классических методов оптимизации становится крайне затруднительным.

Целью данного исследования является разработка точной математической модели для аппроксимации экспериментальных данных, полученных при термической деструкции парафина, с использованием генетического алгоритма. Рассматриваются два подхода: аппроксимация данных для всего объема экспериментальных материалов и подбор параметров аппроксимирующей кривой для каждой отдельной точки.

2. Глобальная аппроксимация

В рамках первоначального этапа разработки были предложены несколько математических функций, которые ранее использовались для расчета кинетических параметров, отвечающих за наилучшую аппроксимацию данных, полученных в процессе термической деструкции нанокompозита полипропилена. В ходе эксперимента эти функции поочередно применялись к данным, описывающим процесс деструкции парафина. Однако ни одна из предложенных функций не дала удовлетворительных результатов, что потребовало проведения дополнительного анализа.

На основании этого была выдвинута гипотеза, что более точная аппроксимация может быть получена с использованием алгебраической суммы трех функций, выбранных случайным образом на основе их формы и предполагаемой пригодности для задачи. Для этого были выбраны следующие функции: реакции третьего порядка, двумерной диффузии и двумерной реакции на границе раздела фаз.

Результат работы генетического алгоритма в ходе эксперимента представлены на рис. 1. В данном эксперименте использовались 10 итераций. Начальная популяция состояла из 50 особей, где каждая особь представляла собой набор параметров для алгебраической суммы выбранных функций, которые инициализировались случайным образом. На каждом этапе генетического алгоритма проводилось 100 операций скрещивания. В процессе мутации для 50 новых особей случайным образом изменялись параметры. После каждого этапа скрещивания и мутации проводился отбор 50 лучших особей, которые продолжали эволюцию в следующем поколении.

Результаты применения генетического алгоритма с использованием алгебраической суммы трех функций показали, что этот метод способен находить решения, которые приближаются к экспериментальным данным. Однако точность аппроксимации не соответствовала требуемому для высококачественного моделирования термической деструкции парафина уровню. Для повышения точности было принято решение о переходе к более сложному подходу – подбору параметров для каждой точки исходных данных отдельно.

3. Точечная аппроксимация

Внутри алгоритма для каждой точки создается отдельная популяция, для каждой из которых производится настройка параметров алгебраической суммы. Это означает, что для каждого значения из набора данных выполняется полный цикл генетического алгоритма с индивидуальными параметрами.

Результат работы генетического алгоритма в ходе эксперимента представлены на рис. 2. Размер популяции для каждой точки принят прежним – 50 особей. В этом эксперименте количество операций скрещивания было увеличено до 200 на каждую итерацию, количество мутаций – до 100 на каждую итерацию. После каждого этапа скрещивания и мутации 50 лучших особей из каждой популяции были отобраны и использованы для следующего поколения.

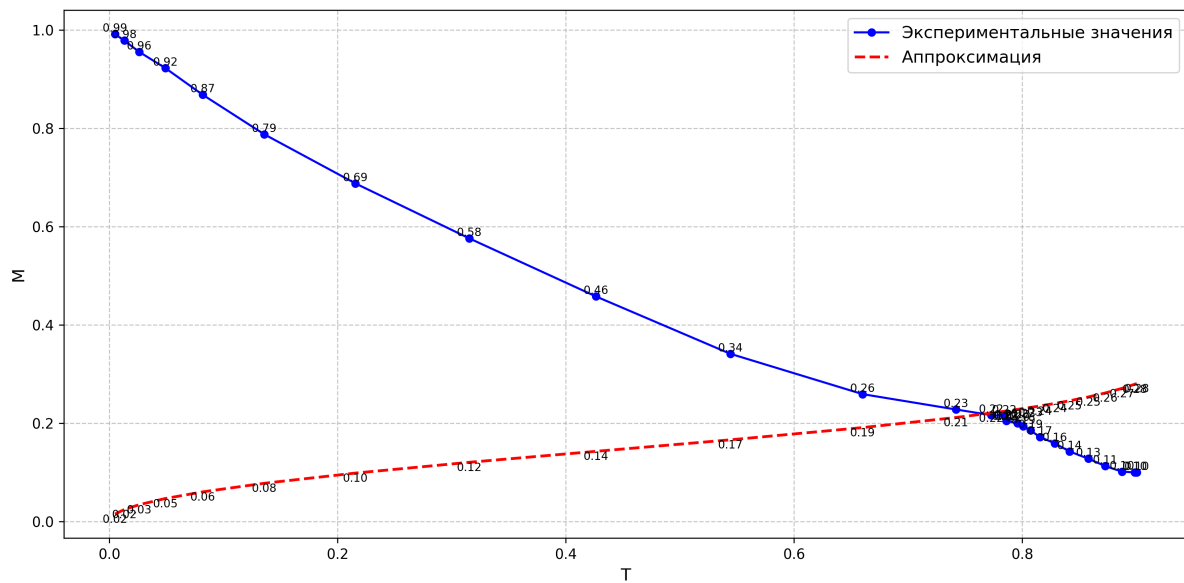


Рис. 1. Аппроксимация экспериментальных данных с использованием алгебраической суммы трех функций

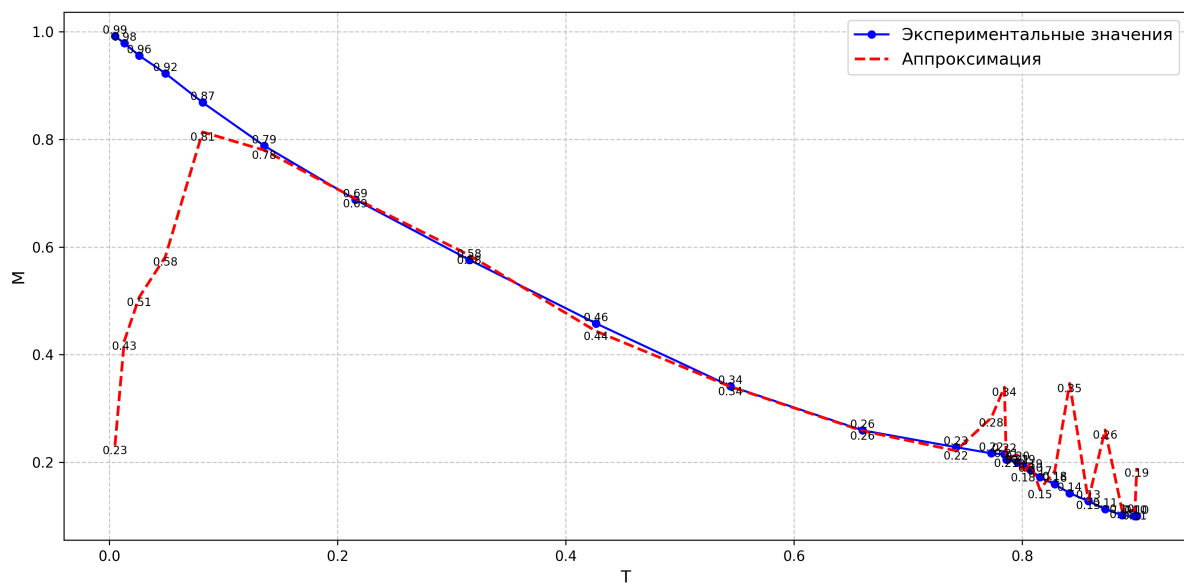


Рис. 2. Аппроксимация экспериментальных данных с подбором параметров для каждой точки данных

В результате применения этого подхода генетический алгоритм показал значительное улучшение точности аппроксимации по сравнению с первым методом. Это подтверждает, что использование более детализированного подхода для каждой точки данных позволяет достичь более высоких результатов в моделировании термической деструкции материалов, таких как парафин.

4. Заключение

По итогам исследования можно сделать вывод об эффективности использования генетического алгоритма для аппроксимации экспериментальных данных, особенно при применении метода подбора параметров для каждой точки данных отдельно.

В будущем планируется реализовать алгоритмы автоматического подбора функций из списка предложенных, а также интеграция с иными численными методами для повышения точности модели.

Литература

1. Ломакин С. М., Дубникова И. Л., Березина С. М., Заиков Г. Е. Термическая деструкция и горение нанокompозита полипропилена на основе органически модифицированного слоистого алюмосиликата // Высокомолекулярные соединения. 2006. Т. 48, № 1. С. 90-105.
2. Хамидуллина З. А., Исмагилова А. С., Спивак С. И. Программная реализация алгоритма определения кинетического уравнения химической реакции // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 1. С. 96-102.
3. Корнилова А. А., Мустафина С. И., Корнилов Д. А., Гиззатова Э. Р., Мустафин А. Г., Галиахметов Р. Н. О кинетическом моделировании процесса деструкции твердого парафина // 6-я Международная конференция по системам управления, математическому моделированию, автоматизации и энергоэффективности (SUMMA). 2024. С. 17-21.

MSC 37N99

On the application of genetic algorithms for approximating experimental data of paraffin thermal destruction

S.I. Mustafina, A.A. Kornilova, E.R. Gizzatova
Ufa University of Science and Technology

Abstract: This work is dedicated to the development of a mathematical model for accurate approximation of experimental data describing the processes of paraffin thermal destruction. The main optimization tool used is the genetic algorithm, which effectively searches for solutions in complex multidimensional spaces without strict constraints on the form of the initial data. Two approaches are considered. The first is global approximation of the entire data set using the algebraic sum of three kinetic functions (third-order reaction, two-dimensional diffusion, and surface reaction). The second is element-wise optimization, where an individual parameter population is formed for each experimental point.

Keywords: genetic algorithm, paraffin thermal destruction, experimental data approximation.

References

1. Lomakin S. M., Dubnikova I. L., Berezina S. M., Zaikov G. E. Termicheskaya destruktziya i gorenje nanokompozita polipropilena na osnove organicheski modifitsirovannogo sloistogo alyumosilikata [Thermal degradation and combustion of polypropylene nanocomposite based on organically modified layered aluminosilicate] // Vysokomolekulyarnye soedineniya [Polymer Science]. 2006. Vol. 48, no. 1. P. 90-105. (in Russian)
2. Khamidullina Z. A., Ismagilova A. S., Spivak S. I. Programmная realizatsiya algoritma opredeleniya kineticheskogo uravneniya khimicheskoi reaktsii [Software implementation of an algorithm for determining the kinetic equation of a chemical reaction] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2018. Vol. 20, no. 1. P. 96-102. (in Russian)
3. Kornilova A. A., Mustafina S. I., Kornilov D. A., Gizzatova E. R., Mustafin A. G., Galiahmetov R. N. O kineticheskom modelirovanii protsessa destruktzii tverdogo parafina [On kinetic modeling of solid paraffin degradation process] // 6-ya Mezhdunarodnaya konferentsiya po sistemam upravleniya, matematicheskomu modelirovaniyu, avtomatizatsii i energoeffektivnosti (SUMMA) [6th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)]. 2024. P. 17-21. (in Russian)

УДК 519.63

Исследование многосеточного метода для решения уравнений в частных производных разрывным методом Галёркина*

Нефедов М.С., Жалнин Р.В., Зинина С.Х.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье представлено исследование применения многосеточного метода с полной аппроксимацией (FAS) в сочетании с разрывным методом Галёркина (DG) для решения нелинейных уравнений в частных производных. Рассматривается задача переноса с периодическими граничными условиями, для которой разработан алгоритм, сочетающий проекционные операторы между сетками разной детализации (V - и W -циклы). Проведены вычислительные эксперименты для полиномиальных базисов степени $p = 2$ и $p = 3$, продемонстрировавшие порядки сходимости, близкие к теоретическим. Спектральный анализ ошибок подтвердил эффективность метода для подавления высокочастотных составляющих невязки. Результаты показывают, что многосеточный подход ускоряет сходимость итерационных методов для неявных схем DG, сохраняя точность аппроксимации.

Ключевые слова: многосеточный метод, разрывный метод Галёркина, уравнения в частных производных, порядок сходимости, спектральный анализ, проекционные операторы, неявные схемы.

1. Многосеточный метод для разрывного метода Галеркина

В данной работе рассматривается использование многосеточного метода с полной аппроксимацией (Full Approximation Scheme - FAS) [1] на основе разрывного метода Галеркина [2] для решения нелинейных уравнений в частных производных.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$, с периодическими граничными условиями и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (2)$$

Для численного решения уравнения (1) введём равномерную сетку

$$0 = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$$

с шагом $h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $i = \overline{0, N}$.

Приближенное решение будем искать разрывным методом Галеркина [2], как элемент пространства

$$\mathcal{H}_h^k = \{u_h \in L_2(0, 1) : u_h|_{I_i} \in \mathcal{P}_k(I_i), i = \overline{1, N}\}, \quad (3)$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00308, <https://rscf.ru/project/25-21-00308/>.

где $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $\mathcal{P}_k(I_i)$ – пространство полиномов степени не выше p на интервале I_i .

Запишем неявную схему:

$$\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\tau} - L(U_h^{n+1}) = 0, \quad (4)$$

где $L(U_h^{n+1})$ – оператор, полученный в результате дискретизации уравнения (1) разрывным методом Галеркина, U_h^{n+1}, U_h^n – коэффициенты разложения решения по базису на равномерной сетке с шагом h .

Далее запишем систему (4) в виде

$$Q_h(U_h^{n+1}) = F_h, \quad (5)$$

где

$$Q_h(U_h^{n+1}) = \frac{1}{\tau} U_h^{n+1} - L(U_h^{n+1}), \quad F_h = \frac{1}{\tau} U_h^n. \quad (6)$$

Чтобы найти решение U_h^{n+1} воспользуемся многосеточным методом полной аппроксимации. Будем говорить, что пространство $\mathcal{H}_h^k$ соответствует подробному уровню, и для краткости записи будем его обозначать $\mathcal{H}_h$. Далее рассмотрим пространство, соответствующее грубому уровню, обозначим его $\mathcal{H}_H$. В качестве $\mathcal{H}_H$ можно положить или $\mathcal{H}_{2h}^p$ или $\mathcal{H}_h^{p-1}$. Так же определим операторы ортогональной проекции:

$$P_h^H : \mathcal{H}_h \rightarrow \mathcal{H}_H, \quad P_H^h : \mathcal{H}_H \rightarrow \mathcal{H}_h,$$

Выполнив одну итерацию метода Ньютона, найдем приближение к искомому решению $\tilde{U}_h$. Невязка для данного приближения будет равна

$$R_h = F_h - Q_h(\tilde{U}_h). \quad (7)$$

Вычтем $Q_h(\tilde{U}_h)$ из левой и правой частей (5) и, опуская индекс $n+1$, получим

$$Q_h(U_h) - Q_h(\tilde{U}_h) = F_h - Q_h(\tilde{U}_h). \quad (8)$$

Из (7) получим

$$Q_h(U_h) = R_h + Q_h(\tilde{U}_h). \quad (9)$$

Далее аналогично (6) определим оператор $Q_H : \mathcal{H}_H \rightarrow \mathcal{H}_H$ и найдем решение $U_H \in \mathcal{H}_H$ на грубом уровне

$$Q_H(U_H) = P_h^H R_h + Q_H(P_H^h \tilde{U}_h). \quad (10)$$

Вычислив ошибку

$$\varepsilon_H = U_H - \tilde{U}_H,$$

найдем решение на подробной сетке

$$U_h = \tilde{U}_h + P_H^h \varepsilon_H. \quad (11)$$

Затем выполним несколько итераций метода Ньютона для системы (5), взяв в качестве начального приближения U_h .

При решении системы (10) можно рекурсивно применить этот же алгоритм. Таким образом, комбинируя различную глубину огрубления расчетной сетки, можно получить модификации данного многосеточного алгоритма (например, V -, W -циклы, как показано на рис. 1).

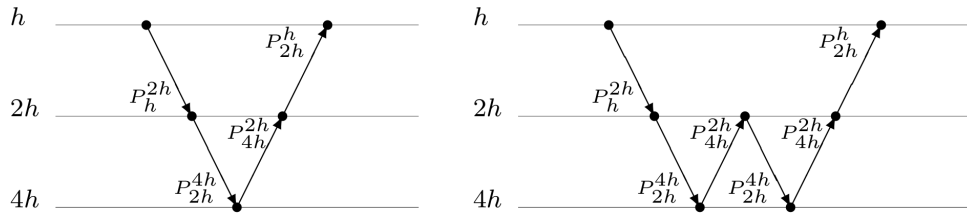


Рис. 1. Варианты проекции на сеточные уровни трехсеточного метода:
 а) V -цикл; б) W -цикл

2. Результаты вычислительных экспериментов

Далее представлены результаты расчетов для случая $f(u) = u$, $u_0(x) = \sin(2\pi x)$. На рис. 2 представлены графики решений на сетках различной размерности. На рис. 3 показаны графики распределения частот для ошибки и невязки решения на различных этапах многосеточного метода для подробного уровня. Порядки сходимости для различных размерностей пространства $\mathcal{H}_h^p$ приведены в таблице 1.

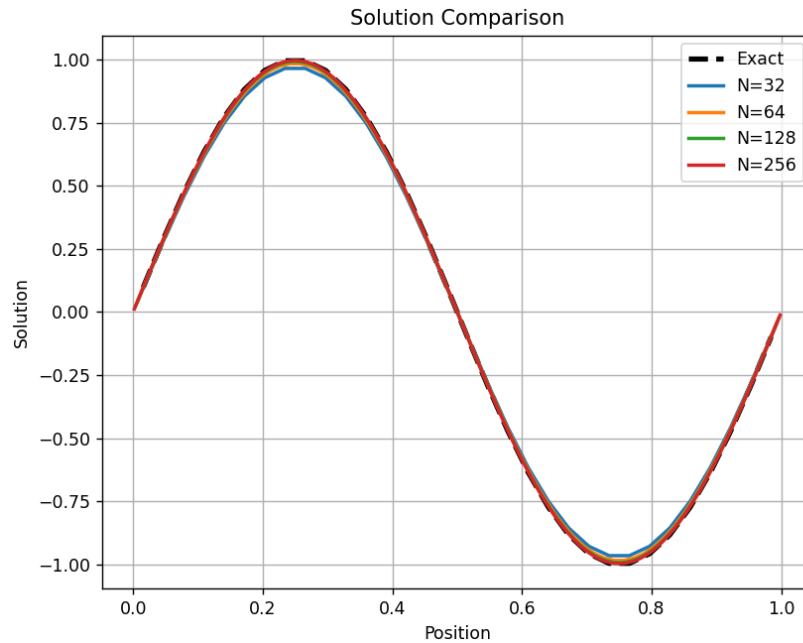


Рис. 2. Аппроксимация точного решения на сетках разной размерности

Таблица 1: Порядки сходимости для различных базисных функций

Кол-во ячеек	$p = 2$				$p = 3$			
	L_1		L_2		L_1		L_2	
	err_1	p	err_2	p	err_1	p	err_2	p
32	2.2374e-03	-	2.6545e-03	-	5.9927e-05	-	7.1168e-05	-
64	5.5812e-04	1.82	6.9762e-04	1.84	7.3350e-06	2.71	9.5000e-06	2.80
128	1.3944e-04	1.97	1.9498e-04	1.93	1.1216e-06	2.85	1.3665e-06	2.87
256	3.6126e-05	1.95	5.7047e-05	1.97	1.7494e-07	2.91	2.1089e-07	2.90

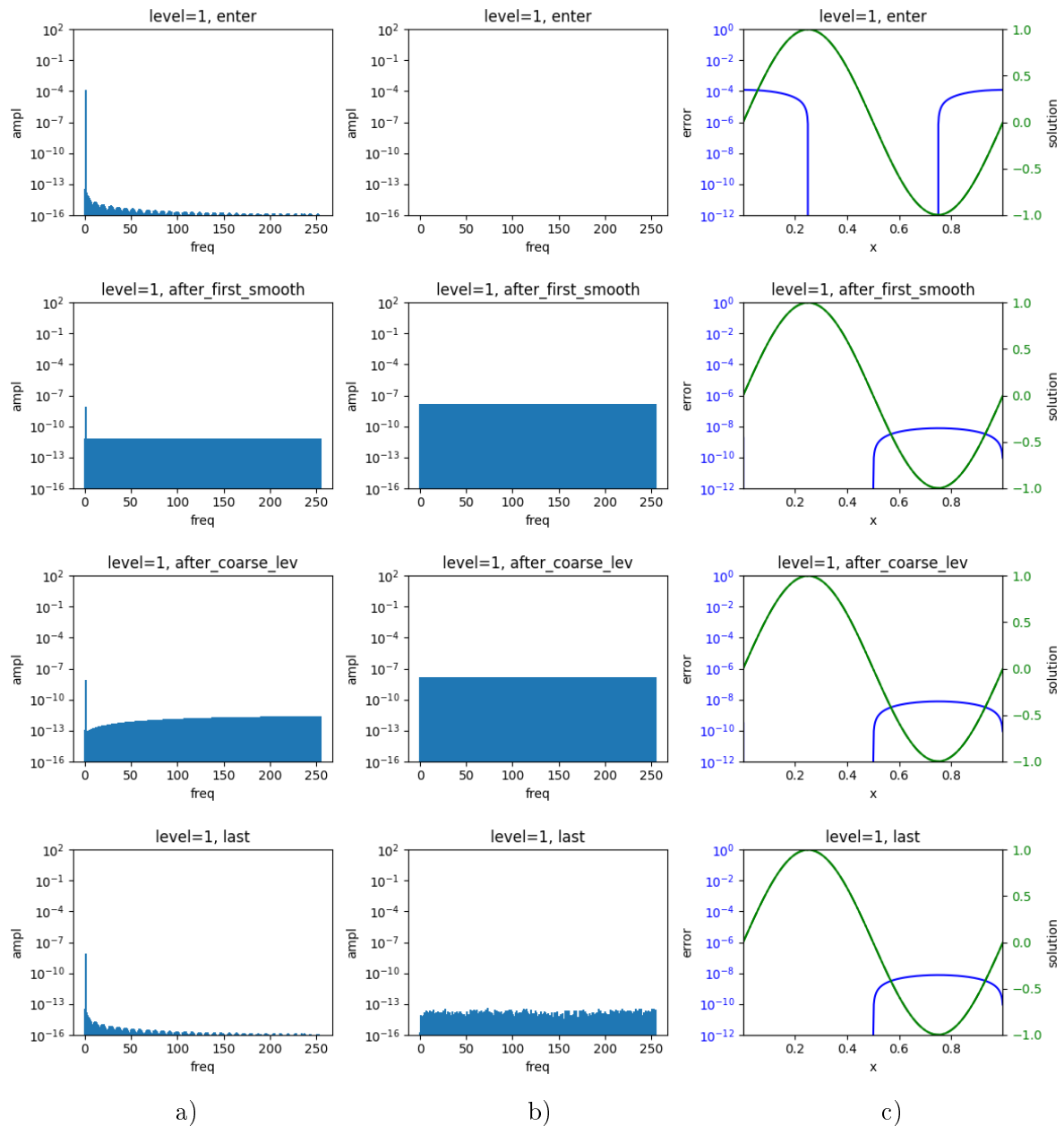


Рис. 3. Спектральный анализ многосеточного метода: а) спектр ошибки решения; б) спектр невязки решения; в) решение и ошибка.

Литература

1. Brandt A. Multi-level Adaptive Computations in Fluid Dynamics // AIAA Technical Report. 1979. No. AIAA-79-1455. Williamsburg, VA: AIAA.
2. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection Dominated Problems // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations: Lecture Notes in Mathematics. 1998. Vol. 1697. P. 151-268.

MSC 57N10

Research on the multigrid method for solving partial differential equations using the discontinuous Galerkin method

M.S. Nefedov, R.V. Zhalnin, S.H. Zinina

National Research Mordovia State University

Abstract: This paper investigates the application of the Full Approximation Scheme (FAS) multigrid method combined with the Discontinuous Galerkin (DG) method for solving nonlinear partial differential equations. The study focuses on a transport problem with periodic boundary conditions, developing an algorithm that incorporates projection operators between grids of varying resolution (V - and W -cycles). Computational experiments were conducted for polynomial bases of degrees $p = 2$ and $p = 3$, demonstrating convergence rates close to theoretical values. Spectral error analysis confirmed the method's effectiveness in suppressing high-frequency residual components. The results show that the multigrid approach accelerates the convergence of iterative methods for implicit DG schemes while maintaining approximation accuracy.

Keywords: multigrid method, Discontinuous Galerkin, partial differential equations, convergence order, spectral analysis, projection operators, implicit schemes.

References

1. Brandt A. Multi-level Adaptive Computations in Fluid Dynamics // AIAA Technical Report. 1979. No. AIAA-79-1455. Williamsburg, VA: AIAA.
2. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection Dominated Problems // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations: Lecture Notes in Mathematics. 1998. Vol. 1697. P. 151-268.

УДК 517.926

Применение алгебро-геометрических свойств линейных систем дифференциальных уравнений к исследованию частичной устойчивости

Никонов В.И.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Исследуются частичная устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Используя алгебраические и геометрические свойства суммы циклических подпространств линейного оператора, частично определяющего динамику системы, получены условия устойчивости относительно заданной части координат фазового вектора. Существования инвариантного подпространства линейного оператора позволяет свести задачу частичной устойчивости к анализу устойчивости выделенной подсистемы.

Ключевые слова: линейный оператор, циклическое подпространство, минимальный аннулирующий многочлен, частичная устойчивость.

1. Устойчивость линейных систем относительно заданной части координат фазового вектора

В данной работе представлены исследования, являющиеся развитием результатов [1] и опирающиеся на идеи, изложенные в [2–4]. Статья посвящена исследованию частичной устойчивости линейных систем.

1.1. Постановка задачи.

Пусть поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A_* x(t), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $A_* \in R^{n \times n}$. Требуется исследовать устойчивость системы (1) относительно первых двух компонент фазового вектора x .

Учитывая это, представим фазовый вектор x в виде $x = (y, z)$, $y \in R^2$, $z \in R^p$, $n = 2 + p$.

Тогда система (1) представима в виде

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1z, \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2z, \\ \frac{dz}{dt} = c_1y_1 + c_2y_2 + Dz, \end{cases} \quad (2)$$

где $y_1, y_2 \in R$, $z \in R^p$, $a_{ij} \in R$, $b_j \in R^{1 \times p}$, $c_i \in R^{p \times 1}$, $D \in R^{p \times p}$, $i, j \in \{1, 2\}$.

1.2. Решение задачи.

Рассмотрим линейные операторы

$$\mathcal{D} : R^p \rightarrow R^p, \quad \mathcal{D}^* : R^{p*} \rightarrow R^{p*},$$

где R^{p*} — сопряженное пространство к R^p , $\mathcal{D}^*$ — сопряженный оператор к оператору $\mathcal{D}$. При этом будем предполагать, что в стандартном базисе пространства R^p линейный оператор $\mathcal{D}$ имеет матрицу D .

Введем в рассмотрение функционалы $b_1^* = b_1 \xi$ и $b_2^* = b_2 \xi$ из линейного пространства R^{p*} .

Рассмотрим циклические подпространства $U_{b_1^*}^*$ и $U_{b_2^*}^*$ линейного оператора $\mathcal{D}^*$, порождаемые элементами b_1^* и b_2^* :

$$U_{b_1^*}^* = \langle b_1^*, \mathcal{D}^* b_1^*, \dots, \mathcal{D}^{*p_1-1} b_1^* \rangle, \dim U_{b_1^*}^* = p_1,$$

$$U_{b_2^*}^* = \langle b_2^*, \mathcal{D}^* b_2^*, \dots, \mathcal{D}^{*p_2-1} b_2^* \rangle, \dim U_{b_2^*}^* = p_2.$$

Таким образом, минимальные аннулирующие многочлены функционалов b_1^* и b_2^* имеют, соответственно, вид

$$\sigma_{b_1^*}(\lambda) = \lambda^{p_1} + \alpha_{p_1} \lambda^{p_1-1} + \dots + \alpha_2 \lambda + \alpha_1,$$

$$\sigma_{b_2^*}(\lambda) = \lambda^{p_2} + \beta_{p_2} \lambda^{p_2-1} + \dots + \beta_2 \lambda + \beta_1.$$

Предположение 1. Если $\dim(U_{b_1^*}^* + U_{b_2^*}^*) = s < p$, то существует линейное невырожденное преобразование $z = S\bar{z}$ приводящую систему (2) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \bar{z}_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{22}y_2 + \bar{z}_{p_1+1}, \\ \frac{d\bar{z}^1}{dt} &= \bar{c}_{11}y_1 + \bar{c}_{12}y_2 + \bar{D}_{11}\bar{z}^1, \\ \frac{d\bar{z}^2}{dt} &= \bar{c}_{21}y_1 + \bar{c}_{22}y_2 + \bar{D}_{21}\bar{z}^1 + \bar{D}_{22}\bar{z}^2, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\bar{z}^1 \in R^s$, $\bar{z}^2 \in R^{p-s}$, а $\bar{c}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$, $i, j \in \{1, 2\}$ — матрицы соответствующих размеров.

Предположение 2. Для того, чтобы система (2) была y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы система

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \bar{z}_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{11}y_1 + a_{22}y_2 + \bar{z}_{p_1+1}, \\ \frac{d\bar{z}^1}{dt} = \bar{c}_{11}y_1 + \bar{c}_{12}y_2 + \bar{D}_{11}\bar{z}^1, \end{cases} \tag{4}$$

была устойчивой относительно всех переменных.

Следствие 1. Если $s = p$, то для того, чтобы система (2) была y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы эта система была устойчивой.

2. Пример

Пусть динамика исследуемой на частичную устойчивость система задана матрицей A_* так, что $y \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{R}^5, n = 7, p = 5$, где

$$A_* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{2} & -\frac{21}{10} \\ a_{21} & a_{22} & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{2} & -\frac{21}{10} \\ 2 & 4 & -3 & -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} & 6 & \frac{41}{5} \\ 1 & 2 & -8 & \frac{13}{5} & -\frac{2}{5} & 6 & \frac{32}{5} \\ -1 & -2 & 6 & \frac{4}{5} & \frac{14}{5} & -5 & -\frac{34}{5} \\ 3 & 6 & -6 & -\frac{8}{5} & \frac{7}{5} & 10 & \frac{53}{5} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & \frac{13}{5} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & -23 & -46 & 8 \\ -3 & 5 & 22 & 16 \\ -6 & -2 & -10 & -4 \\ -15 & 19 & 38 & -10 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исследуется устойчивость системы относительно первых двух компонент фазового вектора $x \in \mathbb{R}^7$.

Тогда функционалы

$$b_1^* = 2\xi_1 + \frac{3}{5}\xi_2 + \frac{1}{10}\xi_3 - \frac{3}{2}\xi_4 - \frac{21}{10}\xi_5 \text{ и } b_2^* = 2\xi_1 + \frac{2}{5}\xi_2 - \frac{1}{10}\xi_3 - \frac{3}{2}\xi_4 - \frac{29}{10}\xi_5$$

являются образующими векторами инвариантных циклических подпространств, соответственно,

$$U_{b_1^*}^* = \left\langle 2\xi_1 + \frac{3}{5}\xi_2 + \frac{1}{10}\xi_3 - \frac{3}{2}\xi_4 - \frac{21}{10}\xi_5, 3\xi_1 + \frac{4}{5}\xi_2 + \frac{4}{5}\xi_3 - 2\xi_4 - \frac{9}{5}\xi_5, 5\xi_1 + \frac{8}{5}\xi_2 + \frac{13}{5}\xi_3 - \right. \\ \left. - 3\xi_4 - \frac{8}{5}\xi_5 \right\rangle,$$

$$U_{b_2^*}^* = \left\langle 2\xi_1 + \frac{2}{5}\xi_2 - \frac{1}{10}\xi_3 - \frac{3}{2}\xi_4 - \frac{29}{10}\xi_5, 5\xi_1 - \frac{1}{5}\xi_2 + \frac{4}{5}\xi_3 - 3\xi_4 - \frac{19}{5}\xi_5 \right\rangle,$$

$$\dim U_{b_1^*}^* = 3, \dim U_{b_2^*}^* = 2, \dim (U_{b_1^*}^* + U_{b_2^*}^*) = 4 < 5 = p. \quad (5)$$

Искомое невырожденное преобразование имеет вид

$$z = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{2} & -\frac{21}{10} \\ 3 & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & -2 & -\frac{9}{5} \\ 5 & \frac{8}{5} & \frac{13}{5} & -3 & -\frac{8}{5} \\ 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{10} & \frac{3}{2} & \frac{29}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{z}.$$

Тогда, применяя это преобразование, приходим к системе, матрица которой имеет вид

$$A'_* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -11 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & \frac{15}{2} & -\frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -4 & 2 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исследование устойчивости исходной системы по отношению к переменным y_1 и y_2 сводится к исследованию устойчивости системы относительно всех переменных, матрица которой имеет вид:

$$A''_* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -11 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & \frac{15}{2} & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в этом случае исходная задача как бы разбивается на две подзадачи меньших размерностей. При этом, необходимым условием y -устойчивости является устойчивость выделенной подсистемы по переменным $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4$. Но в данном случае видим, что эта система неустойчива. Этого достаточно, чтобы утверждать, что исходная система не является y -устойчивой.

Литература

1. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. Москва: Научный мир, 2001. 320 с.
2. Никонов В. И. Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 2. С. 95-99.
3. Никонов В. И. Необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем относительно заданной части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15, № 2. С. 66-69.
4. Никонов В. И. К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 43-57.

MSC 34D20

Application of algebraic-geometric properties of linear systems of differential equations to the study of partial stability

V.I. Nikonov

National Research Mordovia State University

Abstract: Partial stability of linear systems of differential equations with constant coefficients is investigated. Using the algebraic and geometric properties of the sum of cyclic subspaces of a linear operator that partially determines the dynamics of the system, stability conditions with respect to a given part of the coordinates of the phase vector are obtained. The existence of an invariant subspace of a linear operator allows us to reduce the problem of partial stability to the analysis of the stability of a selected subsystem.

Keywords: linear operator, cyclic subspace, minimal annihilating polynomial, partial stability.

References

1. Vorotnikov V. I., Rumyantsev V. V. *Ustoichivost i upravlenie po chasti koordinat fazovogo vektora dinamicheskikh sistem: teoriya, metody i prilozheniya* [Stability and Control by Part of Phase Vector Coordinates of Dynamic Systems: Theory, Methods and Applications]. Moscow: Nauchnyi mir, 2001. 320 p. (in Russian)
2. Nikonov V. I. Geometricheskii aspekt ustoichivosti lineinykh sistem otnositelno chasti peremennykh [Geometric aspect of stability of linear systems with respect to part of variables] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2011. Vol. 13, no. 2. P. 95-99. (in Russian)
3. Nikonov V. I. Neobkhodimye i dostatochnye usloviya ustoichivosti lineinykh sistem otnositelno zadannoi chasti peremennykh [Necessary and sufficient conditions for stability of linear systems with respect to a given part of variables] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2013. Vol. 15, no. 2. P. 66-69. (in Russian)
4. Nikonov V. I. K chastichnoi ustoichivosti lineinykh sistem otnositelno zadannoi komponenty fazovogo vektora [On partial stability of linear systems with respect to a given component of the phase vector] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2021. Vol. 23, no. 1. P. 43-57. (in Russian)

УДК 519.17

Моделирование явлений алеаторической неопределенности в биосистемах на основе возмущенных уравнений с запаздыванием

Переварюха А.Ю.

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН

Аннотация: В докладе рассмотрен подход к моделированию явлений с вероятностной компонентой в биосистемах, определенных как ситуации при алеаторической (стадийно-случайной) неопределенности. Случайности играют роль на отдельных стадиях их развития. Исследуемые ситуации возникают в изменяющихся биофизических процессах, когда заранее в начальном состоянии не предопределен выбор из возможного набора вариантов развития. Так при распространении COVID-19 оказались очень вариативны в одной субпопуляции течение инфекционного заболевания, скорость и спектр выработки иммунного ответа, длительность сохранения иммунитета после заболевания. По неясным пока причинам долгоживущие клетки иммунной памяти у одних вакцинированных формируются, а у других нет. Эволюция коронавируса и запуск новых волн заражения COVID-19 испытывают действие случайных факторов, но это не стохастические процессы и не описываются включением в уравнения возмущения «белого шума». В работе моделирование аспектов интервально ограниченной неопределенности в динамике ситуаций проводится на основе уравнений с возмущенным запаздыванием, генерирующих переходные колебательные режимы заражений.

Ключевые слова: уравнения с запаздыванием, волны эпидемий, локальная стадийно-случайная неопределенность, вероятностная компонента процессов эволюции.

1. Алеаторические биофизические процессы и их свойства

Фрагментарно детерминированным или алеаторическим назовем процесс со случайным выбором одной из его характеристик из конечного набора возможных в данный момент вариантов. Выбор некоторых вариантов может приводить к различным асимптотическим состояниям, например, летальный исход инфекционного заболевания. Алеаторика – термин музыкальной теории, когда исполнителю части музыкального произведения доступен случайный выбор «по усмотрению», например, смена тональности. Музыканты, развлекавшие на балах публику в XVIII в., могли бросанием игральной кости сформировать новое произведение из известных им фрагментов. Эволюция гриппа проходит по аналогичному принципу при случайной реассортации генов. Аналогично иммунная система имеет возможность выбора при презентации антигенов, а поскольку идентичных иммунных систем у взрослых людей не существует, то возникает естественная неопределенность исходов в популяции при противоборстве с вирусом. Для пандемии COVID-19 фактор индивидуальных различий стал чрезвычайно значимым.

Необходимы специальные методы моделирования «алеаторических процессов» как не полностью предопределенных при их стадийном развитии. В ходе эволюции описываемый детерминированной функцией биофизический процесс сопровождается стохастическим выбором вариантов нелинейности при переходе к следующей стадии.

Процессы выработки реакции на воздействие в биосистемах содержат случайную компоненту выбора из ограниченного набора вариантов, что не делает их стохастическими. Например, у некоторых видов такой случайный фактор, как температура инкубации яиц, может определять пол эмбриона – путь развития самец/самка. Для иммунного ответа отличаются и время активации лимфоцитов, и выбор эпитопов вируса, на которые вырабатываются антитела. Даже близкие родственники различно отвечают на заражение коронавирусом, но можно выделить типы таких ответов. Эпидемический процесс COVID-волн и инвазии чужеродных видов в регионах различаются, но варианты поведения ограничены – различные сменяющиеся формы колебательных режимов. Возникает проблема введения в модель локально действующего стохастического фактора. Ситуацию автор сравнил со случайным выбором тактового размера и тональности для частей музыкального произведения, когда не меняя нот партитуры исполнять его можно различно. Автор развивает метод динамического изменения характеристик колебательного режима в уравнениях с репродуктивным r -параметром $\dot{N} = rF(N(t - \tau)) - \Psi(N(t - \tau_2))$, $r = \text{const}$ при возмущении запаздывания в репродуктивной компоненте F с τ либо в демпфирующей функции Ψ с включением τ_2 согласно ситуации.

2. Модели алеаторического развития с локально возмущенным запаздыванием

Для анализа алеаторических (фрагментарно детерминированы или событийно случайных) свойств развития ситуации определено равномерное возмущение σ на отрезке $[0, 1]$ запаздывания активации $x(t - \tau \times \sigma)$. Включенный в модель временной фактор последствия τ в трактовке автора – агрегированная характеристика конкурирующих процессов [1], как возобновление истощенных ресурсов, формирование новых генераций или выработка адаптации.

Модификации моделей с запаздыванием значимы для исследования редких сценариев в биофизике, относящихся к типу агрессивных и не балансируемых путем саморегуляции.

В предложенной ранее модели получен актуальный вариант разрушения колебаний без необходимости дальнейшего увеличения r . В новую модель включим эффект действия предпороговой величины для текущего числа зараженных $H = \frac{1}{3}K$ и $N(t) \rightarrow K, N(0) < K$ усиливает вспышку эпидемии в уравнении:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N(t - \tau \times \sigma)}{K} \right) (H - N(t - \gamma)), \quad \gamma < \tau. \quad (1)$$

Модель основана на авторской идее, значимости перехода $N(t - \gamma)$ через предкритический порог H для механизмов контроля. Величина H трактовалась как мягкое пороговое состояние «преднасыщения» среды, когда при $N(t) \rightarrow H + \epsilon$ популяция вселенца [2] начинает разрушительно воздействовать на среду [3]. В сценарии на динамику инвазионного процесса оказывает влияние отклонение $[H - N(t - \gamma)]$, притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. В иммунологической трактовке при такой вирусной нагрузке организм через небольшой интервал задержки сталкивается опасными симптомами. Модель описала вычислительный сценарий с выбросом траектории из окрестности цикла. После образования колебаний при превышении значения в момент $\max N_*(t_{\max}; r\tau\gamma)$ образуется состояние предельного для биосистемы уровня воздействия. Траектория решения далее $N(t) \rightarrow \infty$, что вызывает остановку расчетов в сценарном эксперименте.

В новой модели релаксационный цикл оказывается переходным режимом существования, а образование неограниченной траектории оценивается, как катастрофическая динамика. Пусть темп активации нового штамма вероятностно вариативен: $[\tau_1, \tau_1 + \Delta]$. С учетом стохастического возмущения τ_1 случайной величиной γ в диапазоне $\gamma(\omega) \in [1, 2]$ опишем с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием $(t - \tau_1\gamma)$ волн эпидемии при появлении нового доминирующего штамма с высокой аффинностью, темпом репликации [4] и набором опасных мутаций:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = R_2 Y(t) \exp(-\varsigma Y(t - \gamma\tau) - \varepsilon \sqrt{(J - N(t - \tau))^2}), \\ \frac{dN}{dt} = R_1 N(t) \ln \left(\frac{\mathcal{K}}{N(t - \tau\gamma)} \right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - Y(t))^2} - \varphi Y(t), \delta > q. \end{cases} \quad (2)$$

В переопределяемой системе (2) учтено влияние вероятностной конкуренции штаммов при их эволюции на уклонение от связывания с антителами IgG3. При $Y(0) < J < \mathcal{K}$ $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$ происходит смена характеристик осцилляционного режима. Положение экстремумов колебаний $N(t) \rightarrow N_*(t)$, $\max N_*(t) < J$, $\min N_*(t)$ зависит от возмущения запаздывания. Формирование антител IgG3 вакцинами, содержащими один белок, стало фактором эволюционного отбора штаммов. Их разнообразие поддерживает конвергенция. Предложенные уравнения предназначены для формализации в формате расширенного гибридного автомата, где происходят предикативные переключения между режимами изменения состояния [5], что представлены формами субпроцессов на кадрах модельного времени $[T_{i-1}, T_i]$ и для каждого субпроцесса колебаний выбирается меняющаяся форма правой части.

На основе представления об алеаторическом развитии иммунных процессов и случайных факторах при импульсной эволюции коронавируса предложен событийный подход для построения моделей сложных эпидемических процессов с повторным возникновением волн. Модели строятся на основе системы уравнений с включением интервально заданных возмущений в величину запаздывания. Модельные уравнения строятся из баланса функций репродукции и демпфирования волн, где возможны изменения формы нелинейности, отражающие появления новых сильно мутировавших вариантов возбудителя. Модели организованы в форме гибридных структур и описывают свойства нестационарных колебательных режимов и возникавших повторных волн эпидемии из-за новых штаммов Omicron. При случайной эволюции, но не случайном отборе мутаций вирусу необходимо соблюдать баланс между эффективной репликацией, аффинностью связывания RBD-домена S-белка с рецептором ACE2 и уклонением от связывания S-белка с антителами IgG, IgM. Вырабатываемые активированными иммунными В-клетками антитела устаревают, но Т-клеточный ответ сохраняет актуальность, что ведет для коронавируса ситуацию эволюционного цугцванга.

Литература

1. Переварюха А. Ю. Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели // Нелинейный мир. 2012. Т. 10, № 4. С. 255-262.
2. Переварюха А. Ю. Хаотические режимы в моделях теории формирования пополнения популяций // Нелинейный мир. 2009. Т. 10, № 4. С. 925-932.

3. Михайлов В. В., Трофимова И. В. Principles of simulation of invasion stages with allowance for solar cycles // Письма в Журнал технической физики. 2023. Т. 49, № 9. С. 97-105.
4. Михайлов В. В., Трофимова И. В. Computational modeling of the nonlinear metabolism rate as a trigger mechanism of extreme dynamics of invasion processes // Письма в Журнал технической физики. 2022. Т. 48, № 12. С. 301-304.
5. Борисова Т. Ю., Переварюха А. Ю. On the physicochemical method of analysis of the formation of secondary immunodeficiency as a bioindicator of the state of ecosystems using the example of seabed biota of the Caspian Sea // Письма в Журнал технической физики. 2022. Т. 48, № 7. С. 251-257.

MSC 90C99

Modeling of aleatoric uncertainty phenomena in biosystems based on perturbed equations with delay

A.Yu. Perevaryukha

St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences

Abstract: The report considers an approach to modeling phenomena with a probabilistic component in biosystems, which we define as situations under aleatoric uncertainty. Randomness plays a role at certain stages of their development. The situations under study arise in changing biophysical processes, when the choice from a possible set of development options is not predetermined in the initial state. Thus, during the spread of COVID-19, the course of the infectious disease, the rate and spectrum of immune response production, and the duration of immunity after the disease turned out to be very different in one subpopulation. For reasons that are still unclear, long-lived immune memory cells are formed in some vaccinated people, but not in others. The evolution of the coronavirus and the launch of new waves of COVID-19 infection are affected by random factors, but these are not stochastic processes and are not described by including white noise in the perturbation equations. In the paper, aspects of interval-bounded uncertainty in the dynamics of situations are modeled based on equations with perturbed delay that generate transient oscillatory modes.

Keywords: delay equations, epidemic waves, local uncertainty, probabilistic component of processes.

References

1. Perevaryukha A. Yu. Interpretatsiya povedeniya modelei dinamiki bioresursov i momentnaya khaotizatsiya v novoi modeli [Interpretation of bioresource dynamics models behavior and instant chaos in a new model] // Nelineinyi mir [Nonlinear World]. 2012. Vol. 10, no. 4. P. 255-262. (in Russian)
2. Perevaryukha A. Yu. Khaoticheskie rezhimy v modelyakh teorii formirovaniya popolneniya populyatsii [Chaotic regimes in models of population recruitment theory] // Nelineinyi mir [Nonlinear World]. 2009. Vol. 10, no. 4. P. 925-932. (in Russian)
3. Mikhailov V. V., Trofimova I. V. Principles of simulation of invasion stages with allowance for solar cycles // Technical Physics Letters. 2023. Vol. 49, no. 9. P. 97-105.
4. Mikhailov V. V., Trofimova I. V. Computational modeling of the nonlinear metabolism rate as a trigger mechanism of extreme dynamics of invasion processes // Technical Physics Letters. 2022. Vol. 48, no. 12. P. 301-304.
5. Borisova T. Yu., Perevaryukha A. Yu. On the physicochemical method of analysis of the formation of secondary immunodeficiency as a bioindicator of the state of ecosystems using the example of seabed biota of the Caspian Sea // Technical Physics Letters. 2022. Vol. 48, no. 7. P. 251-257.

УДК 517.977.56

Задача оптимизации турбулентных течений многофазных сред по сетеподобному носителю

Перова И.В.

Воронежский государственный университет

Аннотация: В работе рассматривается начально-краевая задача для дифференциальной системы Навье-Стокса, используемой для описания математической модели так называемых турбулентных процессов транспортировки ньютоновских жидкостей с определенной вязкостью. Модель предполагает, что жидкость является многофазной континуальной средой и обладает сложной внутренней реологией. Отличительной особенностью изучаемого процесса является отсутствие классического дифференциального уравнения в узловых местах в сетеподобной области. Представлена оптимизационная задача, актуальная в анализе процессов переноса сплошных сред по сетеподобному носителю.

Ключевые слова: начально-краевая задача, турбулентное течение, слабое решение в сетеподобных объектах, оптимизационная задача.

1. Основные обозначения и понятия.

В настоящей работе используются обозначения, понятия и определения, введенные в [1]: $\mathfrak{J}$ – открытая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\mathfrak{J}$, имеющая сетеподобную структуру. $\mathfrak{J}$ состоит из подобластей $\mathfrak{J}_k$: $\mathfrak{J} = \bigcup_k \mathfrak{J}_k \cup_l S_l$, где S_l – поверхности, разделяющие подобласти $\mathfrak{J}_k$ друг от друга, S_l^- и S_l^+ односторонние поверхности для S_l , n_l^- , n_l^+ – внешние нормали S_l^- и S_l^+ ; $(0, T)$ ($T < \infty$) – интервал в $\mathbb{R}^1$. $L_2(\mathfrak{J}_T)$ – пространство Лебега суммируемых с квадратом функций на области $\mathfrak{J}_T = \mathfrak{J} \times (0, T)$; $W_2^1(\mathfrak{J}_T)$ – пространство функций из $L_2(\mathfrak{J}_T)$, имеющих обобщенные производные 1-го порядка также из $L_2(\mathfrak{J}_T)$ (аналогично вводятся соболевские пространства $L_2(\mathfrak{J})$ и $W_2^1(\mathfrak{J})$). Введем $\Omega(\mathfrak{J}_T)$ – множество функций $u(x, t) \in W_2^1(\mathfrak{J}_T)$, удовлетворяющих соотношениям

$$Y|_{S_l^-} = Y|_{S_l^+}, \quad \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^-} \Big|_{S_l^-} + \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^+} \Big|_{S_l^+} = 0.$$

Через $W_2^1(S_l, \mathfrak{J}_T)$ обозначим замыкание множества $\Omega(\mathfrak{J}_T)$ по норме $W_2^1(\mathfrak{J}_T)$. Если в описание элементов множества $\Omega(\mathfrak{J}_T)$ добавить их непрерывность по $t \in (0, T)$ в норме $L_2(\mathfrak{J})$, то получим пространство $V_2^1(S_l, \mathfrak{J}_T)$ (детали построения и свойства этих пространств подробно рассмотрены в работах [2, 3]).

Турбулентное течение многофазной среды по сетеподобному носителю можно описать формализмами начально-краевой задачи в замкнутой области $\tilde{\mathfrak{J}}_T$ для $Y(x, t) \in V_2^1(S_l, \mathfrak{J}_T)$:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - q\Delta Y + \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = f, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} Y = 0 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right), \quad (2)$$

$$Y(x, 0) = Y_0(x), x \in \mathfrak{J}, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial x} \right|_{\partial \mathfrak{J}_T} = v(x, t). \quad (4)$$

Уравнения (1), (2) – система Навье-Стокса, где η – коэффициент вязкости многофазной среды в сетеподобной области $\mathfrak{J}$; Δ – оператор Лапласа, $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$; $f(x, t), v(x, t) \in L_2(\mathfrak{J}_T)$, $Y_0(x) \in L_2(\mathfrak{J})$ – заданные функции.

Определение 1. Слабым (турбулентным) решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется векторная функция $Y(x, y) \in V_2^1(S_1, \mathfrak{J}_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} (Y(x, t), \eta(x, t)) - \int_{\mathfrak{J}_t} Y(x, \tau) \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau + \nu \int_0^t \rho(Y, \eta) d\tau + \int_0^t \rho(Y, Y, \eta) d\tau = \\ = (Y_0(x), \eta(x, 0)) + \int_{\partial \mathfrak{J}_t} v(x, \tau) \eta(x, \tau) dx d\tau + \int_{\mathfrak{J}_t} f(x, \tau) \eta(x, \tau) dx d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

для любых $t \in [0, T]$ и любых $\eta(x, t) \in W_2^1(S_1, \mathfrak{J}_T)$, равных нулю на $\partial \mathfrak{J}_T$, где дифференциальные формы $\rho(u, v)$, $\rho(u, v, \omega)$ имеют следующий вид:

$$\rho(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathfrak{J}} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx, \quad \rho(u, v, \omega) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathfrak{J}} u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \omega_i dx$$

причем функции u, v, ω выбираются так, чтобы соответствующие интегралы сходились.

Теорема 1. Начально-краевая задача (1)-(4) имеет единственное слабое (турбулентное) решение, непрерывно зависящее от исходных данных $f(x, t)$, $v(x, t)$ и $Y_0(x)$.

Спектральные характеристики оператора Лапласа Δ служат инструментом для доказательства теоремы 1.

Достаточные условия однозначной слабой разрешимости начально-краевой задачи (1)-(4) можно получить классическим анализом приближений точного решения с помощью априорных оценок, вытекающих из энергетического неравенства для норм решений уравнения Навье-Стокса [1].

2. Задача оптимизации.

Рассмотрим $U = L_2(\partial \mathfrak{J}_T)$ – пространство допустимых граничных функций; $Y(x, t) = Y(v)(x, t)$ – слабое (турбулентное) решение задачи (1)-(4). Наблюдение за состоянием системы $Y(v)(x, t)$ происходит с помощью линейного непрерывного оператора $CY(v)(x, t) = Y(v)(x, t)|_{\partial \mathfrak{J}_T}$ в пространстве наблюдений $L_2(\mathfrak{J}_T)$.

Введем $J(v)$ – функционал (функция стоимости или функция штрафа), требующий минимизации на выпуклом замкнутом множестве $U_{\partial} \subset U$, он имеет вид:

$$J(v) = \|CY(v)(x, t) - z_0(x, t)\|_{L_2(\partial \Gamma_T)}^2 + (Nv, v)_U \quad (6)$$

где $N : U \rightarrow U$ – линейный непрерывный эрмитов оператор, $(Nv, v)_U \geq \varsigma \|v\|_U$ ($\varsigma > 0 - \text{const}$); $z_0(x, t) \in L_2(\mathfrak{J}_T)$ – заданное наблюдение [4].

Оптимизационная задача для дифференциальной системы (1)-(4) заключается в отыскании $\min_{v \in U_\partial} J(v)$.

В работе [1] представлен алгоритм построения решения оптимизационной задачи.

Литература

1. Хоанг В. Н., Парт А. А., Перова И. В. Численный анализ математической модели динамики турбулентного течения многофазной среды в сетеподобных объектах // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2023. Т. 11, № 2(41). С. 14-25.
2. Barykin S. E., Kapustina I. V., Sergeev S. M., Borisoglebskaya L. N., Provotorov V. V., De La Poza Plaza E., Saychenko L. Sustainability of management decisions in a digital logistics network // Sustainability. 2021. Vol. 13, no. 16.
3. Жабко А. П., Провоторов В. В., Шиндяпин А. И. Оптимальное управление дифференциально-разностной параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17, вып. 4. С. 433-448.
4. Волкова А. С., Гнилицкая Ю. А., Провоторов В. В. О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов на геометрическом графе // Системы управления и информационные технологии. 2013. Т. 51, № 1. С. 11-15.

MSC 49J20

The task of optimizing the turbulent flows of multiphase media by itself is a similar carrier

I.V. Perova

Voronezh State University

Abstract: The paper considers an initial boundary value problem for the Navier-Stokes differential system used to describe a mathematical model of the so-called turbulent processes of transportation of Newtonian fluids with a certain viscosity. The model assumes that the liquid is a multiphase continuum medium and it has a complex internal rheology. A distinctive feature of the process under study is the absence of a classical differential equation at the nodal points in the network-like region. An optimization problem is presented that is relevant in the analysis of the processes of transferring continuous media over a network-like medium.

Keywords: initial boundary value problem, turbulent flow, weak solution in similar objects, optimization problem.

References

1. Khoang V. N., Part A. A., Perova I. V. Chislenny analiz matematicheskoi modeli dinamiki turbulentnogo techeniya mnogofaznoi sredy v setepodobnykh obektakh [Numerical analysis of a mathematical model of turbulent multiphase flow dynamics in network-like objects] // Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii [Modeling, Optimization and Information Technology]. 2023. Vol. 11, no. 2(41). P. 14-25. (in Russian)
2. Barykin S. E., Kapustina I. V., Sergeev S. M., Borisoglebskaya L. N., Provotorov V. V., De La Poza Plaza E., Saychenko L. Sustainability of management decisions in a digital logistics network // Sustainability. 2021. Vol. 13, no. 16.
3. Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I. Optimalnoe upravlenie differentsialno-raznostnoi parabolicheskoi sistemoi s raspredelennymi parametrami na grafe [Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph] // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya [Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes]. 2021. Vol. 17, iss. 4. P. 433-448. (in Russian)
4. Volkova A. S., Gnilitckaya Yu. A., Provotorov V. V. O razreshimosti kraevykh zadach dlya uravnenii parabolicheskogo i giperbolicheskogo tipov na geometricheskom grafe [On the solvability of boundary value problems for parabolic and hyperbolic equations on a geometric graph] // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii [Control Systems and Information Technologies]. 2013. Vol. 51, no. 1. P. 11-15. (in Russian)

УДК 519.63

Математическое моделирование процесса диффузии легкой компоненты бинарного газа*

Попов В.Н., Гермидер О.В.

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

Аннотация: В рамках кинетического подхода построено решение задачи о диффузии легкой компоненты бинарной смеси в канале с бесконечными параллельными стенками. Предполагается, что масса молекул легкой компоненты и их концентрация значительно меньше массы молекул и концентрации тяжелых компонентов. Изменение состояния легкой газовой компоненты описывается на основе модели БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) кинетического уравнения Больцмана. В качестве граничного условия на стенках канала используется модель диффузного отражения. Вычислен расход легкой компоненты на единицу ширины канала. Проведено сравнение с аналогичными результатами, представленными в открытых источниках.

Ключевые слова: бинарные смеси, кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, модели граничных условий.

1. Введение

В теории пограничного слоя часто встречается случай бинарного газа, когда масса молекулы одного из компонентов значительно меньше массы молекулы другого. Если парциальная плотность легкой составляющей существенно меньше тяжелой, то движением тяжелой составляющей можно пренебречь, считая ее неподвижной. В представленной работе в данном приближении решена задача о диффузии легкой компоненты бинарной газовой смеси относительно тяжелой в канале, стенки которого будем полагать лежащими в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат. Полагаем, что смесь состоит из газов a и b (соответственно легкая и тяжелая компонента) с концентрациями n_a и n_b и массовыми плотностями $\rho_a = m_a n_a$ и $\rho_b = m_b n_b$, где m_a и m_b – массы молекул газов a и b . Температуру газа считаем постоянной, равной T , а ось Oy' направим вдоль градиента концентрации легкой компоненты. Тогда БГК-уравнение для легкой компоненты записывается в виде [1]

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} = \nu_a (f_{eq} - f) + \nu_{ab} (f_0 - f), \quad (1)$$

Здесь $f_{eq} = n(y') \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \exp[-\beta(\mathbf{v} - \mathbf{u}(x'))^2]$ – локально равновесная функция распределения, $\mathbf{u}(x')$ – среднемассовая скорость легкой компоненты,

$$f_0 = n(y') \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \exp(-\beta v^2),$$

ν_a – частота столкновений легких молекул между собой, ν_{ab} – частота столкновений

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00381.

легких молекул с тяжелыми

$$\nu_{ab} = \nu_a \left(\frac{d_{ab}}{d_a} \right)^2 \sqrt{\frac{m_a + m_b}{2m_b} \frac{n_b}{n_a}}, \quad \nu_a = \frac{p_a}{\mu_a} \Omega(\omega_a, \alpha_a), \quad \Omega(\omega_a, \alpha_a) = \frac{5(\alpha_a + 1)(\alpha_a + 2)}{\alpha_a(7 - \omega_a)(5 - \omega_a)}.$$

Здесь, согласно [2] d_a и d_b – диаметры молекул компонент a и b , $d_{ab} = \frac{d_a + d_b}{2}$, μ_a и ω_a – коэффициент динамической вязкости и показатель температурной зависимости вязкости газа a . Для модели твердых сфер (VHS) $\alpha_a = 1$. Тогда

$$\Omega(\omega_a, 1) = \Omega(\omega_a) = \frac{30}{(7 - \omega_a)(5 - \omega_a)}.$$

В качестве модели граничного условия на стенках канала использована модель диффузного отражения.

2. Вычисление потока массы легкой компоненты бинарной смеси

Решение уравнения (1) с учетом сформулированного выше граничного условия на стенках канала после линейаризации относительно функции распределения молекул легкой компоненты получено методом элементарных решений (методом Кейза) [1] в виде ряда Неймана. Далее, исходя из статистического смысла построенного решения, получено выражение для расчета потока массы легкой компоненты газа J_M . Для примера вычислены значения J_M для смеси Не-Хе и относительной концентрации легкой компоненты $C = \frac{n_a}{n_a + n_b}$. Результаты приведены в таблице.

2d	0.01	0.1	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	100.0
$C = 0.01$								
$-J_M$	3.2245	1.9090	1.0756	0.7636	0.5013	0.2523	0.1380	0.0149
$C = 0.05$								
$-J_M$	3.3751	1.9146	1.0836	0.7720	0.5088	0.2571	0.1409	0.0152
$C = 0.1$								
$-J_M$	3.7317	1.9152	1.0929	0.7830	0.5187	0.2636	0.1448	0.0157
$-J_M$ [3]	2.8760	1.7652	1.0507	0.7717	0.5236	0.2707	0.1491	0.0162

При вычислении J_M полагали, что $m_b = 131.30$, $m_a = 4.0026$, $\frac{d_b}{d_a} = 2.226$, $d = \frac{2d'}{3} \beta^{1/2} \nu$. Как следует из приведенных расчетов, использованный в работе подход приводит к результатам, хорошо согласующимся с результатами, приведенными в статье [3].

3. Заключение

В работе построено решение задачи о диффузии легкой компоненты бинарной газовой смеси в длинном плоском канале с бесконечными параллельными стенками. Вычислен удельный расход легкой компоненты смеси в зависимости от ее концентрации и толщины канала. Проведено сравнение с данными, имеющимися в открытой печати.

Литература

1. Латышев А. В. Введение в кейсологию. Москва: Отдел теоретических проблем РАН, 1996. 237 с.
2. Подрыга В. О., Поляков С. В. Параллельная реализация многомасштабного подхода для расчета микротечений газа // Вычислительные методы и программирование. 2016. Т. 17, № 2. С. 147-165.
3. Siewert C. E., Valougeorgis D. The McCormack model: channel flow of a binary gas mixture driven by temperature, pressure and density gradients // European Journal of Mechanics B/Fluids. 2004. Vol. 23. P. 645-664.

MSC 93A30

Mathematical modeling of the diffusion process of a light component of a binary gas

V.N. Popov, O.V. Germider

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov

Abstract: Abstract. A kinetic approach is used to solve the problem of diffusion of a light component of a binary mixture in a channel with infinite parallel walls. It is assumed that the mass of molecules of the light component and their concentration are significantly less than the mass of molecules and the concentration of heavy components. The change in the state of the light gas component is described based on the Bhatnagar, Gross, and Krook model of the kinetic Boltzmann equation. The diffuse reflection model is used as a boundary condition on the channel walls. The consumption of the light component per unit channel width is calculated. A comparison is made with similar results presented in open sources.

Keywords: binary mixtures, kinetic Boltzmann equation, model kinetic equations, models of boundary conditions.

References

1. Latyshev A. V. Vvedenie v keisologiyu [Introduction to Caseology]. Moscow: Otdel teoreticheskikh problem RAN [Department of Theoretical Problems RAS], 1996. 237 p. (in Russian)
2. Podryga V. O., Polyakov S. V. Parallelnaya realizatsiya mnogomasshtabnogo podkhoda dlya rascheta mikrotechenii gaza [Parallel implementation of multiscale approach for gas microflow calculations] // Vychislitelnye metody i programmirovaniye [Numerical Methods and Programming]. 2016. Vol. 17, no. 2. P. 147-165. (in Russian)
3. Siewert C. E., Valougeorgis D. The McCormack model: channel flow of a binary gas mixture driven by temperature, pressure and density gradients // European Journal of Mechanics B/Fluids. 2004. Vol. 23. P. 645-664.

УДК 519.63

О численно-аналитическом методе решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды в n -мерной сетеподобной области

Провоторов В.В.¹, Рыбаков М.А.²

Воронежский государственный университет¹,
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина²

Аннотация: В работе предложен численно-аналитический метод решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды в n -мерных сетеподобных областях. Такие задачи возникают в моделях трубопроводных систем, энергосетей, строительных конструкций и др. Метод использует конечно-разностную аппроксимацию производных по всем переменным, кроме одной. Полученная такой аппроксимацией краевая задача для линейной дифференциально-разностной системы решается символьным методом. Разработанный подход позволяет получать приближенные решения в аналитической форме, что существенно расширяет возможности приложений в различных технических задачах.

Ключевые слова: сетеподобная область, начально-краевая задача, уравнение переноса сплошной среды, дифференциально-разностная система.

Пусть задан сетеподобный носитель Γ в пространстве R^n (примеры таких множеств $\Gamma \subset R^n$ см. в [1]). Обозначим совокупность его внешних узлов через $\partial\Gamma$, а количество внутренних узлов через m_b . Произвольный i -ый внутренний узел имеет один входящий и k_i выходящих каналов. Пусть S_{il} – сечение (подмножество гиперплоскости) выходящего l -го канала из внутреннего i -го узла, $l = \overline{1, k_i}$, $i = \overline{1, m_b}$.

Соответственно, $S_i = \bigcup_{l=1}^{k_i} S_{il}$ – это сечение входящего канала i -го узла. Будем писать S_{il}^+ , когда рассматриваем это множество как принадлежащее выходящему каналу, и S_{il}^- – как принадлежащее входящему каналу.

Пусть заданы числа a_j, b_j, c_j , $j = \overline{1, n}$, и функции $\phi(x)$, $f(x, t)$, $x \in \Gamma$, $t \in (0, T]$. В области $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T] \subset R^{n+1}$ рассмотрим уравнение переноса сплошной среды – уравнение параболического типа относительно искомой функции $u(x, t)$, $x \in \Gamma$, $t \in (0, T]$:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \left(a_j \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} + b_j \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} + c_j u(x, t) \right) + f(x, t), \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, t)|_{t=0} = \phi(x), \quad (2)$$

и краевым условием

$$u(x, t)|_{x \in \partial\Gamma} = 0. \quad (3)$$

В любом внутреннем i -м узле для каждого выходящего из него l -го канала полагаем, что должны выполняться условия согласования:

$$u(x, t)|_{x \in S_{il}^-} = \nu_{il} u(x, t)|_{x \in S_{il}^+}, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right|_{x \in S_{il}^-} = \mu_{ij} \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right|_{x \in S_{il}^+}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, k_i}, \quad (5)$$

где числа $\nu_{il} > 0$, $\mu_{ij} > 0$ заданы, причем $\sum_{l=1}^{k_i} \nu_{il} = 1$, если размерность сетевого носителя $n > 1$, и $\nu_{il} = 1$ при $n = 1$. Относительно начальной функции предполагаем, что $u_0(x, t) \equiv \phi(t)$ удовлетворяет требованиям (2) и (4).

Предлагаемый метод решения задачи (1)–(4) продемонстрируем на примере конкретной задачи. Пусть сетеподобный носитель $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ в R^2 содержит два канала: входящий $\Gamma_1 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [0, \pi]$ и выходящий $\Gamma_2 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [0, \pi]$, примыкающие к единственному внутреннему узлу, имеющему сечение $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times [0, \pi]$ (рис. 1).

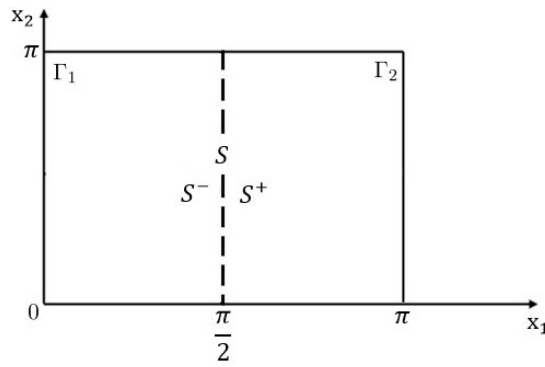


Рис. 1. Сетеподобный носитель Γ в R^2

Для такого сетевого носителя Γ относительно неизвестной функции $u(x_1, x_2, t)$ аргументов $(x_1, x_2) \in \Gamma$, $t \in (0, 1)$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}, \quad (6)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = \sin(x_1) \sin(x_2), \quad (7)$$

$$u(0, x_2, t) = u(\pi, x_2, t) = u(x_1, 0, t) = u(x_1, \pi, t) = 0. \quad (8)$$

Во внутреннем узле будем требовать выполнения следующих условий согласования:

$$u\left(\frac{\pi}{2} - 0, x_2, t\right) = u\left(\frac{\pi}{2} + 0, x_2, t\right), \quad \left. \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \right|_{x_1=\pi/2-0} = \left. \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \right|_{x_1=\pi/2+0}. \quad (9)$$

Для нахождения решения задачи (5)–(8) определим её приближение – дифференциально-разностную систему.

Выберем величины шагов по t и x_2 равными, соответственно, $\tau = \frac{1}{10}$ и $h = \frac{\pi}{4}$. Тогда узлы аппроксимации будут иметь координаты

$$t_k = \tau k = \frac{k}{10}, \quad k = \overline{0, 10}, \quad x_{2_l} = hl = \frac{\pi l}{4}, \quad l = \overline{0, 4}.$$

При любых $k = \overline{0, 10}$, $l = \overline{0, 4}$ определим функции $u_{kl}(x_1) = u(x_1, x_{2_l}, t_k)$ аргумента $x_1 \in [0, \pi]$. Аппроксимируем производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x_1, x_{2_l}, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_k} &\approx \frac{1}{\tau} (u(x_1, x_{2_l}, t_k) - u(x_1, x_{2_l}, t_{k-1})) = \frac{1}{\tau} (u_{kl}(x_1) - u_{k-1l}(x_1)), \\ \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t_k)}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=x_{2_l}} &\approx \frac{1}{h^2} (u(x_1, x_{2_{l-1}}, t_{k-1}) - 2u(x_1, x_{2_l}, t_{k-1}) + u(x_1, x_{2_{l+1}}, t_{k-1})) = \\ &= \frac{1}{h^2} (u_{k-1l-1}(x_1) - 2u_{k-1l}(x_1) + u_{k-1l+1}(x_1)).\end{aligned}\quad (10)$$

Таким образом, относительно неизвестных функций $u_{k,l}(x_1)$ аргумента $x_1 \in (0, \pi)$ получим систему дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau} (u_{kl}(x_1) - u_{k-1l}(x_1)) = u''_{k,l}(x_1) + \frac{1}{h^2} (u_{k-1l-1}(x_1) - 2u_{k-1l}(x_1) + u_{k-1l+1}(x_1)), \\ u_{0l}(x_1) = \sin(x_1) \sin(x_{2_l}), \\ u_{k0}(x_1) = u_{k4}(x_1) = 0, \end{cases}\quad (11)$$

где $k = \overline{0, 10}$, $l = \overline{0, 4}$. Краевые условия (7) для этой системы принимают вид

$$u_{kl}(0) = u_{kl}(\pi) = 0, \quad k = \overline{0, 10}, \quad l = \overline{0, 4},\quad (12)$$

а условия согласования (8) – вид

$$u_{kl}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = u_{kl}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right), \quad \frac{du_{kl}(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=\pi/2-0} = \frac{du_{kl}(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=\pi/2+0}, \quad k = \overline{0, 10}, \quad l = \overline{0, 4}.\quad (13)$$

Для решения задачи (9)–(11) использовался численно-аналитический алгоритм, разработанный в [2]. Результатом работы алгоритма стало аналитическое представление при каждом $k = \overline{0, 10}$, $l = \overline{0, 4}$ функции $u_{kl}(x_1)$ – решения задачи (9)–(11), и соответственно, приближенного решения $u(x_1, x_2, t)$ исходной начально-краевой задачи (5)–(8) при значениях аргументов $t = t_k$, $x_2 = x_{2_l}$.

Приведем результаты вычислений для каждого канала Γ_1 и Γ_2 сетевого носителя Γ при $k = 1$, $l = \overline{0, 4}$ и сравним полученное аналитическое представление функций $u_{kl}(x_1)$ с «точным» решением $u(x_1, x_{2_l}, t_k)$ при округлении значений числовых параметров до десятых. Отметим, что «точным» решением задачи (5)–(8) на всем $\Gamma \times (0, 1]$ является функция

$$u(x_1, x_2, t) = \sin(x_1) \sin(x_2) e^{-2t}.$$

В случае $x \in \Gamma_1$, т.е. при $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ имеем следующие значения. Если $k = 1$, $l = 0$, то $u_{10}(x_1) = 0$, и для точного решения выполнено $u(x_1, 0, 0.1) = 0$. Если $k = 1$, $l = 1$, то $u_{1,1}(x_1) = 0.6 \cdot \sin(x_1)$, и $u\left(x_1, \frac{\pi}{4}, 0.1\right) = 0.6 \cdot \sin(x_1)$. При остальных k, l также получаем совпадение приближенного решения с точным (после округления параметров до десятых): $u_{12}(x_1) = u\left(x_1, \frac{\pi}{2}, 0.1\right) = 0.8 \cdot \sin(x_1)$, $u_{13}(x_1) = u\left(x_1, \frac{3\pi}{4}, 0.1\right) = 0.6 \cdot \sin(x_1)$, и наконец, $u_{14}(x_1) = u(x_1, \pi, 0.1) = 0$.

В случае $x \in \Gamma_2$, т.е. при $x_1 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ также получено совпадение приближенного решения с точным (после округления параметров до десятых) при $k = 1$ и всех $l = \overline{0, 4}$: $u_{10}(x_1) = u(x_1, 0, 0.1) = 0$, $u_{1,1}(x_1) = u\left(x_1, \frac{\pi}{4}, 0.1\right) = 0.6 \cdot \sin(x_1)$, $u_{12}(x_1) = u\left(x_1, \frac{\pi}{2}, 0.1\right) = 0.8 \cdot \sin(x_1)$, $u_{13}(x_1) = u\left(x_1, \frac{3\pi}{4}, 0.1\right) = 0.6 \cdot \sin(x_1)$, $u_{14}(x_1) = u(x_1, \pi, 0.1) = 0$.

Таким образом, полученное аналитическое представление приближенного решения имеет такой же вид, как и точное решение, а погрешность определения параметров в этом представлении не превышает 0.05.

Аналогичные результаты получены для функций $u_{kl}(x_1)$ при остальных значениях k .

Литература

1. Провоторов В. В., Провоторова Е. Н. Оптимальное управление линеаризованной системой Навье-Стокса в сетеподобной области // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13, № 4. С. 431-443.
2. Рыбаков М. А. Решение задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2023. Т. 11, вып. 4. URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1451>

MSC 65M22

Numerical-Analytical Treatment of Initial-Boundary Value Problems for Continuum Transport Equations in n -Dimensional Network-Structured Domains

V.V. Provotorov¹, M.A. Rybakov²

Voronezh State University¹, Derzhavin Tambov State University²

Abstract: The paper proposes a numerical-analytical method for solving the initial-boundary value problem for the transport equation of a continuous medium in n -dimensional network-like domains. Such problems arise in models of pipeline systems, power grids, building structures, etc. The method uses a finite-differential approximation of derivatives with respect to all variables except one. The boundary value problem for a linear differential-difference system obtained by such an approximation is solved by a symbolic method. The developed approach allows one to obtain approximate solutions in analytical form, which significantly expands the possibilities of applications in various engineering problems.

Keywords: network-like domain, initial-boundary value problem, continuous medium transport equation, differential-difference system.

References

1. Provotorov V. V., Provotorova E. N. Optimalnoe upravlenie linearizovannoi sistemoi Nav'e-Stoksa v setepodobnoi oblasti [Optimal control of linearized Navier-Stokes system in network-like domain] // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya [Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes]. 2017. Vol. 13, no. 4. P. 431-443. (in Russian)
2. Rybakov M. A. Reshenie zadachi perenosa sploshnoi sredy po setevomu nositeyu v simvolnom vide [Symbolic solution of continuum media transport problem through network medium] // Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii [Modeling, Optimization and Information Technology]. 2023. Vol. 11, iss. 4. URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1451> (in Russian)

УДК 517.925:612.8

Алгоритм исследования динамики сердечно-сосудистых заболеваний

Сайфетдинов С.Ф., Мамедова Т.Ф.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В данной работе представлен алгоритм исследования развития динамики сердечно-сосудистых заболеваний на основе метода Е.В. Воскресенского. Разработано программное обеспечение на языке Python, которое автоматизирует этот алгоритм. Представлена графическая интерпретация полученных результатов.

Ключевые слова: разделенные разности, метод Рунге-Кутты, python, конус решений, метод Е.В. Воскресенского.

1. Введение

Своевременная и точная диагностика сердечно-сосудистых заболеваний является важной задачей современной медицины. Традиционные статистические методы обработки данных, полученных из электрокардиографии, ультразвуковых исследований и лабораторных анализов, не позволяют выявлять заболевания на ранних этапах, тратят значительные временные ресурсы и могут быть субъективны. В этой работе представлен новый метод обработки больших объемов статистической информации предложенный Е.В.Воскресенским. Этот метод разработан на основе теории дифференциальных включений и теории сравнения. Здесь точность результата прогнозирования повышается за счет построения интегральной воронки (конуса) всех возможных решений [1, 2]. Кратко алгоритм этого метода состоит в следующем. По имеющимся статистическим данным, определяющим параметры исследуемого процесса, строится специального вида таблица. Далее по данным этой таблицы определяются значения скоростей изменения параметров процесса, то есть разделенные разности и заносятся в следующую новую таблицу. Затем составляется следующая таблица, в которую заносятся статистические данные последнего года, и минимумы и максимумы разделенных разностей из предыдущей таблицы. По точкам из последней таблицы методом наименьших квадратов строятся вспомогательные функции $\psi(t)$ и $\phi(z)$. Эти функции используются для построения новой функции $\lambda = \lambda(t, z)$, которая является правой частью двух скалярных дифференциальных уравнений $\frac{dz}{dt} = \lambda(t, z)$ и $\frac{dt}{dz} = -\lambda(t, z)$. Траектории решений этих дифференциальных уравнений, найденные методом Рунге-Кутты, образуют границы интегральной воронки или конуса всех возможных тенденций исследуемого процесса.

2. Задача

Реализовать алгоритм метода Е.В.Воскресенского для оценки динамики сердечно-сосудистых заболеваний в Российской Федерации и сформировать прогноз на ближайшие годы.

3. Результат

Статистические данные о количестве случаев заболеваний были получены из федеральной службы государственной статистики [3]. Данные включают ежегодные показатели по всем регионам страны.

Таблица 1: Статистические данные по случаям заболеваний

Год	Янв	Фев	Мар	Апр	Май	Июн	Июл	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек
2015	39408	35330	38721	36075	36500	34644	34192	34009	33227	35345	33860	35290
2016	40125	33986	35353	33807	35783	34518	34014	34050	33251	34822	33686	37102
2017	39563	32800	33967	33003	34072	32719	32962	32143	31788	33998	31438	33511
2018	35639	31692	37722	35460	34174	33451	32967	31962	31499	32919	31402	33326
2019	37164	32670	34314	32155	33533	31583	31915	31618	31691	32865	31433	33327
2020	33553	30694	32285	31780	36111	35101	36771	33683	34543	44975	47627	48545
2021	39478	30211	31367	28899	30352	33394	38712	37004	36153	47194	42939	36932
2022	39877	40418	36918	29159	30139	27955	27834	29105	30940	30814	29077	34783

Для последовательности значений вычисляются разделенные разности по формуле: $\Delta d_i = |d_i - d_{i-1}|$.

Следующим шагом находим полиномы для $\psi(t)$ и $\phi(z)$. Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов. Для $\psi(t)$ оптимальная степень $m = 3$ с коэффициентами $a_0 = 2449.903$, $a_1 = -88.311$, $a_2 = 2.480$, $a_3 = -0.016$. А для $\phi(z)$: $m = 0$ и $a_0 = 2331.322$.

Теперь мы можем определить и найти $\lambda(t, z) : \lambda_{i,j} = \min(\psi(t_j), \phi(z_i))$. С помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка находим решения дифференциальных уравнений правыми частями которых являются функции $\lambda(t, z)$.

Полученный результат представлены на рис. 1.

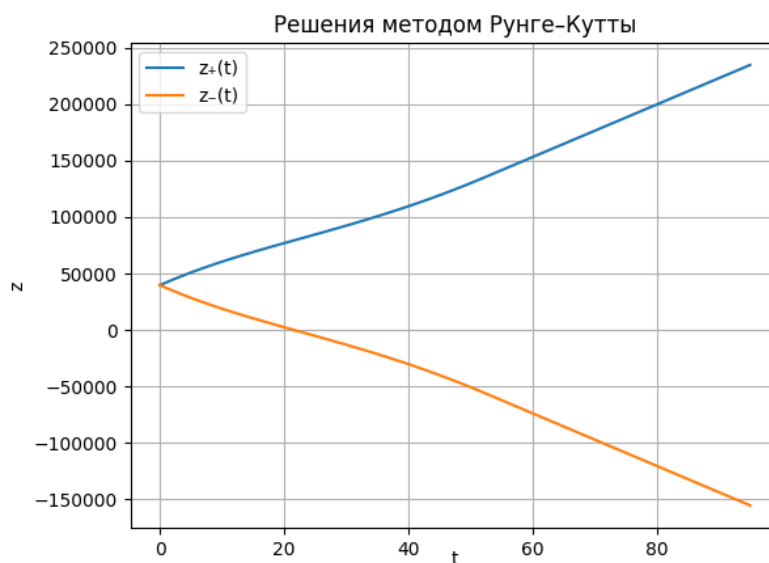


Рис. 1. График конуса решений

Построенная интегральная воронка или конус всех возможных решений включает в себя все ранее полученные значения и указывает границы отклонения прогнозных значений. Дальнейшие работы будут направлены на исследования возможности управления динамикой процесса развития сердечно-сосудистых заболеваний этим методом.

Литература

1. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО, 2000. 300 с.
2. Воскресенский Е. В. Метод сравнения в нелинейном анализе // Сибирский математический журнал. 1991. Т. 5. С. 2-11.
3. Федеральная служба государственной статистики: официальный сайт. URL: <https://rosstat.gov.ru/> (дата обращения: 01.01.2024).

MSC 97M60

Algorithm for investigating the dynamics of cardiovascular diseases

S.F. Saifetdinov, T.F. Mamedova

National Research Mordovia State University

Abstract: In this paper, presents an algorithm for studying the development of the dynamics of cardiovascular diseases based on the method of E.V. Voskresensky. Python software has been developed that automates this algorithm. A graphical interpretation of the obtained results is presented.

Keywords: separated differences, Runge-Kutta method, python, cone of solutions, method of E.V. Voskresensky.

References

1. Voskresenskii E. V. Asimptoticheskie metody: teoriya i prilozheniya [Asymptotic Methods: Theory and Applications]. Saransk: SVMO, 2000. 300 p. (in Russian)
2. Voskresenskii E. V. Metod sravneniya v nelineinom analize [Comparison Method in Nonlinear Analysis] // Sibirskii matematicheskii zhurnal [Siberian Mathematical Journal]. 1991. Vol. 5. P. 2-11. (in Russian)
3. Federalnaya sluzhba gosudarstvennoi statistiki: ofitsialnyi sait [Federal State Statistics Service: official website]. URL: <https://rosstat.gov.ru/> (accessed: 01.01.2024). (in Russian)

УДК 517.63

SU(2)-расширения квазипериодических потоков

Сахаров А.Н.

Нижегородский государственный аграрно-технологический
университет им. Л.Я. Флорентьева

Аннотация: В докладе рассматривается структура системы на многомерном торе, получающаяся в результате приведения к треугольному виду линейной системы 2-го порядка с комплексными квазипериодическими коэффициентами. Описание этой структуры позволяет сформулировать необходимые и достаточные условия структурной устойчивости исходной линейной системы. Эти условия определяются свойствами топологического инварианта потока на торе – вектором вращения.

Ключевые слова: линейные расширения потоков на торе, групповые расширения, вектор вращения.

1. Проективное расширение линейной системы

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ – угловые координаты на торе $\mathbb{T}^m$, а матрица $A(\varphi)$ – непрерывная функция на торе. Тогда система

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad x \in \mathbb{C}^2 \quad (1)$$

определяет поток на $\mathbb{T}^m \times \mathbb{C}^2$, который называется линейным расширением потока на торе. Если компонентны вектора ω рационально независимы, то поток на торе квазипериодический. Будем считать, что $\text{tr} A(\varphi) = 0$, так что

$$A(\varphi) = a(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Переходя в системе (1) к аффинным координатам $z = \frac{x_1}{x_2}$, получаем уравнение Рикати с квазипериодическими коэффициентами

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{z} = 2c(\varphi)z - (b(\varphi) + a(\varphi))z^2 + b(\varphi) - a(\varphi). \quad (2)$$

Это уравнение определяет *проективный поток*, индуцированный линейной системой (1).

Отображение $z \rightarrow 2c(\varphi)z - (b(\varphi) + a(\varphi))z^2 + b(\varphi) - a(\varphi)$ является конформным отображением при фиксированном φ . Замена $w = \frac{1}{z}$ переводит уравнение (1) в уравнение $\dot{w} = -2c(\varphi)w - (b(\varphi) - a(\varphi))w^2 + b(\varphi) + a(\varphi)$, которое регулярно в ∞ . Любое конформное отображение сферы Римана является преобразованием Мёбиуса. Таким образом, фазовое пространство проективного потока – расслоение $\mathbb{T}^m \times S^2$, причем поток действует на слоях дробно-линейными преобразованиями. Круговое свойство этих преобразований позволяет установить следующий результат [1].

Теорема 1. *Проективный поток имеет либо одно, либо два минимальных множества, либо фазовое пространство является дизъюнктивным объединением гомеоморфных друг другу минимальных множеств.*

Если проективный поток имеет инвариантный тор, то дальнейшее его исследование сводится к изучению структуры потока на инвариантном торе, который имеет топологический инвариант – число вращения слоя [2]. В общем случае существование такого инварианта можно доказать с помощью следующей конструкции.

2. $SU(2)$ -расширение системы

Преобразуем систему (1) к треугольному виду с помощью группового расширения. Подробно алгоритм приведения линейной системы к треугольному виду описан в [3]. Здесь в качестве группы расширения естественно выбрать компактную группу унитарных унимодулярных матриц 2-го порядка $SU(2)$. После замены $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$, где $U \in SU(2)$, получаем уравнение

$$U^* \dot{U} = U^* A(\varphi) U - T(\varphi, U),$$

где $T(\varphi, U)$ – верхнетреугольная матрица с вещественной диагональю. Если

$$a(\varphi) = a_r(\varphi) + ia_i(\varphi),$$

$$b(\varphi) = b_r(\varphi) + ib_i(\varphi),$$

$$c(\varphi) = c_r(\varphi) + ia_i(\varphi),$$

то эрмитова и антиэрмитова части $A(\varphi)$ имеют вид

$$S(\varphi) = ia_i(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_r(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_r(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R(\varphi) = a_r(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + ib_i(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + ic_i(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда U является решением системы

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad U^* \dot{U} = U^* R(\varphi) U + P^*(\varphi, U) - P(\varphi, U), \quad (3)$$

где $P(\varphi, U)$ – верхнетреугольная матрица с чисто мнимой диагональю.

Система (3) определяет поток на $\mathbb{T}^m \times SU(2)$. Сужение этого потока на $\mathbb{T}^m \times S^2$ – проективный поток, индуцируемый (1). Запишем уравнения, определяющий этот поток в сферических координатах. Матрица $U \in SU(2)$ в этих координатах имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{i\frac{\theta_1}{2}} & i \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i\frac{\theta_1}{2}} \\ i \sin \frac{\theta_2}{2} e^{-i\frac{\theta_1}{2}} & \cos \frac{\theta_2}{2} e^{-i\frac{\theta_1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Пусть эрмитова часть матрицы $A(\varphi)$ диагональна. Эрмитова матрица подобна вещественной диагональной с помощью унитарного преобразования [4, § 13, теорема 7].

$$S(\varphi) = c_r(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3) преобразуется в систему на торе $\mathbb{T}^{m+2}$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\theta}_1 = 2c_i(\varphi), \\ \dot{\theta}_2 = 2b_i(\varphi) \cos(\theta_1) + 2a_r(\varphi) \sin \theta_1 - 2c_r(\varphi) \sin \theta_2. \end{cases} \quad (4)$$

Если матрица $A(\varphi)$ вещественная, то есть $c_i(\varphi) \equiv 0$, то система (4) сводится к частному случаю (2) при $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$. Для произвольной матрицы $A(\varphi)$ также получим систему на торе $\mathbb{T}^{m+2}$.

Итак, анализ структуры системы (1) сводится к изучению ее проективного расширения. Дифференциальные уравнения, определяющие проективное расширение, задают неособое векторное поле на торе $\mathbb{T}^{m+2}$.

Теорема 2. Поток, определяемый системой (4) имеет вектор вращения слоя $\rho = (\rho_1, \rho_2)$.

Доказательство аналогично доказательству существованию вектора вращения для систем на торе $\mathbb{T}^{m+2}$, приведенное в [3].

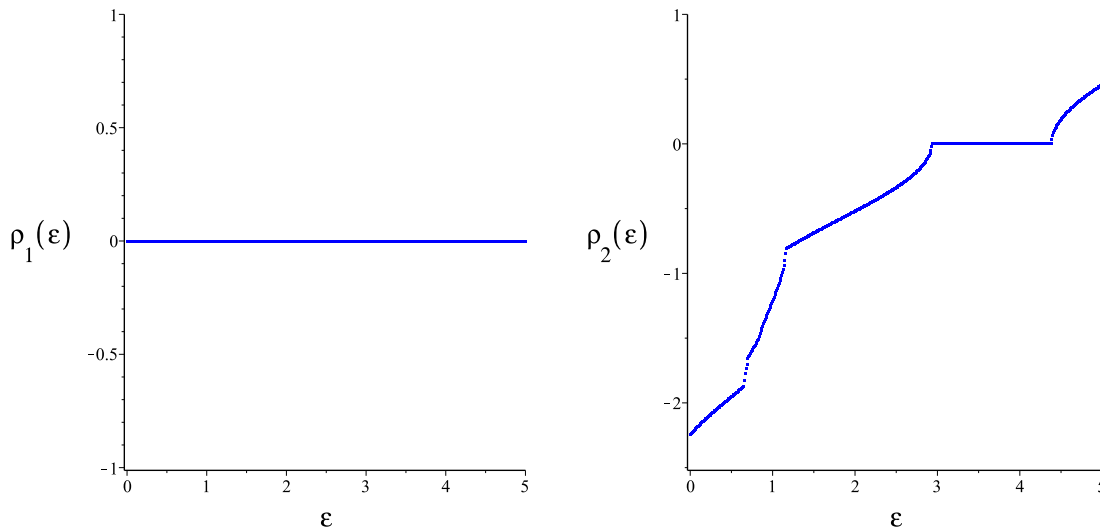


Рис. 1. Вектор вращения слоя системы вида (4) с параметром ϵ в 3-ем уравнении.

На графике зависимости ρ_2 от параметра наблюдаются ступеньки – интервалы постоянства. Это возможно только в случае, когда вектор (ω, ρ_2) резонансный. Достаточно простые рассуждения приводят к справедливости следующего утверждения в предположении, что вектор ω , определяющий поток на базе расслоения $\mathbb{T}^m \times \mathbb{T}^2$ фиксирован.

Теорема 3. Система (4) равномерно гиперболична тогда и только тогда, когда ρ_2 принадлежит интервалу постоянства.

В заключение заметим, что имеется пример К. Палмера [5] равномерно гиперболической системы вида (1), которая не приводима к диагональному виду никаким квазипериодическим преобразованием. Представление уравнений проективного потока в сферических координатах, возможно, прояснит причину этого явления.

Литература

1. Коломиец М. Л., Сахаров А. Н. Классификация проективных расширений квазипериодических потоков // Труды VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». Нижний Новгород, 2008. Т. 1. С. 295-299.
2. Веременюк В. В. Существование числа вращения уравнения $\dot{x} = \lambda(t, x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 6. С. 1073-1076.
3. Сахаров А. Н. Множества вращения $SO(3)$ -расширений квазипериодических потоков // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 2. С. 171-184. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.171-184.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 367 с.
5. Palmer K. On the Reducibility of Almost Periodic Systems of Linear Differential Equations // Journal of Differential Equations. 1980. Vol. 36. P. 374-390.

MSC 34D20

SU(2) extensions of quasiperiodic flows

A.N. Sakharov

Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University
named after L.Ya. Florentyev

Abstract: The report examines the structure of a system on a multidimensional torus, obtained as a result of reducing a second-order linear system with complex quasiperiodic coefficients to a triangular form. The description of this structure allows us to formulate necessary and sufficient conditions for the structural stability of the original linear system. These conditions are determined by the properties of the topological invariant of the flow on the torus – the rotation vector.

Keywords: linear extensions of flows on a torus, group extensions, rotation vector.

References

1. Kolomiets M. L., Sakharov A. N. Klassifikatsiya proektivnykh rasshirenii kvaziperiodicheskikh potokov [Classification of projective extensions of quasiperiodic flows] // Trudy VII Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii "Nelineinyye kolebaniya mekhanicheskikh sistem"[Proceedings of the VII All-Russian Scientific Conference "Nonlinear Oscillations of Mechanical Systems"]. Nizhny Novgorod, 2008. Vol. 1. P. 295-299. (in Russian)
2. Veremenyuk V. V. Sushchestvovanie chisla vrashcheniya uravneniya $\dot{x} = \lambda(t, x)$ s periodicheskoi po x i pochti periodicheskoi po t pravoi chast'yu [Existence of rotation number for the equation $\dot{x} = \lambda(t, x)$ with x -periodic and t -almost periodic right-hand side] // Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]. 1991. Vol. 27, no. 6. P. 1073-1076. (in Russian)
3. Sakharov A. N. Mnozhestva vrashcheniya SO(3)-rasshirenii kvaziperiodicheskikh potokov [Rotation sets of SO(3)-extensions of quasiperiodic flows] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2025. Vol. 27, no. 2. P. 171-184. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.171-184. (in Russian)
4. Bellman R. Vvedenie v teoriyu matrits [Introduction to Matrix Theory]. Moscow: Nauka, 1969. 367 p. (in Russian)
5. Palmer K. On the Reducibility of Almost Periodic Systems of Linear Differential Equations // Journal of Differential Equations. 1980. Vol. 36. P. 374-390.

УДК 519.63

Многомерный оператор градиента высокого порядка в гидродинамике сглаженных частиц*

Стояновская О.П.

Институт гидродинамики им.М.А.Лаврентьева СО РАН

Аннотация: В работе проведено обобщение дискретного оператора дифференцирования для гидродинамики сглаженных частиц, который в одномерном случае в паре с ядрами высокого порядка образует Т-устойчивый метод, на пространство любой размерности. В вычислительных экспериментах показано, что проектируемый четвертый порядок аппроксимации градиента достигается на практике.

Ключевые слова: гидродинамика сглаженных частиц, Т-устойчивость, ядра высокого порядка, полиномы Вендланда

Гидродинамика сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) представляет собой метод аппроксимации уравнений в частных производных на подвижных нерегулярно расположенных в пространстве узлах [1]. Эта аппроксимация выполняется с использованием гладкой финитной функции – ядра, носитель которого охватывает несколько частиц. Классические ядра представляют собой положительные монотонно убывающие функции радиального базиса, и как правило, являются полиномами. Для SPH известна проблема неустойчивости коротких волн (tensile instability). Это вид счетной неустойчивости, которая определяется способом пространственной аппроксимации (видом дискретных дифференциальных операторов и формой ядра) и реализуется при любом, в том числе точном интегрировании по времени [2]. Необходимое условие отсутствия такой неустойчивости в SPH формулируется в терминах знакоопределенности интегрального преобразования от ядра. Конкретный вид этого преобразования определяется формой дискретного дифференциального оператора (может быть преобразованием Фурье от самого ядра или от выражений, зависящих от ядра). Для классического способа аппроксимации дифференциальных операторов (применение дифференцирования к гладкому ядру) необходимым условием устойчивости является неотрицательность Фурье-образа ядра. Известен способ построения полиномов любой гладкости, Фурье-образ которых гарантированно положителен (например, полиномы Вендланда). Методы, для которых выполняется необходимое условие устойчивости, называются Т-устойчивыми.

Известно, что классические ядра позволяют аппроксимировать произвольную функцию не более чем со вторым порядком аппроксимации по радиусу ядра. Одна из идей для конструирования методов высокого порядка на основе SPH – использование знакопеременных немонотонных ядер, полученных по известному алгоритму на базе классических. Ранее было установлено, что если взять метод решения уравнений невязкой газовой динамики (пара: классическая схема и классическое ядро), который является Т-устойчивым, а затем заменить в этой паре классическое ядро на ядро высокого порядка, то получившийся в результате метод потеряет Т-устойчивость. Кроме того, был найден конкретный вид дискретного оператора дифференцирования в одномерном случае, который в паре с ядрами высокого порядка образует Т-устойчивый метод. Этот оператор представляет собой комбинацию

*Исследование проведено за счет гранта Российского научного 23-11-00142.

конечно-разностного подхода и SPH. В настоящей работе эта комбинация впервые обобщена на многомерный случай. В вычислительных экспериментах показано, что проектируемый четвертый порядок аппроксимации достигается на практике.

Литература

1. Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics // Reports on Progress in Physics. 2005. Vol. 68. DOI: 10.1088/0034-4885/68/8/R01.
2. Dehnen W., Aly H. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. Vol. 425. P. 1068-1082. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x.

MSC 76M28

High-order multidimensional gradient operator in smoothed particle hydrodynamics

O.P. Stoyanovskaya

Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS

Abstract: The paper generalizes the discrete differentiation operator for smoothed particle hydrodynamics, which in the one-dimensional case together with high-order kernels forms a T-stable method, to a space of any dimension. Computational experiments show that the projected 4th order of gradient approximation is achieved in practice.

Keywords: smoothed particle hydrodynamics, T-stability, high-order kernels, Wendland polynomials

References

1. Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics // Reports on Progress in Physics. 2005. Vol. 68. DOI: 10.1088/0034-4885/68/8/R01.
2. Dehnen W., Aly H. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. Vol. 425. P. 1068-1082. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x.

УДК 519.63:533.6.011

Исследование математических моделей системы измерения давления в газожидкостных средах

Тамарова Ю.А.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: Рассматриваются математические модели системы измерения давления в газожидкостных средах, включающие в себя трубопровод и датчик давления. На основе таких моделей исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Движение рабочей среды описывается как линейной, так и нелинейной моделью механики жидкости и газа. Для исследования рассматриваемых моделей предложен численно-аналитический метод решения на основе метода Галеркина. С помощью разработанных программ в системе Mathematica 12.0 проведен численный эксперимент, позволяющий провести сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей системы измерения давления.

Ключевые слова: система измерения давления, датчик давления, трубопровод, камера сгорания, динамика, дифференциальные уравнения, метод Галеркина.

1. Нелинейная модель системы измерения давления

Математическое описание нелинейной модели механической системы измерения давления рабочей среды в камере сгорания двигателя, представленной в работах [1, 2], содержит следующие уравнения и условия:

— нелинейное уравнение, описывающее движение сжимаемой рабочей среды (в модели идеального газа) в трубопроводе

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x \Phi_{xt} + \Phi_x^2 \Phi_{xx} = \left[a_0^2 - (\chi - 1) \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right] \Phi_{xx}, \quad x \in (0, l_*), \quad (1)$$

— условие, задающее закон изменения давления рабочей среды в камере сгорания (на входе в трубопровод при $x = 0$)

$$P(0, t) = P_0 + P_*(t), \quad (2)$$

— условие непротекания на поверхности поршня, положение которого в каждый момент времени определяется формулой $x = l + w(t)$

$$\Phi_x(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \quad l_* = l + w(t), \quad (3)$$

— уравнение, описывающее движение поршня

$$m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma w(t) = P(l_*(t), t) - P_0 - \bar{P}(t). \quad (4)$$

Давление в потоке определяется формулой Лагранжа-Коши

$$P(x, t) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}}. \quad (5)$$

В (1)-(4) индексы x, t снизу обозначают частные производные по x, t ; точка сверху обозначает производную по t ; $\Phi(x, t)$ – потенциал скорости; $w(t)$ – отклонение поршня от положения равновесия $x = l$; $P(x, t)$ – давление в рабочей газожидкостной среде; P_0 – давление в состоянии покоя; P_* – избыточное давление; $\bar{P}$ – внешнее воздействие (например, давление окружающей среды); a_0 – скорость звука, соответствующая состоянию покоя рабочей среды ($a_0^2 = \frac{\chi P_0}{\rho_0}$, ρ_0 – плотность рабочей среды в состоянии покоя); χ – коэффициент Пуассона; m – масса упругого элемента; α, γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи.

Задачу (1)-(5) необходимо дополнить начальными условиями.

С учетом условия (5) условие (2) запишется в виде

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right)_{x=0} = \psi(t) \equiv \frac{a_0^2}{\chi - 1} \left[1 - \left(1 + \frac{P_*(t)}{P_0} \right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} \right]. \quad (6)$$

После перехода к функциям $u = \Phi_x, v = \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2$ уравнения, соответствующие рассматриваемой математической модели, примут вид [1, 2]

$$v_t + uv_x - [a_0^2 - (\chi - 1)v] u_x = 0, \quad (7)$$

$$v_x - u_t - uu_x = 0, \quad (8)$$

$$v(0, t) = \psi(t), \quad (9)$$

$$u(l_*, t) = \dot{w}(t), \quad l_* = l + w(t), \quad (10)$$

$$m\ddot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} v(l_*, t) \right]^{\frac{\chi}{\chi-1}} - P_0 - \bar{P}(t). \quad (11)$$

С учетом (9), (10), функции $u(x, t), v(x, t)$ ищутся в виде отрезков степенных рядов

$$u(x, t) = \dot{w}(t) + \sum_{n=1}^N u_n(t)(l_* - x)^n, \quad (12)$$

$$v(x, t) = \psi(t) + \sum_{k=1}^N v_k(t)x^k. \quad (13)$$

Согласно методу Галеркина, подставляя (12), (13) в (7), (8) и записывая условия ортогональности полученных невязок к поверочным функциям $\{\theta_n(x)\}$, образующим на $[0, l_*]$ полную систему функций, получим $2N$ уравнений для $(2N+1)$ функции $w(t), u_1(t), \dots, u_N(t), v_1(t), \dots, v_N(t)$. К полученным уравнениям следует добавить уравнение (11). В силу граничных условий (9), (10) в качестве поверочных функций $\theta_n(x)$ выбраны функции

$$\theta_n(x) = x^n(l_* - x), \quad n = 1 \div \infty. \quad (14)$$

Задача решалась при $N = 4$. После подстановки (12), (13) в (7), (8), умножим полученные невязки на $x(l_* - x), x^2(l_* - x), x^3(l_* - x), x^4(l_* - x)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до l_* . Тогда получим восемь нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)$.

Добавим уравнение (11), которое в этом случае будет иметь вид

$$m\ddot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + v_1(t)l_* + v_2(t)l_*^2 + v_3(t)l_*^3 + v_4(t)l_*^4) \right]^{\frac{\chi}{\chi-1}} - P_0 - \bar{P}(t).$$

Также следует задать начальные условия для функций $w(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, $u_4(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$, $v_4(t)$.

Таким образом, будем иметь задачу Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для численного эксперимента.

2. Линейная модель системы измерения давления

Линейная математическая модель, соответствующая рассматриваемой механической системе, для функций $\Phi(x, t)$, $w(t)$, имеет вид

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), \quad (15)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = P_*(t), \quad (16)$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{w}(t), \quad (17)$$

$$m\ddot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w = -\rho_0 \Phi_t(l, t) - \bar{P}. \quad (18)$$

Потенциал скорости $\Phi(x, t)$ представим в виде отрезка ряда по полной на отрезке $[0, l]$ системе функций $g_m(x) = \sin \nu_m x$, удовлетворяющих однородным граничным условиям $g_m(0) = 0$, $g'_m(l) = 0$, соответствующим условиям (16), (17)

$$\Phi(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{m=1}^M \psi_m(t) \sin \nu_m x, \quad \nu_m = \frac{(2m-1)\pi}{2l}. \quad (19)$$

Удовлетворяя условиям (16), (17), находим

$$\dot{a} = -\frac{1}{\rho_0} P_*(t), \quad \dot{b} = \dot{w}(t). \quad (20)$$

После подстановки (19), (20) в (15), (18) получим

$$\sum_{m=1}^M \left[\ddot{\psi}_m(t) + a_0^2 \nu_m^2 \psi_m(t) \right] \sin \nu_m x = \frac{1}{\rho_0} \dot{P}_*(t) - \ddot{w}(t)x, \quad (21)$$

$$P_*(t) - \rho_0 \sum_{m=1}^M \dot{\psi}_m(t) \sin \nu_m l - \rho_0 l \ddot{w}(t) = m\ddot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w + \bar{P}. \quad (22)$$

Записывая условия ортогональности невязки уравнения (21) к базисным функциям $\{\sin \nu_k x\}_{k=\overline{1, M}}$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\psi}_k(t) + a_0^2 \nu_k^2 \psi_k(t) = \frac{2}{l \rho_0 \nu_k} \dot{P}_*(t) - 2 \ddot{w}(t) \frac{\sin \nu_k l}{l \nu_k^2}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (23)$$

Продифференцируем уравнение (22)

$$\dot{P}_*(t) - \rho_0 l \sum_{m=1}^M \ddot{\psi}_m(t) \sin \nu_m l - \rho_0 l \ddot{w}(t) = m\ddot{w} + \alpha\ddot{w} + \gamma\dot{w}. \quad (24)$$

Также следует задать начальные условия для функций $w(t)$, $\psi_k(t)$, $k = \overline{1, M}$.

Таким образом, система обыкновенных дифференциальных уравнений (23), (24) для функций $w(t)$, $\psi_k(t)$, $k = \overline{1, M}$ представляет собой задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента.

3. Численный эксперимент

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда – воздух ($\rho_0 = 1.225$). Другие параметры механической системы: $P_0 = 101325$, $\overline{P} = 0$, $m = 0.01$, $a_0 = 332$, $\chi = 1.5$, $l = 3$, $\alpha = 10^9$ (все значения приведены в системе СИ).

Для линейной модели (15)-(18) численный эксперимент проводился при $M = 10$. Начальные условия заданы в виде: $\psi_k(0) = 0$, $k = \overline{1, 10}$, $w(0) = w'(0) = w''(0) = 0$.

Для нелинейной модели (7)-(11) (при $N = 4$) численный эксперимент проводился при начальных условиях $w(0) = w'(0) = u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = u_4(0) = v_1(0) = 0 = v_2(0) = v_3(0) = v_4(0) = 0$.

На рис. 1, 2 представлены результаты численных расчетов при различном задании параметра γ и избыточного давления $P_*(t)$ ($w(t)$ – в метрах, $P_*(t)$ – в атмосферах). Черной сплошной линией показано отклонение $w(t)$, полученное в линейной модели, а пунктирной линией – в нелинейной модели.

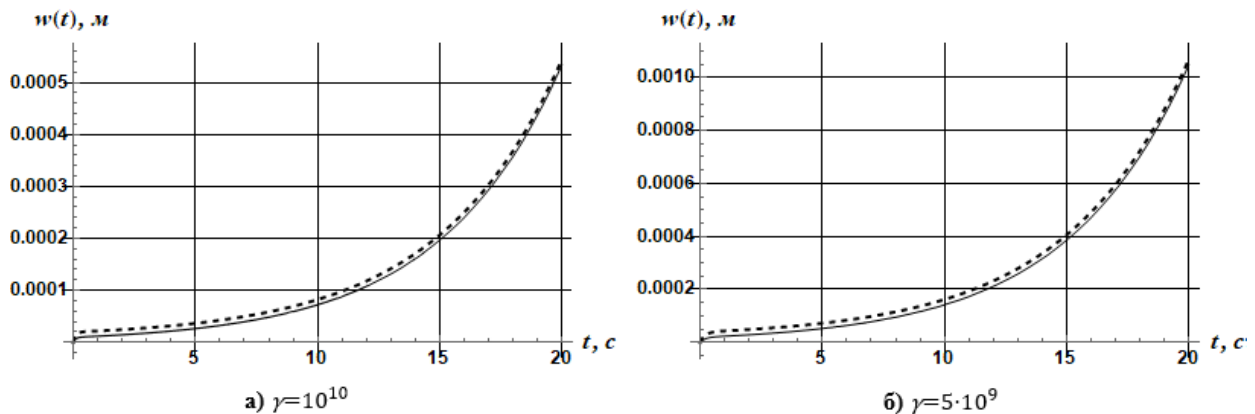


Рис. 1. Результаты численного эксперимента при $P_*(t) = 10^5 \cdot e^{0.2t}$.

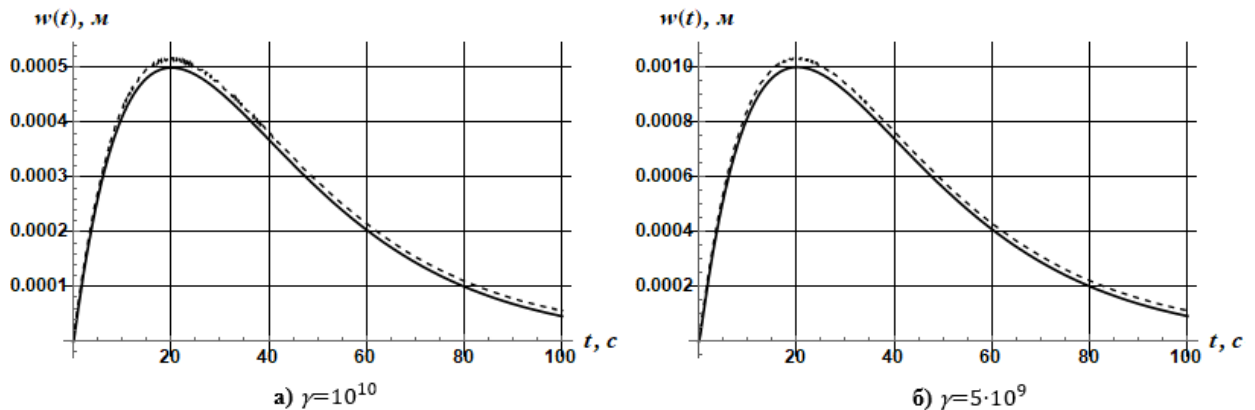


Рис. 2. Результаты численного эксперимента при $P_*(t) = 2.5 \cdot 10^5 \cdot t \cdot e^{(1-0.05t)}$.

Графики на рис. 1 соответствует запуску двигателя, на рис. 2 – запуску и оста-

новке двигателя.

Из рис. 1, 2 видно, что при использовании линейной модели, в отличие от нелинейной, величина перемещения поршня изменяется с наложением колебательного процесса.

Литература

1. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Нелинейная математическая модель систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал СВМО. 2023. Т. 25, № 4. С. 313-325.
2. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Исследование нелинейной математической модели механической системы «трубопровод-датчик давления» // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 24-37.
3. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем: монография. Ульяновск: УлГТУ, 2018. 200 с.
4. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод - датчик давления» // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2024. № 2. С. 1-15. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08.
5. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the "pipeline - pressure sensor" system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1353. P. 1-6.
6. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modelling of the mechanical system "pipeline - pressure sensor" // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2172. Art. 030006.
7. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2021. Vol. 255, no. 5. P. 587-594.

MSC 49K20, 76N15

Research of mathematical models of pressure measurement system in gas-liquid environments

Yu.A. Tamarova

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The mathematical models of the pressure measurement system in gas-liquid environments containing a pipeline and a pressure sensor are considered. Based on such models, the joint dynamics of the sensitive element of the pressure sensor and the working medium in the pipeline are investigated. The motion of the working medium is described by both a linear and a nonlinear model of fluid and gas mechanics. To study the models under consideration, a numerical-analytical solution method based on the Galerkin method is proposed. Using the developed programs in the Mathematica 12.0 system, a numerical experiment was conducted, allowing a comparative analysis of the linear and nonlinear models of the pressure measurement system.

Keywords: pressure measurement system, pressure sensor, pipeline, combustion chamber, dynamics, differential equations, Galerkin method.

References

1. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Nonlinear mathematical model of pressure measurement systems in gas-liquid media // Journal of SVMO. 2023. Vol. 25, no. 4. P. 313-325. (Original Russian version)
2. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Study of nonlinear mathematical model of mechanical system "pipeline-pressure sensor" // University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. 2024. No. 1. P. 24-37. (Original Russian version)
3. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Study of dynamics of deformable elements of some aero-hydroelastic systems: monograph. Ulyanovsk: UlSTU, 2018. 200 p. (Original Russian version)
4. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Mathematical modeling of aeroelastic system "pipeline - pressure sensor" dynamics // PNRPU Mechanics Bulletin. 2024. No. 2. P. 1-15. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08. (Original Russian version)
5. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the "pipeline - pressure sensor" system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1353. Art. 012001. P. 1-6.
6. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modelling of the mechanical system "pipeline - pressure sensor" // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2172. Art. 030006. P. 1-8.
7. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2021. Vol. 255, no. 5. P. 587-594.

УДК 519.63:539.3

Численное исследование зависимости прогиба чувствительного элемента датчика давления от параметров системы

Тамарова Ю.А.

Ульяновский государственный технический университет

Аннотация: Рассматривается механическая система «трубопровод – датчик давления» с прямоугольной формой сечения трубопровода. С помощью программного комплекса исследуется зависимость деформации чувствительного элемента датчика давления от параметров механической системы измерения, а именно, толщины элемента, приложенного усилия, коэффициента Пуассона. Приведены графики зависимостей деформации чувствительного элемента датчика.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, упругий элемент, камера сгорания, деформация, динамика.

1. Постановка задачи

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей модели системы измерения давления в камере сгорания двигателя для трубопровода с сечением S прямоугольной формы [1, 2], содержит следующие уравнения и условия:

– уравнение, описывающее движение рабочей среды (в модели идеального газа) в трубопроводе

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (1)$$

– условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента

$$\varphi_y(x, 0, z, t) = \varphi_y(x, a, z, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad z \in (0, b), \quad (2)$$

$$\varphi_z(x, y, 0, t) = \varphi_z(x, y, b, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a), \quad (3)$$

$$\varphi_x(l, y, z, t) = w_t(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (4)$$

– условие, определяющее закон изменения давления на входе в трубопровод

$$-\rho_0 \varphi_t(0, y, z, t) = P(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \quad (5)$$

– уравнение, описывающее динамику упругого элемента

$$\begin{aligned} L(w(y, z, t)) &\equiv mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + \alpha w_t + \gamma w = \\ &= P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, y, z, t) - P_*, \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } \Delta w = w_{yy} + w_{zz}, \quad \Delta^2 w = w_{yyyy} + 2w_{yyzz} + w_{zzzz}.$$

В (1)-(6) $\varphi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе; $w(y, z, t)$ – деформация упругого элемента (прямоугольной пластины), расположенного в конце трубопровода $x = l$; $P(y, z, t)$ – заданный закон изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод

(на выходе из камеры сгорания) $x = 0$; ρ_0 , P_0 , a_0 – плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; P_* – внешнее воздействие на упругий элемент; $m = \rho_{pl} h_{pl}$ – погонная масса упругого элемента с плотностью ρ_{pl} и толщиной h_{pl} ; $D = \frac{E h_{pl}^3}{12(1 - \nu^2)}$ – изгибная жесткость упругого элемента (E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона); N – сжимающее (растягивающее) элемент усилие; β – коэффициент внутреннего демпфирования; α , γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи; индексы x , y , z , t снизу обозначают частные производные по координатам x , y , z и времени t .

Задача (1)-(6) должна быть дополнена начальными условиями для функций $\varphi(x, y, z, t)$, $w(y, z, t)$, а также граничными условиями для $w(y, z, t)$, соответствующими типу закрепления упругого элемента.

В работе [2] с помощью введения интегральных характеристик основных динамических величин решение задачи (1)-(6) сведено к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего функцию $\theta(t)$ (характеризует деформацию упругого элемента датчика) с функцией $G(t)$ (характеризует закон изменения давления рабочей среды в двигателе)

$$m_0 \left[\ddot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \alpha_0 \left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \gamma_0 \left[\theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] - \rho_0 a_0 w_0 \left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = 2 [G(t) + (P_0 - P_*)S]. \quad (7)$$

В (7)

$$\begin{aligned} G(t) &= \iint_C P(y, z, t) dS, \quad C = \{(y, z) : 0 \leq y \leq a; 0 \leq z \leq b\}, \quad dS = dydz, \\ w(y, z, t) &= \theta(t)g(y, z), \quad m_0 = m \iint_C g(y, z) dS, \\ \alpha_0 &= \alpha \iint_C g(y, z) dS + \beta \iint_C \Delta^2 g(y, z) dS, \\ \gamma_0 &= D \iint_C \Delta^2 g(y, z) dS + N \iint_C \Delta g(y, z) dS + \gamma \iint_C g(y, z) dS, \quad w_0 = \iint_C g(y, z) dS. \end{aligned}$$

Функция $g(y, z)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим жесткому заземлению:

$$g(a, z) = g_y(a, z) = g(y, b) = g_z(y, b) = 0. \quad (8)$$

Введем малый параметр ε , равный отношению длины l (может достигать нескольких метров) к скорости звука a_0 . Тогда из дифференциального уравнения (7) с отклоняющимся аргументом получим приближенное уравнение, которое связывает между собой функции $\theta(t)$ и $G(t)$

$$\begin{aligned} (m_0 + \rho_0 w_0 l) \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\left(m_0 + \frac{1}{3} \rho_0 w_0 l \right) \theta^{(4)}(t) + \alpha_0 \ddot{\theta}(t) + \gamma_0 \dot{\theta}(t) \right] + \\ + O(\varepsilon^4) = G(t) + (P_0 - P_*)S \end{aligned} \quad (9)$$

и является основой для численного эксперимента.

2. Численный эксперимент

Численный эксперимент проводился на основе программного комплекса для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления» [3] с целью исследования зависимости величины деформации упругого элемента датчика от толщины пластины h_{pl} , от растягивающего усилия N , от коэффициента Пуассона ν .

Рассматривается механическая система с параметрами: $P_0 = 101325$, $P_* = 0$, $a_0 = 343$, $l = 3$, $P(y, z, t) = 6 \cdot 10^6 - 5.4 \cdot 10^5 \cdot t^2$, $\alpha = 0.3$, $\gamma = 0.2$, $\beta = 0.1$. Рабочая среда – воздух ($\rho_0 = 1.225$). Пластина размером $a = b = 0.01$ и толщиной h_{pl} изготовлена из стали: $E = 2 \cdot 10^{11}$, $\rho_{pl} = 7850$, $\nu = 0.28$. Все значения приведены в системе СИ.

Начальные условия для решения уравнения (9) заданы в виде: $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = 0$. Также задана функция $g(y, z) = (y - a)^2 \cdot (z - b)^2$, которая удовлетворяет граничным условиям (8). На рис. 1 представлены результаты расчета при $h_{pl} = 0.0005$, $N = 0$ и $\nu = 0.28$.

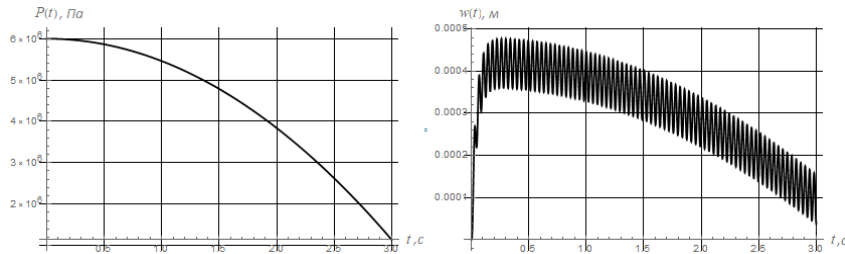


Рис. 1. Графики закона изменения давления и деформации упругого элемента

В табл. 1 и на рис. 2 представлены результаты численного эксперимента при $N = 0$, $\nu = 0.28$ и различном задании толщины пластины h_{pl} . Для каждого значения толщины пластины h_{pl} указано наибольшее значение деформации упругого элемента w .

Таблица 1: Зависимость деформации упругого элемента от толщины пластины

h_{pl} , м	w , м	h_{pl} , м	w , м	h_{pl} , м	w , м	h_{pl} , м	w , м	h_{pl} , м	w , м
0.00050	0.00050	0.00065	0.00025	0.00080	0.00015	0.00095	0.00010	0.00110	0.00007
0.00055	0.00037	0.00070	0.00021	0.00085	0.00013	0.00100	0.00009	0.00115	0.00006
0.00060	0.00030	0.00075	0.00018	0.00090	0.00012	0.00105	0.00008	0.00120	0.00005

В табл. 2 и на рис. 3 представлены результаты численного эксперимента при $h_{pl} = 0.0005$, $\nu = 0.28$ и различном задании растягивающего усилия N .

В табл. 3 и на рис. 4 представлены результаты численного эксперимента при $h_{pl} = 0.0005$, $N = 0$ и различном задании коэффициента Пуассона ν .

Проведенный эксперимент позволяет сделать следующие выводы: функции зависимости деформации упругого элемента датчика от толщины пластины h_{pl} и от растягивающего усилия N имеют гиперболический характер – с увеличением данных величин отклонение пластины понижается; с увеличением коэффициента Пуассона происходит уменьшение деформации упругого элемента датчика.

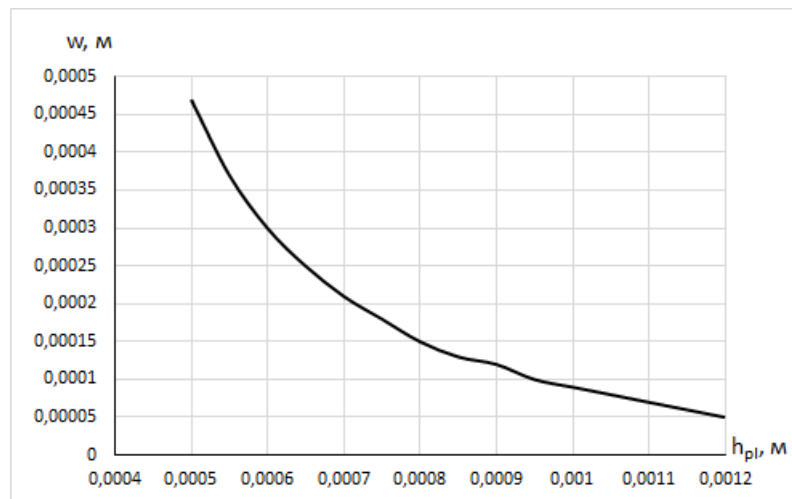


Рис. 2. График зависимости деформации упругого элемента от толщины пластины

Таблица 2: Зависимость деформации упругого элемента от растягивающего усилия

$N, \text{Н}$	$w, \text{м} \times 10^{-3}$	$N, \text{Н}$	$w, \text{м} \times 10^{-3}$	$N, \text{Н}$	$w, \text{м} \times 10^{-3}$
0	0.47	10^5	0.23	$5 \cdot 10^5$	0.088
10^4	0.42	$2 \cdot 10^5$	0.16	$7.5 \cdot 10^5$	0.065
$5 \cdot 10^4$	0.29	$3 \cdot 10^5$	0.13	10^6	0.050
$7.5 \cdot 10^4$	0.25	$4 \cdot 10^5$	0.10	$2 \cdot 10^6$	0.027

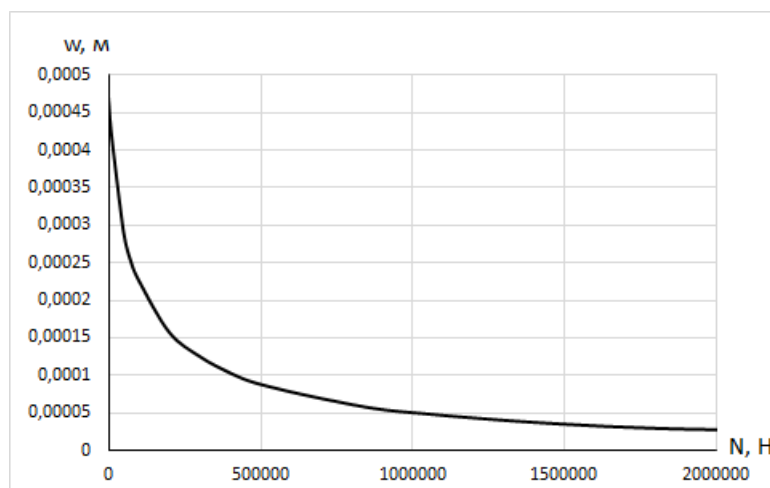


Рис. 3. График зависимости деформации упругого элемента от растягивающего усилия

Литература

1. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 3. С. 352-367.

Таблица 3: Зависимость деформации упругого элемента от коэффициента Пуассона

ν	$w, \text{ м} \times 10^{-3}$	ν	$w, \text{ м} \times 10^{-3}$	ν	$w, \text{ м} \times 10^{-3}$
0.25	0.482	0.28	0.475	0.31	0.467
0.26	0.479	0.29	0.472	0.32	0.464
0.27	0.477	0.30	0.469	0.33	0.461

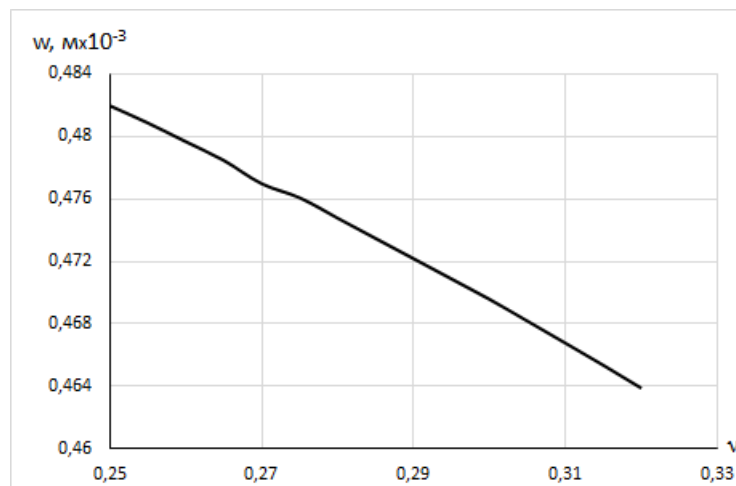


Рис. 4. График зависимости деформации упругого элемента от коэффициента Пуассона

- Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод - датчик давления» // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2024. № 2. С. 1-15. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08.
- Тамарова Ю. А., Вельмисов П. А., Анкилов А. В. Комплекс программ для математического моделирования механической системы «трубопровод - датчик давления»: свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2022615319. Заявка № 2022615014 от 28.03.2022; зарегистрировано 30.03.2022.

MSC 34K99, 65K05

Numerical study of the dependence of the deflection of the sensor element of the pressure sensor on the system parameters

Yu.A. Tamarova

Ulyanovsk State Technical University

Abstract: The mechanical system «pipeline – pressure sensor» with a rectangular cross-section of the pipeline is considered. Using the software package, the dependence of the deformation of the sensitive element of the pressure sensor on the parameters of the mechanical measurement system, namely, the thickness of the element, the applied force, the Poisson ratio, is investigated. Graphs of the dependences of the deformation of the sensitive element of the sensor are given.

Keywords: aerohydroelasticity, elastic element, combustion chamber, deformation, dynamics.

References

1. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Matematicheskoe modelirovanie sistem izmereniya davleniya v gaz-zhidkostnykh sredakh [Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2020. Vol. 22, no. 3. Pp. 352-367. (in Russian)
2. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki aerouprugoy sistemy "truboprovod - datchik davleniya" [Mathematical modeling of aeroelastic system "pipeline - pressure sensor" dynamics] // Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]. 2024. No. 2. Pp. 1-15. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.08. (in Russian)
3. Tamarova Yu. A., Velmisov P. A., Ankilov A. V. Kompleks programm dlya matematicheskogo modelirovaniya mekhanicheskoy sistemy "truboprovod - datchik davleniya" [Software package for mathematical modeling of mechanical system "pipeline - pressure sensor"]: certificate of software registration No. 2022615319. Application No. 2022615014 dated 28.03.2022; registered 30.03.2022. (in Russian)

УДК 519.63

Разработка физико-информированной нейронной сети для анализа напряжённого состояния мягких биологических тканей

Уразова К.М.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Первый Московский государственный медицинский университет имени И. М. Сеченова Министерства здравоохранения Российской Федерации
(Сеченовский Университет)

Аннотация: В данной работе исследуется применение физико-информированных нейронных сетей (PINN) для моделирования механического поведения мягких биологических тканей. Представлен сравнительный анализ точности PINN с традиционными гиперупругими моделями, включая модели Нео-Гука, Йо, Муни-Ривлина и Хальцапфеля-Гассера-Огдена. Особое внимание уделено комбинированному описанию упругих и вязкоупругих свойств тканей через модифицированную модель Кельвина-Фойгта. Результаты демонстрируют, что предложенный подход PINN достигает точности 99% при среднеквадратичной ошибке $3.199 \cdot 10^{-7}$ кПа², что превосходит традиционные методы на 4 порядка. Работа вносит вклад в развитие методов персонализированного моделирования биомеханических систем.

Ключевые слова: PINN, нейронные сети, механика биологических тканей, гиперупругие модели, вязкоупругие модели

1. Введение

Мягкие биологические ткани обладают сложным вязкоупругим поведением, описываемым уравнениями в частных производных. Основное уравнение движения имеет вид:

$$\nabla \cdot (\mathbf{P}^e + \mathbf{P}^v) + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1)$$

где $\mathbf{P}^e$ – упругая часть тензора напряжений, $\mathbf{P}^v$ – вязкая часть, $\mathbf{b}$ – объёмные силы, ρ – плотность, $\ddot{\mathbf{u}}$ – ускорение.

Для описания упругой части используются гиперупругие модели. Модель Йо [1] представляет собой полиномиальную аппроксимацию:

$$\Psi = \sum_{i=1}^3 C_{i0} (I_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{d_i} (J - 1)^{2i}, \quad (2)$$

где C_{i0} и d_i – материальные параметры, J – якобиан деформации.

В сравнении с другими моделями [2]:

$$\text{Нео-Гук: } \Psi = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3), \quad (3)$$

$$\text{Муни-Ривлин: } \Psi = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3), \quad (4)$$

$$\text{Хальцапфеля-Гассера-Огдена (HGO): } \Psi = C_{10} (I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \left[e^{k_2 (I_4 - 1)^2} - 1 \right]. \quad (5)$$

2. Материалы и методы

Для описания вязкоупругости используется модель Кельвина-Фойгта:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} + \eta \frac{d\mathbf{C}}{dt}, \quad (6)$$

где $\mathbf{S}$ – тензор Пиолы-Кирхгоффа, Ψ – потенциал упругой энергии, $\mathbf{C}$ – тензор Коши-Грина, η – вязкость.

Частотная зависимость учитывается через диссипативный потенциал:

$$\Phi = \frac{1}{2} \eta_1 \left(\frac{dI_1}{dt} \right)^2 + \eta_2 \left(\frac{dI_4}{dt} \right)^2, \quad (7)$$

где I_1, I_4 – инварианты $\mathbf{C}$.

В PINN добавлен член потерь:

$$\mathcal{L}_{visc} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\| \mathbf{P}^v - \eta \frac{d\mathbf{F}}{dt} \right\|^2, \quad (8)$$

где $\mathbf{F} = \nabla \mathcal{N}(\mathbf{x}, t; \theta)$ – тензор деформации, вычисляемый нейронной сетью, а $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$ – через автоматическое дифференцирование.

Алгоритм обучения:

1. Обучение PINN.
2. Инициализация весов θ .
3. Для $epoch = 1, N_{epochs}$.
 - 3.1. Вычислить $\mathbf{F} = \nabla \mathcal{N}(\mathbf{x}, t; \theta)$.
 - 3.2. Вычислить $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$ через AD.
 - 3.3. Обновить θ для минимизации $\mathcal{L} + \lambda_4 \mathcal{L}_{visc}$.

Обучение проводилось на синтетических данных, сгенерированных для креп-теста.

3. Результаты

PINN протестирована на задаче креп-теста с аналитическим решением:

$$\sigma(t) = E_{\infty} \epsilon_0 + (E_0 - E_{\infty}) \epsilon_0 e^{-t/\tau}, \quad (9)$$

где $E_{\infty} = 1$ кПа, $E_0 = 2$ кПа, $\tau = 2.5$ с, $\epsilon_0 = 0.1$. Предсказания PINN сравнивались с аналитическим решением и моделями Нео-Гука, Йо, Муни-Ривлина и Хальцапфеля-Гассера-Огдена, показав ошибку менее 1%. Сравнение моделей (MSE) приведено в таблице.

Модель	MSE (kPa ²)	Улучшение
PINN	3.199×10^{-7}	12 811.0
Yeoh	1.017×10^{-3}	4.0
Муни-Ривлин	1.897×10^{-3}	2.2
HGO	2.057×10^{-3}	2.0
Нео-Гук	4.099×10^{-3}	1.0

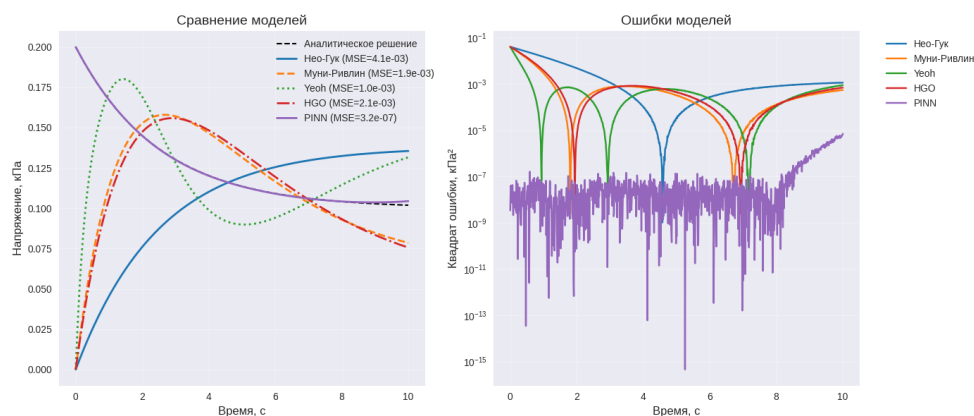


Рис. 1. Сравнение PINN с аналитическим решением и моделями

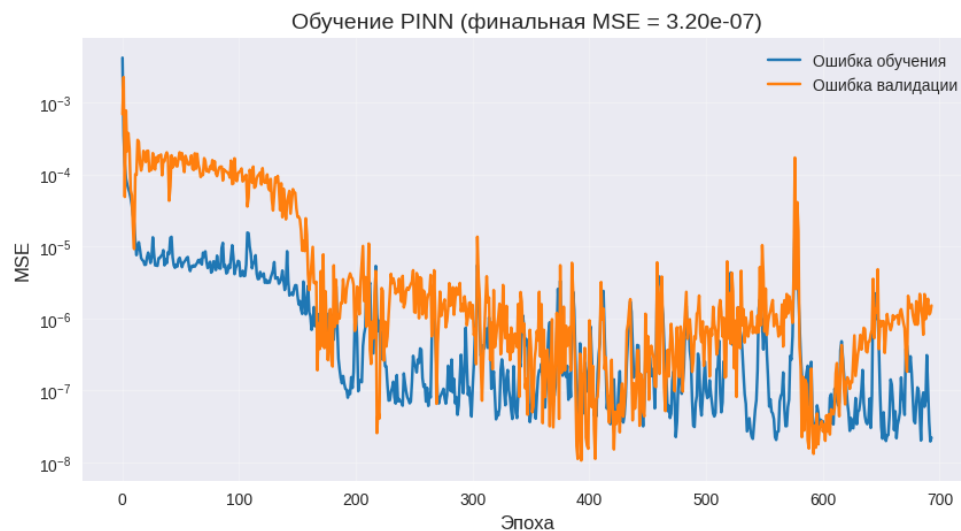


Рис. 2. Ошибка обучения PINN

Точность превышает 99%, что показывает эффективность PINN для исследования поведения мягких биологических тканей при различных протоколах нагружения.

Литература

1. Yeoh O.H. Some forms of the strain energy function for rubber // Rubber Chemistry and Technology. 1993. Vol. 66(5). P. 754-771. DOI: 10.5254/1.3538343

2. Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics // Journal of Elasticity. 2004. Vol. 61. P. 1-48. DOI: 10.1023/B:ELAS.0000029991.92327.fa
3. Ogden R.W. Nonlinear elasticity with application to material modeling // Annual Review of Materials Research. 2004. Vol. 34. P. 93-110. DOI: 10.1146/annurev.matsci.34.070203.115800

MSC 74B20

Development of a physics-informed neural network for analyzing the stress state of soft biological tissues

K.M. Urazova

I.M. Sechenov First Moscow State Medical University (Sechenov University)

Abstract: This work explores the application of physics-informed neural networks (PINNs) for modeling the mechanical behavior of soft biological tissues. A comparative analysis of the accuracy of PINNs with traditional hyperelastic models, including Neo-Hooke, Yo, Mooney-Rivlin, and Halzapfel-Gasser-Ogden models, is presented. Special attention is given to the combined description of the elastic and viscoelastic properties of tissues through a modified Kelvin-Voigt model. The results demonstrate that the proposed PINN approach achieves an accuracy of 99% with a mean squared error of $3.199 \cdot 10^{-7}$ kPa², which is 4 orders of magnitude better than traditional methods. This work contributes to the development of personalized modeling methods for biomechanical systems.

Keywords: PINN, neural networks, mechanics of biological tissues, hyperelastic models, viscoelastic models.

Литература

1. Yeoh O.H. Some forms of the strain energy function for rubber // Rubber Chemistry and Technology. 1993. Vol. 66(5). P. 754-771. DOI: 10.5254/1.3538343
2. Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics // Journal of Elasticity. 2004. Vol. 61. P. 1-48. DOI: 10.1023/B:ELAS.0000029991.92327.fa
3. Ogden R.W. Nonlinear elasticity with application to material modeling // Annual Review of Materials Research. 2004. Vol. 34. P. 93-110. DOI: 10.1146/annurev.matsci.34.070203.115800

УДК 537.9

Метод малого параметра в задачах моделирования динамики нелинейных электромагнитных волн в 2D сверхструктурах

Федулов И.Н.¹, Глазов С.Ю.²

ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет»¹,
ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный социально-педагогический университет»²

Аннотация: Развита метод решения системы двумерных нелинейных волновых уравнений, описывающих распространение электромагнитных волн в графеновых сверхструктурах, на основании разложения искоемых функций (ортогональных компонент векторного потенциала) в ряд по малому параметру, характеризующему их взаимодействие. Это позволяет свести исходную систему к линеаризованным уравнениям и сравнительно легко получить приближенное аналитическое решение.

Ключевые слова: метод малого параметра, нелинейные волны, сверхструктуры, сверхрешетки на основе графена, графеновые сверхрешетки, низкоразмерные системы.

1. Введение

В последнее время в связи с открытием новых материалов становятся актуальными задачи, связанные с исследованиями в области физики низкоразмерных (одно- и двумерных) систем, важным примером которых являются графеновые сверхрешетки (ГСР). Одной из таких задач является изучение распространения электромагнитной волны вдоль поверхности двумерной (2D) ГСР, образованной листом графена на плоской подложке типа «шахматное поле» из чередующихся квадратных областей оксида и карбида кремния. В процессе ее решения возникает система взаимосвязанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая изменение ортогональных компонент векторного потенциала *удвоенной* электромагнитной волны (УЭВ) [1]. Несмотря на возможность численного решения, представляет интерес аналитическое решение данной системы уравнений, позволяющее выявить характер взаимодействия компонент векторного потенциала УЭВ. В настоящей работе предлагается применить для этой цели метод малого параметра, разлагая решение системы в ряд по степеням параметра, характеризующего так называемую «неаддитивность энергетического спектра» ГСР, проявляющуюся во взаимодействии взаимно ортогональных компонент векторного потенциала УЭВ. Как будет показано далее, предлагаемый метод позволяет «линеаризовать» исходную систему, сведя ее к хорошо известным нелинейным уравнениям Sine-Gordon и последовательности линейных уравнений, которые могут быть решены стандартными методами.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \sin \phi_x (1 + \beta \cos \phi_y) = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \sin \phi_y (1 + \beta \cos \phi_x) = 0 \end{cases}$$

Компоненты векторного потенциала ϕ_x и ϕ_y можно разложить в ряды по малому параметру β :

$$\phi_x = \phi_x^{(0)} + \beta \phi_x^{(1)} + \beta^2 \phi_x^{(2)} + \dots \quad (1)$$

$$\phi_y = \phi_y^{(0)} + \beta \phi_y^{(1)} + \beta^2 \phi_y^{(2)} + \dots \quad (2)$$

где верхний символ в круглых скобках обозначает порядок разложения. Подставляя указанные выражения в систему (1) и ограничиваясь вторым порядком по β , а также заменяя синусы и косинусы на их приближенные выражения, получим в нулевом порядке двумерные уравнения Sine-Gordon, а в первом и втором порядке – две пары одинаковых по структуре линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных, различающихся только видом неоднородностей в своих правых частях. Решение каждого последующего уравнения явным образом зависит от решений уравнений, соответствующих предыдущим приближениям.

3. Результаты и выводы

Не останавливаясь на решении хорошо изученного уравнения Sine-Gordon, заметим, что для целей изучения распространения УЭВ в ГСР может быть взято любое его решение, однако сложные многосолитонные и бризерные решения могут затруднить поиск последующих приближений. Поэтому в данной связи большую роль играет простейшее решение, соответствующим одиночному кинку [2]. Нахождение первой и второй поправок сводится к решению неоднородной задачи Коши [3], явно зависящей от выбранного решения уравнения Sine-Gordon.

В одном из простейших частных случаев, когда УЭВ направлена под углом $\theta = \frac{\pi}{4}$ по направлению к осям ГСР, в качестве решения нулевого приближения можно выбрать одинаковые решения для ϕ_x и ϕ_y . В этом случае решение однородной задачи Коши представимо в виде «бегущей волны» и уравнения для поправок сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, методы решения которых хорошо известны [4]. Данный случай интересен тем, что для него известно точное решение [1], с которым можно сравнить результат, полученный нами. Еще один аспект, представляющий интерес в связи с данным случаем – существование локализованного решения у однородного уравнения, лежащего в основе нахождения поправок к «невозмущенному» решению уравнения Sine-Gordon.

Литература

1. Glazov S., Syrodoev G. Numerical modeling of nonlinear wave processes // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1740. Art. 012062.
2. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Павлов Ю. В. Нелинейные задачи механики деформируемого твердого тела // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158, № 3. С. 370-377.

3. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
4. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

MSC 35L70

Small parameter method in problems of modeling the dynamics of nonlinear electromagnetic waves in 2D superstructures

I.N. Fedulov¹, S.Yu. Glazov²

Yugra State University¹, Volgograd State Social-Pedagogical University²

Abstract: A method has been developed for solving a system of two-dimensional nonlinear wave equations describing the propagation of electromagnetic waves in graphene superstructures, based on the expansion of the desired functions (orthogonal components of the vector potential) in a series in terms of a small parameter characterizing their interaction. This allows us to reduce the original system to linearized equations and to obtain an approximate analytical solution relatively easily.

Keywords: small parameter method, nonlinear waves, superstructures, graphene-based superlattices, graphene superlattices, low-dimensional systems.

References

1. Glazov S., Syrodoev G. Numerical modeling of nonlinear wave processes // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1740. P. 012062.
2. Aero E. L., Bulygin A. N., Pavlov Yu. V. Nelineinye zadachi mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela [Nonlinear problems in mechanics of deformable solids] // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika [Theoretical and Mathematical Physics]. 2009. Vol. 158, no. 3. P. 370-377. (in Russian)
3. Polyanin A. D. Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki [Handbook of linear equations of mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 576 p. (in Russian)
4. Zaitsev V. F., Polyanin A. D. Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam [Handbook of ordinary differential equations]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 576 p. (in Russian)

УДК 004.94

Математическое моделирование безобрывной полимеризации диенов на основе системы дифференциальных уравнений

Хашпер Б.Л., Юнусова Д.С., Гиззатова Э.Р.

Уфимский университет науки и технологий

Аннотация: В работе представлено исследование непрерывной полимеризации диенов с использованием катализаторов Циглера-Натта. Разработана математическая модель процесса, основанная на системе дифференциальных уравнений, описывающих динамику изменения концентраций реагентов. Проведен анализ матрицы частных производных, характеризующей вклад каждого компонента в скорость реакции. Проведен расчет и анализ собственных значений этой матрицы. Выявлены ключевые закономерности протекания процесса. Разработанная методика апробирована на экспериментальных данных полимеризации.

Ключевые слова: полимеризация, химическая кинетика, система дифференциальных уравнений, матрица скоростей, собственные значения матрицы.

1. Введение

Рассмотрим процесс безобрывной полимеризации диенов на катализаторах Циглера-Натта, в ходе которого смешиваются растворы мономера и алюмоорганического соединения (АОС). Кинетическая схема процесса включает три стадии:



где P_i – растущая полимерная цепь с i звеньями, Q_i – образованная полимерная цепь с i звеньями, M – мономер, A – АОС, k_p – константа скорости стадии роста полимерной цепи, k_M – константа скорости стадии передачи цепи на мономер, k_A – константа скорости стадии передачи цепи на АОС.

2. Математическая модель

На основе законов химической кинетики формируется математическая модель процесса, которая включает дифференциальные уравнения, описывающие динамику изменения концентраций каждого реагента в смеси. При этом, учитывая предположение о формировании полимерной цепи бесконечной длины, модель содержит рекуррентные уравнения для полимерных цепей:

$$\frac{dM}{dt} = -M(k_p + k_M) \left(P_1 + \sum_{i=2}^{\infty} P_i \right),$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dA}{dt} &= -Ak_A \left(P_1 + \sum_{i=2}^{\infty} P_i \right), \\
 \frac{dP_1}{dt} &= -k_p M P_1 + (k_M + k_A A) \sum_{i=2}^{\infty} P_i, \\
 \frac{dQ_1}{dt} &= (k_M A + k_A A) P_1, \\
 \frac{dP_i}{dt} &= k_M M (P_{i-1} - P_i) - (k_M A + k_A A) P_i, \quad i \geq 2, \\
 \frac{dQ_i}{dt} &= (k_M M + k_A A) P_i, \quad i \geq 2.
 \end{aligned} \tag{2}$$

В качестве начальных данных взяты: исходная концентрация мономера, исходная концентрация алюминийорганического соединения, исходная концентрация полимерных цепей с единичной длиной звена, которые в данном процессе играют роль активных центров:

$$P_1^0 = P_1(0), \quad M^0 = M(0), \quad A^0 = A(0). \tag{3}$$

Ограничим систему (2) первыми тремя уравнениями, так как четвертое уравнение является совокупным уравнением по всем P_i . Обозначим $\sum_{i=2}^{\infty} P_i$ как $P_{2,\infty}$, $\sum_{i=2}^{\infty} Q_i$ как $Q_{2,\infty}$. Получим систему уравнений, характеризующую динамику изменения концентраций растущих полимерных цепей:

$$\begin{aligned}
 \frac{dM}{dt} &= -M(k_p + k_M)(P_1 + P_{2,\infty}), \\
 \frac{dA}{dt} &= -Ak_A(P_1 + P_{2,\infty}), \\
 \frac{dP_1}{dt} &= -k_p M P_1 + (k_M + k_A A) P_{2,\infty}, \\
 \frac{dP_{2,\infty}}{dt} &= k_p M P_1 - (k_M + k_A A) P_{2,\infty}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Анализируя динамику изменения концентраций веществ [1], можно отметить, что начиная с определенного момента времени $t = t_1$, изменения становятся незначительными, что позволяет считать, что функции скоростей достигают стационарного состояния. Учитывая, что в соотношениях (4) $M P_1$, $M P_{2,\infty}$, $A P_1$, $A P_{2,\infty}$ – скорости стадий без констант, можно определить матрицу частных производных следующего вида:

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_{2,\infty} & 0 & 0 \\ M & 0 & A & 0 \\ 0 & M & 0 & A \\ 0 & 0 & P_1 & P_{2,\infty} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ P_1 \\ P_{2,\infty} \\ A \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Матрица (5) демонстрирует значимость вклада каждого вещества в значение скорости каждой реакции с течением времени. Чем больше время процесса, тем меньше значение скорости.

Для количественной оценки значимости вклада веществ в скорость реакции найдем собственные значения матрицы (5), используя характеристическое уравнение, теорему Виета, а также условие, что сумма собственных значений, соответствующих P_1 и $P_{2,\infty}$, должна быть равна 0 [2].

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = \sqrt{-P_1 P_{2,\infty} + AP_1 + AM + MP_{2,\infty}}, \\ \lambda_3 = -\sqrt{-P_1 P_{2,\infty} + AP_1 + AM + MP_{2,\infty}}, \\ \lambda_4 = P_1 + P_{2,\infty}. \end{cases} \quad (6)$$

Найденные собственные значения (6) демонстрируют, что процесс безобрывный, квазистационарный, соблюдается закон сохранения массы веществ.

3. Вычислительный эксперимент

Предлагаемая методика апробирована на процессе безобрывной полимеризации диенов. Использовались следующие входные данные: $P_1^0 = 6.5 \cdot 10^{-4}$ моль/л, $M^0 = 1.5$ моль/л, $A^0 = 0.03$ моль/л, $k_p = 17.38$, $k_M = 0.024$, $k_A = 1.47$. Разработано собственное программное обеспечение на языке Python. В нем решена система уравнений (2)–(4), построены молекулярно-массовые распределения $P_{2,\infty}$, $Q_{2,\infty}$ и $P_{2,\infty} + Q_{2,\infty}$. На рис. 1–2 представлены молекулярно-массовые распределения $P_{2,\infty}$ (а), $Q_{2,\infty}$ (б) и $P_{2,\infty} + Q_{2,\infty}$ (в). Для наглядности графики построены по логарифмической шкале по оси X .

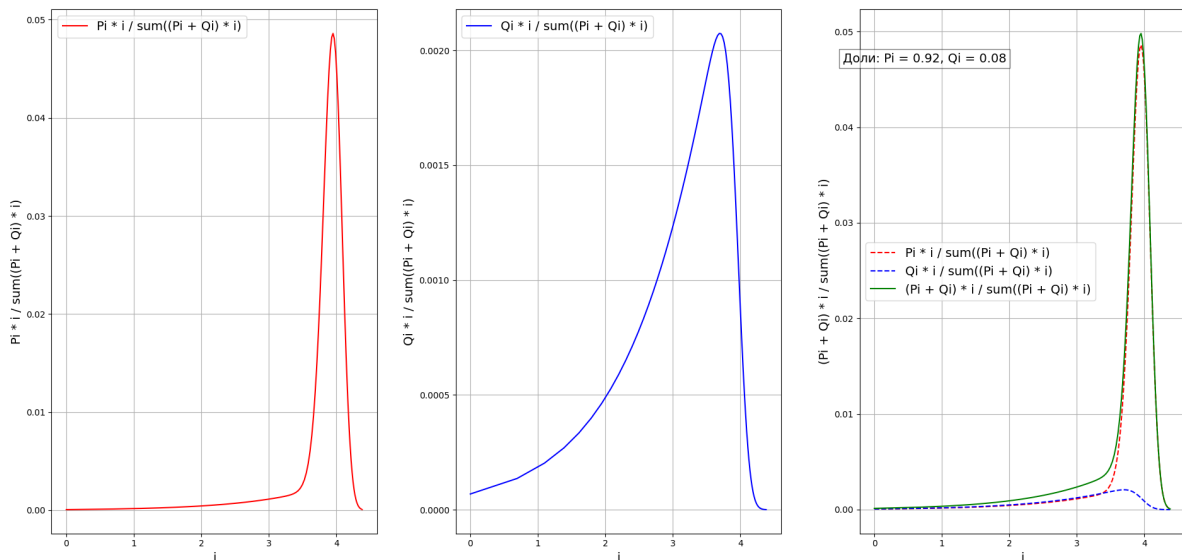


Рис. 1. Молекулярно-массовые распределения при $t = 2$ мин: а) $P_{2,\infty}$; б) $Q_{2,\infty}$; в) $P_{2,\infty} + Q_{2,\infty}$

Для каждого рассматриваемого момента времени рассчитаны доли $P_{2,\infty}$ и $Q_{2,\infty}$ по формулам (7)–(8):

$$\text{доля } P_{2,\infty} = \frac{\sum_{i=2}^{\infty} (P_i \cdot i)}{\sum_{i=2}^{\infty} (P_i + Q_i) \cdot i}, \quad (7)$$

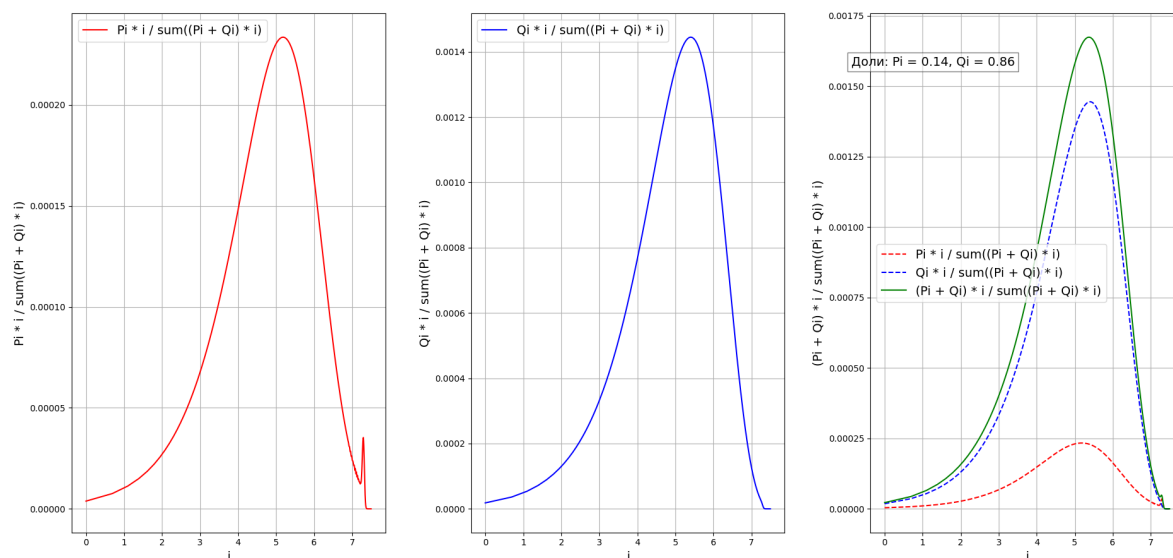


Рис. 2. Молекулярно-массовые распределения при $t = 90$ мин: а) $P_{2,\infty}$; б) $Q_{2,\infty}$; в) $P_{2,\infty} + Q_{2,\infty}$

$$\text{доля } Q_{2,\infty} = \frac{\sum_{i=2}^{\infty} (Q_i \cdot i)}{\sum_{i=2}^{\infty} (P_i + Q_i) \cdot i}. \quad (8)$$

Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1: Доли $P_{2,\infty}$ и $Q_{2,\infty}$ в разные моменты времени

Доля	2 мин	7 мин	12 мин	20 мин	30 мин	60 мин	90 мин
$P_{2,\infty}$	0.92	0.77	0.65	0.51	0.39	0.21	0.14
$Q_{2,\infty}$	0.08	0.23	0.35	0.49	0.61	0.79	0.86

Из рис. 1–2 и табл. 1 видно, что с течением времени доля $P_{2,\infty}$ увеличивается, а доля $Q_{2,\infty}$ уменьшается.

4. Заключение

Таким образом, в ходе работы построена математическая модель процесса безобрывной полимеризации диенов, включающая дифференциальные уравнения, которые описывают динамику изменения концентраций реагентов и рекуррентные уравнения для полимерных цепей. Проведён анализ значимости вклада веществ в скорость реакции с течением времени через собственные значения матрицы скоростей, которые характеризуют внутренние взаимосвязи между веществами. Предлагаемая методика может применяться для управления процессом полимеризации.

Литература

1. Гиззатова Э. Р., Подвальный С. Л., Спивак С. И. Поиск кинетических констант при моделировании процессов полицентровой безобрывной полимеризации дие-

- нов // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2020. Т. 16, № 5. С. 13-18.
2. Воробьев А. Х., Богданов А. В. Кинетика нелинейных химических систем: учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 2019. 158 с.

MSC 80A30

Mathematical Modeling of Continuous Diene Polymerization Based on a System of Differential Equations

B.L. Khashper, D.S. Yunusova, E.R. Gizzatova
Ufa University of Science and Technology

Abstract: This study investigates the continuous polymerization of dienes using Ziegler-Natta catalysts. A mathematical model of the process was developed based on a system of differential equations describing the dynamics of reagent concentration changes. The analysis included examination of the partial derivatives matrix characterizing each component's contribution to the reaction rate. The eigenvalues of this matrix were calculated and analyzed, revealing key patterns of the polymerization process. The developed methodology was successfully tested on experimental polymerization data.

Keywords: polymerization, chemical kinetics, system of differential equations, rate matrix, matrix eigenvalues.

Литература

1. Gizzatova E. R., Podvalny S. L., Spivak S. I. Poisk kineticheskikh konstant pri modelirovanii protsessov politsentrovoy bezobryvnoy polimerizatsii dienov [Search of kinetic constants in modeling of multicentric non-breaking polymerization processes of dienes] // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of Voronezh State Technical University]. 2020. Vol. 16, no. 5. P. 13-18. (in Russian)
2. Vorobiev A. Kh., Bogdanov A. V. Kinetika nelineinykh khimicheskikh sistem [Kinetics of nonlinear chemical systems]: textbook. Moscow: Moscow State University Publ., 2019. 158 p. (in Russian)

УДК 517.925:612.8

Исследование моделей нейронных сетей головного мозга

Чернова М.А., Мамедова Т.Ф.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье рассматриваются основные модели нейронных сетей: модели Хиндмарша–Роуза и ФицХью–Нагумо, описанные системами дифференциальных уравнений. Показано, что выбор модели зависит от целей исследования: для хаотических процессов предпочтительнее использование модели Хиндмарша–Роуза, для устойчивых циклов – модели ФицХью–Нагумо. Их совместное использование расширяет возможности понимания работы нейронных сетей.

Ключевые слова: модель Хиндмарша–Роуза, модель ФицХью–Нагумо, нейронные сети.

1. Введение

Существует множество моделей, описывающих работу нейронных сетей в головном мозге. Классические модели, такие как модель Хиндмарша – Роуза и модель ФицХью – Нагумо, описываются системами дифференциальных уравнений и позволяют моделировать динамическое поведение нейронных сетей, включая устойчивость, колебания и реакции на стимулы. Эти модели просты в понимании, что делает их важным инструментом для понимания фундаментальных механизмов работы нейронов головного мозга.

2. Модель Хиндмарша–Роуза

Модель Хиндмарша–Роуза хорошо описывает поведение нейронов со сложной, ритмической и динамической активностью [1]. Она представляет собой систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + (-ax_1^3 + bx_1^2) - x_3 + I, \\ \frac{dx_2}{dt} = c - dx_1^2 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = r(s(x_1 - x_R) - x_3), \end{cases} \quad (1)$$

где x_1 – потенциал мембраны; x_2 – переменная восстановления; x_3 – переменная адаптации; I – величина стимулирующего тока (эта переменная изображает экспериментальное подключение тока к мембране); x_R – пороговое значение мембранного потенциала; параметры a, b, c, d, r, s определяют форму модели и могут быть настроены для воспроизведения различных динамических режимов нейрона.

3. Модель ФицХью – Нагумо

Модель ФицХью–Нагумо – это упрощённая версия более сложной модели нейрона Ходжкина–Хаксли, разработанная для описания основных свойств возбуждения и реполяризации нейронов [2]. В отличие от модели Хиндмарша–Роуза, данная модель лучше подходит для описания нейронов с простой, стабильной динамикой возбуждения и реполяризации. Эта модель описывается системой:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1^3 - x_2 + I, \\ \tau \frac{dx_2}{dt} = x_1 - a - bx_2, \end{cases} \quad (2)$$

где x_1 – потенциал мембраны; x_2 – переменная восстановления; x_3 – переменная адаптации; I – величина тока; τ – время, в течение которого происходит изменение переменной восстановления; a – скорость восстановления мембранного потенциала; b – отношение между возбуждением и торможением.

4. Моделирование нейронной сети

Моделирование различных типов нейронов в одной сети важно для более точного понимания того, как работает мозг. Одни нейроны регулируют циклические процессы, такие как дыхание или сердцебиение, другие участвуют в сенсорной обработке или формировании движения. Они различаются по частоте срабатывания, порогам и активности. Включение различных типов нейронов в модель помогает нам понять, как их взаимодействия создают сложные закономерности, такие как синхронность, ритмы или хаос. Такой подход расширяет исследовательские возможности, помогает определять ключевые параметры и разрабатывать новые методы лечения или нейротехнологии.

В моделировании нейронной сети для каждой модели было выбрано по 3 нейрона (общее число нейронов равно 6). Для каждого нейрона случайным образом задаются начальные значения переменных в диапазоне от -1 до 1, определяющие его стартовое состояние. Далее создаётся матрица связей между нейронами, которая задаёт силу синаптических взаимодействий. В этой матрице каждому паре нейронов присваивается случайный вес, отражающий степень влияния одного нейрона на другой. Веса могут быть как положительными, что соответствует возбуждающему воздействию, так и отрицательными, что соответствует тормозящему эффекту. Важным моментом является исключение самосинапсов – нейрон не влияет сам на себя, поэтому диагональные элементы матрицы устанавливаются равными нулю.

Для каждого нейрона учитывается сумма входных сигналов от всех остальных нейронов с учетом соответствующих синаптических весов. В результате входной сигнал для нейрона представляет собой взвешенную сумму потенциалов других нейронов. Влияние этих сигналов на динамику нейрона выражается путем сложения суммы входных сигналов с внешним стимулом, что влияет на изменение мембранного потенциала и других переменных.

Для моделирования динамики нейронных сетей выбран временной диапазон от нуля до ста. В течение этого периода система изучается с использованием 1000 равномерных точек, что обеспечивает достаточно высокое временное разрешение для анализа таких процессов, как импульсные выбросы и ритмическая активность.

Для численного решения был использован метод Рунге–Кутты с автоматической регулировкой шага. Этот метод выбирает оптимальный размер шага для достижения

заданной точности.

5. Результаты моделирования

Результаты численного моделирования представлены на рис. 1.

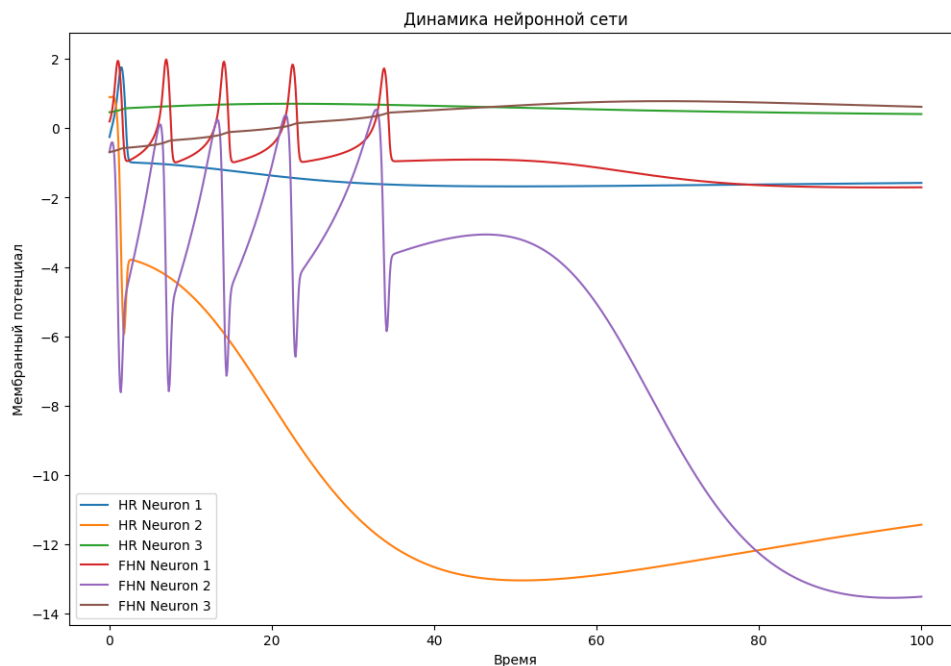


Рис. 1. Динамика нейронной сети

Полученный график показывает, что нейроны, описываемые моделью Хайндмарша–Роуза, демонстрируют более сложное и разнообразное поведение, чем нейроны, описываемые моделью Фицхью–Нагумо. В частности, активность нейронов HR характеризуется наличием выраженных импульсных разрядов, которые могут проявляться в виде регулярных или хаотических колебаний, а также переходов между различными режимами возбуждения. Это свидетельствует об их способности моделировать более сложные динамические состояния, такие как генерация ритмов или паттернов возбуждения, характерных для некоторых типов нейронов мозга.

В то же время нейроны, основанные на модели Фицхью–Нагумо, демонстрируют более упорядоченное и предсказуемое поведение. Их мембранные потенциалы колеблются в относительно узком диапазоне, демонстрируя характерные спайковые разряды, которые повторяются с почти постоянной частотой. Этот тип активности хорошо подходит для моделирования нейронов, участвующих в циклических мозговых процессах. В целом активность этих нейронов более стабильна и менее хаотична по сравнению с нейронами HR.

Таким образом, выбор модели зависит от целей исследования. Для анализа сложных, хаотических и ритмических закономерностей предпочтительнее использовать модель Хиндмарша–Роуза, а для изучения устойчивых циклических процессов – модель Фицхью–Нагумо. Совместное использование этих моделей расширяет возможности понимания работы нейронных сетей.

Литература

1. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences. 1984. Vol. 221, No. 1222. P. 87-102.
2. FitzHugh R. Mathematical models of excitation and propagation in nerve // In: Schwan H. P. (Ed.). Biological Engineering. New York: McGraw-Hill Book Co., 1969. P. 1-85.

MSC 93A30

Research into neural network models of the brain

M.A. Chernova, T.F. Mamedova

National Research Mordovia State University

Abstract: The article discusses the main models of neural networks – the Hindmarsh-Rose and FitzHugh-Nagumo models, based on differential equations. It is shown that the choice of model depends on the study's objectives: for chaotic processes, the Hindmarsh–Rose model is preferable, for stable cycles is the FitzHugh–Nagumo model. Their combined using expands the possibilities of understanding the work of neural networks.

Keywords: the Hindmarsh–Rose model, the FitzHugh–Nagumo model, neural networks.

References

1. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences. 1984. Vol. 221, No. 1222. P. 87-102.
2. FitzHugh R. Mathematical models of excitation and propagation in nerve // In: Schwan H. P. (Ed.). Biological Engineering. New York: McGraw-Hill Book Co., 1969. P. 1-85.

УДК 519.687.7

Анализ работы алгоритмов стабилизации отклонений движения курсора у пользователей с ограниченными возможностями здоровья для разработки специализированного драйвера компьютерного манипулятора «мышь»

Шамаев А.В., Никашкин Д.Н., Куряев Р.В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Статья посвящена анализу работы алгоритмов стабилизации отклонений движения курсора компьютерного манипулятора «мышь» у пользователей с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) с целью дальнейшего применения этих алгоритмов при разработке специализированного драйвера, обеспечивающего компенсацию указанных отклонений в режиме реального времени.

Ключевые слова: анализ, алгоритмы стабилизации движения курсора, пользователи с ограниченными возможностями здоровья, специализированный драйвер компьютерного манипулятора «мышь».

1. Введение

В настоящее время доступ к компьютеру стал неотъемлемой частью повседневной жизни. Однако у пользователей с двигательными нарушениями зачастую возникают трудности при использовании компьютерных манипуляторов. В связи с этим становится актуальной задача разработки специализированного драйвера компьютерного манипулятора «мышь», который будет использовать алгоритмы фильтрации и стабилизации для коррекции движения курсора. Цель данного исследования – анализ и сравнительная оценка различных методов стабилизации движения курсора с целью минимизации отклонений от заданной траектории.

В рамках проведённого исследования были проанализированы характерные типы отклонений, изучены особенности движения курсора как у пользователей без нарушений, так и у лиц с ограниченными возможностями. Были реализованы и протестированы три метода фильтрации координат: медианная фильтрация, экспоненциальное сглаживание (EWMA), фильтр Калмана. Эффективность оценивалась на основе следующих метрик: среднее отклонение, среднеквадратичное отклонение (RMSE), максимальное отклонение и медиана.

2. Тестирование движения курсора у здорового пользователя

На первом этапе был проведён контрольный эксперимент: пользователь без моторных нарушений следовал курсором по прямоугольной траектории. Полученные координаты были сопоставлены с эталонной линией.

Среднее отклонение составило 3.31 пикселя, RMSE – 3.81 пикселя, медиана – 3.00 пикселя, а максимальное отклонение – 7.28 пикселя. Эти данные подтверждают высокую стабильность управления, отсутствие заметных флуктуаций и малую

амплитуду колебаний.

3. Тестирование движения курсора у пользователя с двигательными нарушениями

Повторный эксперимент с участием пользователя с ОВЗ показал значительно худшие результаты. Среднее отклонение от заданной траектории достигло 27.15 пикселя, RMSE – 40.09 пикселя, максимальное отклонение – 151.00 пикселя, медиана – 16.12 пикселя.

Визуально траектория имела выраженные колебания, неоднородность по длине, наличие выбросов. Такая траектория указывает на выраженные трудности удержания курсора в пределах заданного маршрута движения и необходимость автоматической коррекции.

4. Медианная фильтрация координат

Медианная фильтрация предполагает замену текущего значения медианой значений, попавших в окно фильтра фиксированной ширины:

$$X_{\text{filtered}}(t) = \text{median}(X(t-n), \dots, X(t), \dots, X(t+n))$$

где n – радиус окна.

Метод устойчив к выбросам и одиночным скачкам. Применение данного фильтра позволило добиться значительного снижения отклонений: среднее значение уменьшилось до 16.73 пикселя, RMSE – до 26.40 пикселя, медиана – до 10.00 пикселя. Максимальное отклонение при этом составило 125.02 пикселя, что указывает на неустрашимые единичные колебания высокой амплитуды.

5. Применение экспоненциального сглаживания (EWMA)

Фильтр взвешенного скользящего среднего (EWMA) рассчитывает новое значение как взвешенную сумму текущего измерения и предыдущего сглаженного состояния:

$$S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha) S_{t-1}$$

Параметр $\alpha \in (0, 1)$ определяет чувствительность фильтра к новым значениям. Использование EWMA позволяет более точно подавить резкие колебания без существенной задержки отклика. С помощью данного фильтра были получены следующие показатели: среднее отклонение – 8.17 пикселя, RMSE – 10.57 пикселя, медиана – 5.39 пикселя, максимальное отклонение – 33.00 пикселя. Визуально траектория стала значительно более гладкой и ближе к эталонной форме.

6. Фильтр Калмана

Фильтр Калмана – это рекурсивный алгоритм оценки состояния, основанный на байесовском подходе. В одномерной модели оценки положения курсора фильтр описывается следующими уравнениями:

Предсказание: $\hat{x}_t^- = \hat{x}_{t-1}, \quad P_t^- = P_{t-1} + Q$

Обновление: $K_t = \frac{P_t^-}{P_t^- + R}, \quad \hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t(z_t - \hat{x}_t^-), \quad P_t = (1 - K_t)P_t^-,$ где:

– $\hat{x}_t$ – оценка положения;

- z_t – измеренное значение;
- P_t – дисперсия ошибки оценки;
- Q – ковариация шума модели;
- R – ковариация шума измерения.

Фильтр Калмана целесообразно использовать в качестве основного алгоритма при разработке драйвера, обеспечивающего стабилизацию движения курсора в режиме реального времени, так как он эффективно учитывает как модель движения, так и шум измерений.

Применение фильтра Калмана обеспечило наилучшее сглаживание: среднее отклонение снизилось до 4.73 пикселя, RMSE – до 5.89 пикселя, медиана – до 3.61 пикселя, а максимальное – до 21.10 пикселя. Отклонения были минимизированы по всем метрикам.

7. Сравнительный анализ алгоритмов

В отсутствии фильтрации траектория движения курсора у пользователей с ОВЗ характеризуется значительными колебаниями и высокими показателями ошибки. Среднее отклонение превышает 27 пикселей, среднеквадратичная ошибка (RMSE) достигает 40 пикселей, а максимальное отклонение может превышать 150 пикселей, что существенно осложняет точное позиционирование курсора.

Медианная фильтрация обеспечивает устойчивость к одиночным выбросам, снижая среднее и медианное отклонения на 30-40%. Однако этот метод не справляется с резкими скачками, что приводит к сохранению высокого максимального отклонения (125 пикселей).

Алгоритм EWMA демонстрирует более стабильные результаты, снижая максимальное отклонение в 4.5 раза. При этом он обеспечивает плавное сглаживание траектории без чрезмерной инерционности, что важно для сохранения отзывчивости управления.

Таблица 1: Сравнение алгоритмов стабилизации

	Среднее	RMSE	Медиана	Макс.
Без фильтрации	27.15	40.09	16.12	151.00
Медианный фильтр	16.73	26.40	10.00	125.02
EWMA	8.17	10.57	5.39	33.00
Фильтр Калмана	4.73	5.89	3.61	21.10
Здоровый пользователь	3.31	3.81	3.00	7.28

Полученные результаты подтверждают, что использование адаптивной фильтрации существенно повышает точность управления компьютерным манипулятором «мышь» для пользователей с ОВЗ. Следует отметить, что наиболее эффективным среди рассмотренных методов является фильтр Калмана, который адаптируется к закономерностям движения и случайным флуктуациям, что позволяет минимизировать ошибки практически до уровня здорового пользователя. При этом средние и медианные отклонения уменьшаются почти в шесть раз, а RMSE снижается в семь раз по сравнению с исходными показателями, полученными для пользователей с ОВЗ.

Литература

1. Антончик В. С. Методы стабилизации программных движений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. 150 с.
2. Соколов Ю. Н. Фильтр Калмана: теория и применение: учебное пособие. Харьков: Харьковский авиационный институт, 1982. 120 с.

MSC 93C40

Analysis of cursor motion stabilization algorithms for users with disabilities to develop a specialized computer mouse driver

A.V. Shamaev, D.N. Nikashkin, R.V. Kuryaev

National Research Mordovia State University

Abstract: The article is dedicated to the analysis of algorithms for stabilizing cursor movements of a computer pointing device for users with disabilities, with the aim of further applying these algorithms in the development of a specialized driver that provides real-time stabilisation.

Keywords: Analysis, Cursor motion stabilization algorithms, Users with disabilities, Specialized computer mouse driver.

References

1. Antonchik V. S. Metody stabilizatsii programmnykh dvizhenii [Methods of stabilizing program motions]. St. Petersburg: St. Petersburg University Press, 1998. 150 p. (in Russian)
2. Sokolov Yu. N. Fil'tr Kalmana: teoriya i primeneniye [Kalman filter: theory and application]: textbook. Kharkiv: Kharkiv Aviation Institute, 1982. 120 p. (in Russian)

УДК 517.9

К вопросу об условной устойчивости нулевого решения нелинейной системы по линейному приближению

Шаманаев П.А.

Научно-технологический университет «Сириус»

Аннотация: В настоящей работе получены достаточные условия условной устойчивости и условной асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы по линейному приближению. Матрица линейного приближения содержит по крайней мере одно собственное значение с отрицательной вещественной частью.

Ключевые слова: условная устойчивость, частичная устойчивость, устойчивые многообразия

Настоящая работа дополняет результаты, полученные в работах [1, 2].
В работе рассмотрена система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, A – постоянная $n \times n$ матрица, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$,

$$f_j(x) = \sum_{|p_j|=2}^{\infty} x^{p_j}, \quad x^{p_j} = x_1^{p_{j1}} x_2^{p_{j2}} \dots x_n^{p_{jn}}, \quad (2)$$

$$p_j = (p_{j1}, \dots, p_{jn}), \quad |p_j| = p_{j1} + \dots + p_{jn}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Условная устойчивость нулевого решения понимается в смысле работы [3]. В отличие от устойчивости по Ляпунову, здесь начальные точки возмущенных решений берутся лишь из некоторого многообразия, принадлежащего окрестности нуля.

Для системы вида (1) показано, что при выполнении теорем из работ [1]– [2] в окрестности нулевого решения существуют устойчивые, асимптотически устойчивые и неустойчивые многообразия.

Литература

1. Шаманаев П. А. Об устойчивости нулевого решения относительно части переменных по линейному приближению // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19, № 3. С. 374-390. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2023.306
2. Шаманаев П. А. О частичной неустойчивости нулевого решения нелинейных систем по первому приближению // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 280-293. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202403.280-293
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

MSC 34D20

On the conditional stability of the zero solution of a nonlinear system under linear approximation

P.A. Shamanaev

Sirius University of Science and Technology

Abstract: In this paper, sufficient conditions for conditional stability and conditional asymptotic stability of the zero solution of a nonlinear system under linear approximation are obtained. The linear approximation matrix contains at least one eigenvalue with a negative real part.

Keywords: conditional stability, partial stability, stable manifolds.

References

1. Shamanaev P. A. Ob ustoychivosti nulevogo resheniya otnositel'no chasti peremennykh po lineinomu priblizheniyu [On stability of the zero solution with respect to part of variables by linear approximation] // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya [Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes]. 2023. Vol. 19, no. 3. P. 374-390. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2023.306 (in Russian)
2. Shamanaev P. A. O chastichnoi neustoychivosti nulevogo resheniya nelineynykh sistem po pervomu priblizheniyu [On partial instability of the zero solution of nonlinear systems by first approximation] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2024. Vol. 26, no. 3. P. 280-293. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202403.280-293 (in Russian)
3. Demidovich B. P. Lektsii po matematicheskoi teorii ustoychivosti [Lectures on mathematical stability theory]. Moscow: Nauka, 1967. 472 p. (in Russian)

УДК 517.54

Инварианты однородных динамических систем произвольного нечетного порядка с диссипацией

Шамолин М.В.

МГУ имени М. В. Ломоносова

Аннотация: Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к четномерному многообразию. При этом силовое поле (генератор сдвига в системе) разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: инвариант динамической системы, существенно особые точки инварианта, система с диссипацией, интегрируемость.

Как известно, нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) [1–3] облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естественен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для них коэффициенты искомых инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4–6]). Наш подход в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимый нетривиальный тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий.

Ранее [5, 7] важные случаи интегрируемых систем с конечным числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались автором. При этом упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. для систем классической механики вполне естественны. Поскольку в работе изучаются системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Исследование «в целом» начинается с изучения приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой ускорение движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, рассматриваются как обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффи-

циенты, линейные по одной из координат касательного пространства (по одной из квазискоростей системы), получим силовое поле (генератор сдвига) с диссипацией разного знака.

Словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» – это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» – это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого – обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В предлагаемой работе силовое поле (генератор сдвига системы) разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых может быть выделена система с конечным числом степеней свободы на своем четномерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

Литература

1. Poincaré H. Calcul des probabilités. Paris: Gauthier-Villars, 1912. 340 p.
2. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93, № 5. С. 763-766.
3. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 2019. Т. 74, № 1(445). С. 117-148.
4. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи математических наук. 1998. Т. 53, № 3. С. 209-210.
5. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2015. Т. 464, № 6. С. 688-692.
6. Шамолин М. В. Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 516, № 1. С. 65-74.
7. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2015. Т. 461, № 5. С. 533-536.

MSC 37J35

Invariants of homogeneous dynamical systems of arbitrary odd order with dissipation

M.V. Shamolin

Lomonosov Moscow State University

Abstract: New cases of integrable dynamical systems homogeneous in terms of variables of arbitrary odd order are presented, in which a system on a tangent bundle to an even-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field (the shear generator in the system) is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of different signs. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both the first integrals and invariant differential forms are given.

Keywords: invariant of a dynamical system, essential singular points of invariant, system with dissipation, integrability

References

1. Poincaré H. Calcul des probabilités [Probability calculus]. Paris: Gauthier-Villars, 1912. 340 p. (in French)
2. Kolmogorov A. N. O dinamicheskikh sistemakh s integral'nym invariantom na tore [On dynamical systems with an integral invariant on the torus] // Doklady AN SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Sciences]. 1953. Vol. 93, No. 5. P. 763-766. (in Russian)
3. Kozlov V. V. Tenzornye invarianty i integrirovanie differentsial'nykh uravnenii [Tensor invariants and integration of differential equations] // Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys]. 2019. Vol. 74, No. 1(445). P. 117-148. (in Russian)
4. Shamolin M. V. Ob integriruemosti v transtsendentnykh funktsiyakh [On integrability in transcendental functions] // Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys]. 1998. Vol. 53, No. 3. P. 209-210. (in Russian)
5. Shamolin M. V. Polnyy spisok pervykh integralov uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole pri nalichii lineynogo dempfirovaniya [Complete list of first integrals of equations of motion of a multidimensional rigid body in a non-conservative field with linear damping] // Doklady RAN [Doklady Mathematics]. 2015. Vol. 464, No. 6. P. 688-692. (in Russian)
6. Shamolin M. V. Invarianty odnorodnykh dinamicheskikh sistem sed'mogo poryadka s dissipatsiey [Invariants of homogeneous dynamical systems of seventh order with dissipation] // Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics]. 2024. Vol. 516, No. 1. P. 65-74. (in Russian)
7. Shamolin M. V. Polnyy spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole [Complete list of first integrals of dynamical equations of motion of a multidimensional rigid body in a

non-conservative field] // Doklady RAN [Doklady Mathematics]. 2015. Vol. 461, No. 5. P. 533-536. (in Russian)

УДК 517.938

О различных типах гиперболических хаотических множеств в возмущенном отображении Аносова*

Шилов О.М., Казаков А.О.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Аннотация: Построен простой пример отображения – двумерный диффеоморфизм, зависящий от двух параметров и демонстрирующий при изменении значений параметров переход от диффеоморфизма Аносова к диффеоморфизму с нульмерным базисным множеством. Найдены границы между этими типами отображений, описаны соответствующие бифуркации.

Ключевые слова: гиперболичность, хаотические седловые множества, DA-отображения.

Доклад посвящен изучению гиперболической динамики двумерных диффеоморфизмов, полученных путем возмущения двумерного отображения Аносова отображением Мёбиуса. Наблюдаются различные типы хаотических режимов (аттрактор/репеллер Аносова, аттрактор/репеллер DA, хаотическое седло) и численно проверяется их гиперболичность. Отображение Мёбиуса зависит от двух параметров, отвечающих за диссипативность и сдвиг координат [1]. На соответствующей плоскости параметров возмущенного отображения, используя методы вычисления показателей Ляпунова и углов между касательными подпространствами [2, 3], мы выделяем области с четырьмя различными типами гиперболической хаотической динамики:

- 1) область с аттрактором/репеллером Аносова (аттрактор и репеллер – весь тор),
- 2) области с DA-аттрактором,
- 3) область с DA-репеллером,
- 4) область с простым аттрактором (устойчивая неподвижная точка), простым репеллером (вполне неустойчивая неподвижная точка).

Первые три области и бифуркации между ними описаны в нашей предыдущей работе [4]. В данной работе мы уделяем особое внимание структуре четвертой области, где показано, что устойчивые и вполне неустойчивые неподвижные точки сосуществуют с хаотическим седловым множеством (седлом), т.е. хаотическим инвариантным множеством, не совпадающим с аттрактором и репеллером. Орбиты, аппроксимирующие хаотические седла, строятся численно с помощью метода, описанного в [5]. Проводится проверка гиперболичности этих множеств. Описываются бифуркации из первых трех областей в область с хаотическим седлом.

Литература

1. Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A. Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020. Vol. 30, no. 7. Art. 073137. DOI: 10.1063/5.0007230
2. Kuptsov P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos // *Physical Review E*. 2012. Vol. 85, no. 1. Art. 015203. DOI: 10.1103/physreve.85.015203

*Исследование осуществлено в рамках проекта «Зеркальные лаборатории НИУ ВШЭ».

3. Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. Vol. 56. P. 227-239. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.08.016
4. Kazakov A., Mints D., Petrova I., Shilov O. On non-trivial hyperbolic sets and their bifurcations in families of diffeomorphisms of a two-dimensional torus // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2024. Vol. 34, no. 8. Art. 083101. DOI: 10.1063/5.0211890
5. Nusse H. E., Yorke J. A. A procedure for finding numerical trajectories on chaotic saddles // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1989. Vol. 36, no. 1-2. P. 137-156. DOI: 10.1016/0167-2789(89)90253-4

MSC 37D20

On different types of hyperbolic chaotic sets in the perturbed Anosov map

O.M. Shilov, A.O. Kazakov

HSE University

Abstract: A simple example of a map has been constructed—a two-dimensional diffeomorphism that depends on two parameters and demonstrates (when the parameter values change) the transition from an Anosov diffeomorphism to a diffeomorphism with a zero-dimensional basic set. The boundaries between these types of maps have been found, and the corresponding bifurcations have been described.

Keywords: hyperbolicity, chaotic saddle sets, DA-map.

References

1. Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A. Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020. Vol. 30, no. 7. Art. 073137. DOI: 10.1063/5.0007230
2. Kuptsov P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos // *Physical Review E*. 2012. Vol. 85, no. 1. Art. 015203. DOI: 10.1103/physreve.85.015203
3. Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2018. Vol. 56. P. 227-239. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.08.016
4. Kazakov A., Mints D., Petrova I., Shilov O. On non-trivial hyperbolic sets and their bifurcations in families of diffeomorphisms of a two-dimensional torus // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2024. Vol. 34, no. 8. Art. 083101. DOI: 10.1063/5.0211890
5. Nusse H. E., Yorke J. A. A procedure for finding numerical trajectories on chaotic saddles // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1989. Vol. 36, no. 1-2. P. 137-156. DOI: 10.1016/0167-2789(89)90253-4

УДК 519.63

Математическое моделирование нестационарного процесса в слое катализатора*

Язовцева О.С., Пескова Е.Е., Митрюхин И.В., Усманова А.А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье представлена математическая модель и вычислительный алгоритм для нестационарного процесса в слое катализатора с учетом формы зерна. В основу явно-неявного вычислительного алгоритма положен принцип расщепления по физическим процессам. Алгоритм исследован на сходимость и устойчивость. Он протестирован на задачах с известным аналитическим решением. Адекватность математической модели проверена сравнением с экспериментальными данными. С использованием разработанных модели и алгоритма проиллюстрирована экспериментально наблюдаемая эффективность динамического режима нестационарного процесса.

Ключевые слова: нестационарные процессы, вычислительный алгоритм, динамический режим.

1. Постановка задачи

Общеизвестными являются вычислительные трудности при решении задач физической химии. В первую очередь это связано с жесткостью систем дифференциальных уравнений, описывающих процесс [1]. При построении вычислительного алгоритма наличие множества разномасштабных процессов располагает к применению принципа расщепления по физическим процессам. В настоящей работе предложен вычислительный алгоритм для исследования математической модели нестационарных процессов в слое катализатора, учитывающей форму зерна, многостадийную гетерогенную кинетику и вынужденный конвективный перенос в порах зерна.

Рассмотрим математическую модель нестационарных процессов в слое катализатора:

$$\frac{\partial c^* \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \xi_T \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{t}^2} = \alpha S_z (\hat{T}_g - \hat{T}) + \frac{\partial}{\partial \hat{l}} \left(\lambda \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{l}} \right) + \frac{a+1}{R^{a+1} \bar{Z}} \int_0^R \int_0^Z \sum_{p=1}^{N_{reac}} Q_p W_p \hat{r}^a d\hat{r} d\hat{z}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon y_m}{\partial \hat{t}} + \xi_y \frac{\partial^2 y_m}{\partial \hat{t}^2} = \frac{1}{\hat{r}^a} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r}^a D^* \frac{\partial y_m}{\partial \hat{r}} - \hat{r}^a \hat{\mu} y_m \right) + (2-a) \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(D^* \frac{\partial y_m}{\partial \hat{z}} - \hat{\mu} y_m \right) + \quad (2)$$

$$+ \sum_{p=1}^{N_{reac}} \nu_{mp} W_p; \quad (3)$$

$$\frac{1}{\hat{r}^a} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \hat{r}^a \hat{\mu} + (2-a) \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \hat{\mu} = \sum_{m=1}^{N_{gas}} \sum_{p=1}^{N_{reac}} \nu_{mp} W_p; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial \hat{t}} = \sum_{p=1}^{N_{reac}} \nu_{mp} W_p, \quad (5)$$

*Исследование выполнено при поддержке РНФ, проект № 25-21-00242.

$$u \frac{\partial c_g \hat{T}_g}{\partial \hat{t}} = \alpha S_z (\hat{T} - \hat{T}_g), \quad (6)$$

$$u \frac{\partial x_m}{\partial \hat{t}} = \beta S_z \left(\frac{1}{R} \int_0^R y_m d\hat{r} \Big|_{\hat{z}=Z} + (2-a) \frac{1}{Z} \int_0^Z y_m d\hat{z} \Big|_{\hat{r}=R} - x_m \right). \quad (7)$$

Здесь t – время, с; y_m , $m = \overline{1, N_{gas}}$ – мольные (объемные) доли компонент газовой фазы реакции, N_{gas} – количество веществ газовой фазы; θ_o , $o = \overline{1, N_{solid}}$ – мольные доли компонент твердой фазы реакции, N_{solid} – количество веществ твердой фазы; $\nu_{m\sigma}$, $\sigma = \overline{1, N_{reac}}$ – стехиометрический коэффициент вещества m в реакции σ , N_{reac} – количество реакций в схеме химических превращений; $\hat{r}$, $\hat{z}$ – координаты вдоль радиуса и оси зерна катализатора, м; $\hat{\mu}$ – скорость вынужденной конвекции, м/с; ε – пористость зерна катализатора; D^* – эффективный коэффициент диффузии, м²/с; c^* – коэффициент объемной теплоемкости, Дж/м³/К; $\hat{T}$ – температура зерна, К; λ^* – эффективный коэффициент теплопроводности зерна, Вт/м/К; Q_j – тепловой эффект реакции, Дж/м³; λ – эффективный коэффициент теплопроводности зерна, Дж/м/К; α – коэффициент теплообмена катализатора и газа в нем, Вт/м²/К; u – скорость движения газа в слое катализатора; S_z – удельная поверхность зерна катализатора, 1/м; a – параметр, отвечающий за форму зерна; ξ_T и ξ_y – малые параметры при гиперболических членах [2, 3].

2. Вычислительные результаты

Вычислительный алгоритм построен на основе принципа расщепления по физическим процессам [3, 4].

1. Химическая кинетика – неявный трехстадийный метод Рунге-Кутты пятого порядка точности с адаптивным шагом по времени.
2. Нагрев катализатора за счет реакций (интегральный член) – методом трапеций.
3. Уравнения диффузии-конвекции-реакции – явная трехслойная по времени разностная схема.
4. Значения концентраций на первом шаге по времени – метод Эйлера с пересчетом.
5. Уравнение теплопроводности – явная трехслойная по времени разностная схема.
6. Уравнения тепломассопереноса – неявные схемы метода Эйлера.
7. Среднеинтегральное концентраций на границе зерна – метод трапеций.
8. Аппроксимация граничных условий для зерна – схема второго порядка по пространству.

Сходимость алгоритма исследована в постановке сгущающихся сеток. Для исследования области его устойчивости применен сеточный принцип максимума [5]. Алгоритм верифицирован на экспериментальных данных, задачах с известным аналитическим решением и сравнением с математическим пакетом.

При исследовании нестационарного процесса окислительной регенерации получена иллюстрация преимущества динамического режима над статическим в части снижения разогревов слоя (рис. 1). Начальная температура слоя катализатора и реакционной смеси 300°C, концентрация кислорода в реакционной смеси – 1%(об.).

Рассмотрены динамические режимы, заключающиеся в изменении температуры реакционной смеси:

- Din1: снижение температуры реакционной смеси на 100°C после 120 с и 240 с

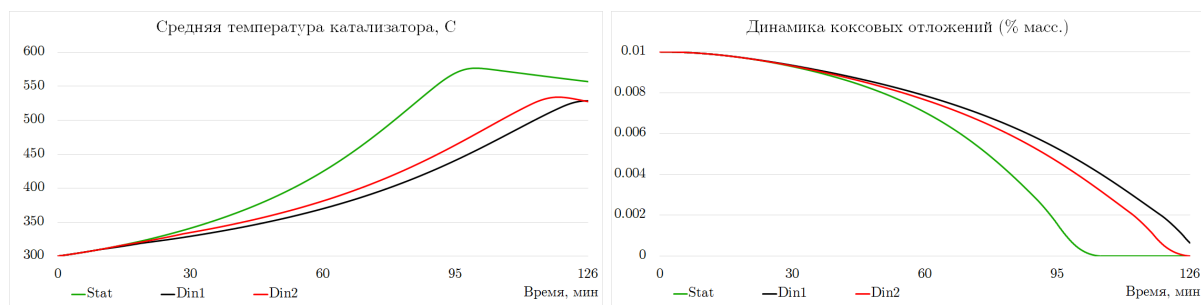


Рис. 1. Температура слоя катализатора

от начала процесса,

– Din2: снижение температуры реакционной смеси на 100°C после 180 с и 360 с от начала процесса.

Из рис. 1 хорошо прослеживается динамика процесса выжиг коксовых отложений. Снижение температуры ведет к падению эффективности, однако, оно существенно снижает разогрев катализатора при использовании режима Din1 на отдельных временных отрезках оно составляет до 100°C , что является существенным снижением для сохранения свойств катализатора при его регенерации.

Литература

1. Слинько М. Г. Моделирование химических реакторов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1968. 95 с.
2. Yazovtseva O. S. Application of hyperbolization in the diffusion model of a heterogeneous process on a spherical catalyst grain // Numerical Analysis and Applications. 2024. Vol. 17, no. 4. P. 384-394.
3. Язовцева О. С., Пескова Е. Е. Математическое моделирование нестационарного химического процесса в зерне катализатора цилиндрической формы // Вычислительные методы и программирование. 2025. Т. 26, № 2. С. 129-139. DOI: 10.26089/NumMet.v26r209.
4. Язовцева О. С. Математическое моделирование нестационарного горения коксовых отложений в слое катализатора со сферической формой зерен // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2025. Т. 65, № 6. С. 1047-1058.
5. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1985. 288 с.

MSC 35Q35

Mathematical modeling of an unsteady process in a catalyst layer

O.S. Yazovtseva, E.E. Peskova, I.V. Mitryukhin, A.A. Usmanova

National Research Mordovia State University

Abstract: The article presents a mathematical model and a computational algorithm for an unsteady process in a catalyst layer, taking into account the grain's shape. The explicit-implicit computational algorithm is based on the splitting by physical processes. The algorithm has been studied for convergence and stability. It has been tested on tasks with a known analytical solution. The adequacy of the mathematical model is verified by comparison with experimental data. Using the developed model and algorithm, the experimentally observed efficiency of the dynamic mode of an unsteady process is illustrated.

Keywords: unsteady processes, computational algorithm, dynamic mode.

References

1. Slinko M. G. Modelirovanie khimicheskikh reaktorov [Modeling of chemical reactors]. Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-nie, 1968. 95 p. (in Russian)
2. Yazovtseva O. S. Application of hyperbolization in the diffusion model of a heterogeneous process on a spherical catalyst grain // Numerical Analysis and Applications. 2024. Vol. 17, no. 4. P. 384-394.
3. Yazovtseva O. S., Peskova E. E. Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnogo khimicheskogo protsessa v zerne katalizatora tsilindricheskoi formy [Mathematical modeling of unsteady chemical process in cylindrical catalyst grain] // Vychislitel'nye metody i programmirovaniye [Numerical Methods and Programming]. 2025. Vol. 26, no. 2. P. 129-139. DOI: 10.26089/NumMet.v26r209. (in Russian)
4. Yazovtseva O. S. Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnogo goreniya kokosovykh otlozhenii v sloe katalizatora so sfericheskoi formoi zeren [Mathematical modeling of unsteady coke deposits combustion in catalyst bed with spherical grains] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2025. Vol. 65, no. 6. P. 1047-1058. (in Russian)
5. Samarskii A. A., Nikolaev E. S. Metody resheniya setochnykh uravnenii [Methods for solving grid equations]. Moscow: Nauka, 1985. 288 p. (in Russian)

MSC 35A01, 35A02, 35A09, 35B45, 35L20, 35L71

Classical Solution of the First Mixed Problem for the Liouville Equation in a Half-Strip

V.I. Korzyuk^{1,2}, J.V. Rudzko²

Belarusian State University¹,
 Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus²

Abstract: We consider a mixed problem for a nonlinear hyperbolic Liouville equation in a half-strip of the plane. We construct the solution in an implicit analytical form as a solution to some coupled integral equations. We prove the solvability of these integral equations using the Leray-Schauder theorem. We derive the corresponding a priori estimate by energy methods. For the problem under consideration, the uniqueness of the solution is proved, and conditions are established under which its classical solution exists.

Keywords: mixed problem, Liouville equation, hyperbolic equation, classical solution, matching conditions.

1. Statement of the problem

In the domain $Q = (0, \infty) \times (0, l)$, where $l > 0$, of two independent variables $(t, x) \in Q \subset \mathbb{R}^2$, we consider the nonlinear equation

$$\partial_{tt}u(t, x) - a^2 \partial_{xx}u(t, x) + \lambda_1(t, x) \exp(\lambda_2 u(t, x)) = 0, \quad (1)$$

where

$$\frac{\lambda_1(t, x)}{\lambda_2} \geq 0, \quad \frac{\partial_t \lambda_1(t, x)}{\lambda_2} \leq 0 \quad (t, x) \in \overline{Q}. \quad (2)$$

Equation (1) is equipped with the initial conditions

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

and the boundary condition

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad (4)$$

where φ and ψ are functions given on the range $[0, l]$.

2. Main results

We formulate the main results as follows.

Theorem 1. *Let the smoothness conditions $\varphi \in C^2([0, l])$, $\psi \in C^2([0, l])$, and $\lambda_1 \in C^1(\overline{Q})$ be satisfied. The first mixed problem (1)–(4) has a unique solution u in the class $C^2(\overline{Q})$ if and only if the matching conditions*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad (5)$$

$$\psi(0) = \psi(l) = 0, \quad (6)$$

$$a^2\varphi''(0) - \lambda_1(0, 0) \exp(\lambda_2\varphi(0)) = 0, \quad (7)$$

$$a^2\varphi''(l) - \lambda_1(0, l) \exp(\lambda_2\varphi(l)) = 0. \quad (8)$$

are satisfied.

P r o o f. The following is the sketch of the proof.

1. Using the energy method, we derive the following apriori estimate

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leq C(\|\psi\|_{L^2([0,l])} + \|\varphi'\|_{L^2([0,l])} + \|\lambda_1(0, \cdot) \exp(\lambda_2\varphi(\cdot))\|_{L^1([0,l])}^{1/2}), \quad (9)$$

where C is some constant depending only on the numbers l , a and λ_2 .

2. We prove that under the smoothness conditions $\varphi \in C^2([0, l])$, $\psi \in C^2([0, l])$, and $\lambda_1 \in C^1(\overline{Q})$ the solution $u \in C^2(\overline{Q^{(0)}})$ of problem (1)–(4) is equivalent to a continuous solution of the integral equation

$$u(t, x) = K[u](t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(0)}}, \quad (10)$$

where

$$Q^{(i)} = \left(\frac{il}{2a}, \frac{(i+1)l}{2a} \right) \times (0, l), \quad i = 0, 1, \dots$$

and $K: C(\overline{Q^{(0)}}) \mapsto C(\overline{Q^{(0)}})$ is a compact continuous operator, if and only if conditions (5)–(8) are satisfied.

3. Using estimate (9), we solve Eq. (10) by the Leray–Schauder fixed point theorem.

4. We prove the uniqueness of a solution to Eq. (10) in the class $C(\overline{Q^{(0)}})$ by contradiction.

5. We extend the constructed solution to problem (1)–(4) sequentially and uniquely to the sets $\overline{Q^{(i)}}$, $i = 1, 2, \dots$ using the conjugation condition. Since $\bigcup_{j=0}^{\infty} \overline{Q^{(j)}} = \overline{Q}$, we obtain

a unique solution to problem (1)–(4) on the set $\overline{Q}$.

T h e p r o o f i s f i n i s h e d.

References

1. Kharibegashvili S. S., Dzhokhadze O. M. Cauchy problem for a generalized nonlinear Liouville equation // Differential Equations. 2011. Vol. 47, no. 12. P. 1763-1775. DOI: 10.1134/S0012266111120069.
2. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Klein-Gordon-Fock Equation in a Half-Strip // Differential Equations. 2014. Vol. 50, no. 8. P. 1098-1111. DOI: 10.1134/S0012266114080068.
3. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential // Differential Equations. 2022. Vol. 58, no. 2. P. 175-186. DOI: 10.1134/S0012266122020056.
4. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant // Differential Equations. 2023. Vol. 59, no. 8. P. 1075-1089. DOI: 10.1134/S0012266123080058.
5. Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer, 1983. 517 p.
6. Trenogin V. A. Functional Analysis. Moscow: FIZMATLIT, 2002. 520 p. (in Russian).

MSC 74H45, 74K05

On one solution of the problem of transverse oscillations of a beam with movable boundaries

V.L. Litvinov¹, K.V. Litvinova²

Samara State Technical University¹, Lomonosov Moscow State University²

Abstract: The problem of oscillations of bodies with movable boundaries, formulated as a differential equation with boundary and initial conditions, is a non-classical generalization of a hyperbolic problem. To facilitate the construction of a solution to this problem and to justify the choice of the solution type, equivalent integro-differential equations with symmetric and non-stationary kernels and non-stationary integration limits are constructed. The advantages of the integro-differential equation method are revealed when moving to more complex dynamic systems carrying concentrated masses oscillating under the action of moving loads. The method is extended to a wider class of model boundary value problems that take into account bending rigidity, resistance of the external environment, and the rigidity of the base of the vibrating object. The solution is given in dimensionless variables with an accuracy of up to the values of the second order of smallness of relatively small parameters characterizing the velocity of the boundary. An approximate solution is found to the problem of transverse vibrations of a viscoelastic beam with bending rigidity, taking into account the action of damping forces.

Keywords: vibrations of systems with moving boundaries, laws of boundary motion, integro-differential equations, amplitude of beam vibrations.

In the field of elastic system dynamics, of particular practical interest are problems related to vibrations of structures whose geometric parameters change over time. Typical examples of such systems are rope mechanisms of lifting devices, flexible elements of transmission mechanisms, drilling rigs, etc. Numerous studies in the field of hoist rope dynamics have revealed the need to develop new approaches to analyzing the behavior of one-dimensional objects with variable geometric characteristics. From a mathematical point of view, such problems require solving hyperbolic equations in domains with changing boundaries. Significant difficulties that arise when describing such systems determine the preferential use of approximate methods of analysis. Among the analytical approaches, the most effective are methods based on special transformations of variables, as well as methods using the principle of superposition of counter wave processes. The approach, which involves the use of complex-valued substitutions of variables, which make it possible to reduce the original problem to an analysis of the Laplace equation, deserves special attention. However, the capabilities of exact analytical methods are significantly limited. Among the approximate methods, the Kantorovich-Galerkin method [1] deserves special attention, as well as the approach developed in this study, based on constructing solutions of integro-differential equations [2, 3]. The proposed method of transforming the initial differential formulation of the problem into an integro-differential form with variable parameters allows to significantly simplify the process of finding a solution. A feature of the developed approach is its efficiency in the analysis of complex dynamic systems containing concentrated masses and subject to the action of moving loads. The paper shows that in the simplest cases, the methods of integral equations do not have significant advantages over classical differential approaches in the study of systems with an infinite number of degrees of freedom. However, when moving to more complex mechanical objects,

such as variable-length beams, the advantages of the integro-differential approach become obvious. The proposed method was successfully applied to a wider class of boundary value problems that take into account the rigidity of the structure during bending, the resistance of the external environment and the elastic properties of the foundation. Particular attention is paid to the analysis of the most common case in practice of the impact of external disturbances on the boundaries of the system. It is shown that for fixed boundary conditions, the constructed integro-differential equations are naturally transformed into classical Fredholm equations of the second kind.

References

1. Litvinov V. L., Anisimov V. N. Application of the Kantorovich-Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids. 2018. No. 2. P. 70-77.
2. Litvinov V. L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020. Vol. 26, no. 2. P. 188-199.
3. Litvinov V. L. Study of free vibrations of mechanical objects with moving boundaries using the asymptotic method // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of Middle Volga Mathematical Society]. 2014. Vol. 16, no. 1. P. 83-88. (in Russian)

MSC 35S15

Linear inverse boundary value problem for equation of small transverse vibrations of a rod in the environment with resistance and integral condition of the first kind

Y.T. Mehraliyev¹, M.B. Mursalova¹, A.A. Mamedov²
 Baku State University¹, Baku Slavic University²

Abstract: In the present paper, a linear inverse boundary value problem with nonlocal integral conditions for equation of the small transverse vibrations of a rod in the environment with resistance is investigated.

Keywords: inverse problem, classical solution, nonlinear integral equation, integro-differential equation.

There are many cases where the needs of the practice bring about the problems of Determining coefficients or the right hand side of differential equations from some knowledge of its solutions. Such problems are called inverse boundary value problems of mathematical physics. Inverse boundary value problems arise in various areas of human activity such as seismology, mineral exploration, biology, medicine, quality control in industry etc., which makes them an active field of contemporary mathematics. Currently, problems with non-local conditions for partial differential equations are of great interest, which is due to the need to generalize the classical problems of mathematical physics in connection with the mathematical modeling of a number of physical processes studied by modern science [1]. Among non-local problems, of great interest are problems with integral conditions. Nonlocal integral conditions describe the behavior of the solution at interior points of the domain in the form of some mean. Examples include problems arising from the study of diffusion of particles in a turbulent plasma [1], the processes of heat propagation [2, 3] of the process of moisture transfer from capillary-simple media [4], as well as the study of some inverse problems of mathematical physics. In [5], a problem with nonlocal in time integral conditions for a hyperbolic equation was considered. In [6], an inverse boundary value problem with an unknown time-dependent coefficient was investigated for a fourth-order Boussinesq equation with nonlocal second-order integral in time.

Consider the equation [7]

$$u_{tt}(x, t) + 2\alpha u_t(x, t) + \gamma u_{xxxx}(x, t) = a(t)g(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

in the domain $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ in the domain of an inverse boundary value problem with initial conditions

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

the boundary conditions

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = u_{xxx}(0, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

nonlocal integral condition

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

and with the additional conditions

$$u(0, t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5)$$

where $\alpha > 0, \gamma > 0$ - given numbers, $f(x, t), g(x, t), \phi(x), \psi(x), h(t)$, – given functions, $u(x, t)$ and $a(t)$ - desired functions.

Denote

$$\tilde{C}^{\sim 4,2}(D_T) = \{u(x, t) : u(x, t) \in C^{2,2}(D_T), u_{xxxx}(x, t) \in C(D_T)\}.$$

Definition 1. The classical solution of the inverse boundary value problem (1)-(4) is the pair $\{u(x, t), a(t)\}$ of functions $u(x, t) \in \tilde{C}^{\sim 4,2}(D_T)$ and $a(t) \in C[0, T]$ satisfying equation (1) in D_T , condition (2) in $[0, 1]$ and conditions (3)-(4) in $[0, T]$.

The following theorem is true.

Theorem 2. Assume that $f(x, t), g(x, t) \in C(D_T)$, $\phi(x), \psi(x) \in C[0, 1]$, $h(t) \in C^2[0, T]$ $g(0, t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$), and the compatibility conditions

$$\int_0^1 \phi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \phi(0) = h(0), \psi(0) = h'(0)$$

holds. Then the problem of finding a classical solution of (1)-(5) is equivalent to the problem of determining the functions $u(x, t) \in \tilde{C}^{\sim 4,2}(D_T)$ and $a(t) \in C[0, T]$, satisfying the conditions (1)-(3) and the relation

$$u_{xxx}(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

$$h''(t) + 2\alpha h'(t) + \gamma u_{xxxx}(0, t) = a(t)g(0, t) + f(0, t) \quad (7)$$

After applying the formal scheme of the Fourier method, finding the first component $u(x, t)$ of any solution $\{u(x, t), a(t)\}$ to problem (1)-(3), (6), (7) reduces to solving the following integro-differential equation:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \phi_0 + \frac{1}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\psi_0 + \frac{1}{2\alpha} \int_0^1 (1 - e^{-2\alpha(1-t)})F_0(\tau; a)d\tau + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ e^{-\alpha t} \left[\varphi_k \left(\cos \beta_k t + \frac{\alpha}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\beta_k - \alpha} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} F_k(\tau; a) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \right\} \cos \lambda_k x. \quad (8) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} F_k(t; a) = & a(t)g_k(t) + f_k(t), \quad f_k(t) = m_k \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx, \quad g_k(t) = m_k \int_0^1 g(x, t) \cos \lambda_k x dx, \\ \varphi_k = & m_k \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_k = m_k \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \lambda_k = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$\beta_k = \sqrt{\gamma\lambda_k^4 - \alpha} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \pi^4\gamma - \alpha > 0, \quad m_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 2 & k = 1, 2, \dots \end{cases}.$$

Further, using equation (8), from condition (7) to determine the second component of any solution $\{u(x, t), a(t)\}$ of problem (1)-(3), (6), (7) we obtain the following nonlinear integral equation:

$$a(t) = [g(0, t)]^{-1} \{h''(t) + 2\alpha h'(t) - f(0, t) + \\ + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 \left[e^{-\alpha t} \left(\varphi_k \left(\cos \beta_k t + \frac{\alpha}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_k - \alpha} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} F_k(\tau; a) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \right] \}. \quad (9)$$

Thus, the solution of problem (1)-(3), (6), (7) was reduced to the solution of system (8),(9), with respect to the unknown functions $u(x, t)$ and $a(t)$.

The following Theorems hold:

Theorem 3. *Let us assume that the given data conditions (1)-(3), (6),(7) satisfy the following relations :*

1. $\phi(x) \in C^4[0, 1]$, $\phi^{(5)}(x) \in L_2(0, 1)$ u $\phi'(0) = \phi'(1) = \phi'''(0) = \phi'''(1) = 0$;
2. $\psi(x) \in C^2[0, 1]$, $\psi'''(x) \in L_2(0, 1)$ u $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$;
3. $f(x, t), f_x(x, t), f_{xx}(x, t) \in C(D_T)$, $f_{xxx}(x, t) \in L_2(D_T)$ and $f_x(0, t) = f_x(1, t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$);
4. $g(x, t), g_x(x, t), g_{xx}(x, t) \in C(D_T)$, $g_{xxx}(x, t) \in L_2(D_T)$ and $g_x(0, t) = g_x(1, t) = 0$, $g(0, t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$);
5. $h(t) \in C^2[0, T]$ $\alpha > 0, \gamma > 0, \pi^4\gamma - \alpha > 0$.

Then there exist the unique solution $u(x, t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T)$ $a(t) \in C[0, T]$ of the problem (1)-(3),(6),(7).

Theorem 4. *Let all conditions of Theorem 2 fulfilled , $\int_0^1 f(x, t)dx = 0$, $\int_0^1 g(x, t)dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$) , $\int_0^1 \phi(x)dx = 0$, $\int_0^1 \psi(x)dx = 0$, $\phi(0) = h(0)$, $\psi(0) = h'(0)$.*

Then there exists the unique classic solution $u(x, t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0, T]$ of the problem (1)-(5).

References

1. Samara A. A. On some problems of the theory of differential equations // Differential Equations. 1980. Vol. 16, no. 11. P. 1925-1935.
2. Cannon J. R. The solution of energy equation to the energy of Quart // Applied Mathematics. 1963. Vol. 5, no. 21. P. 1555-1560.
3. Ionkin N. I. The solution of a boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition // Differential Equations. 1977. Vol. 13, no. 2. P. 294-304.

4. Nakhushev A. M. About one approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its approximation to the dynamics of soil moisture and groundwater // Differential Equations. 1982. Vol. 18, no. 1. P. 72-81.
5. Kirichenko S. V. On a boundary value problem with nonlocal in time conditions for a one-dimensional hyperbolic equation // Bulletin of Samara University. Natural Science Series. 2013. No. 6(107). P. 31-39.
6. Megraliev Ya. T., Alizade F. Kh. An inverse boundary value problem for a fourth-order Boussinesq equation with nonlocal integral conditions of the second kind // Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2016. Vol. 26, no. 4. P. 503-514.
7. Budak B. M., Samarskii A. A., Tikhonov A. N. Collection of Problems in Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1972. 688 p.

MSC 49J15

Cash Management Using ODE-Based Modeling

G. Zanko

National Research University Higher School of Economics (SPb)

Abstract: In this short communication paper a continuous-time model for dynamic corporate cash management is presented, utilizing the principles of optimal control theory. The evolution of a company's liquidity position is formulated through a system of Ordinary Differential Equations (ODEs) that correctly distinguishes between stocks (cash, debt, investments) and flows (rates of borrowing and investment). The problem is framed to minimize financing costs and maximize investment returns over a finite horizon. By applying Pontryagin's Maximum Principle, the necessary conditions for optimal financial interventions are derived. The resulting control policies are threshold-based strategies, dynamically guided by the economic shadow prices of cash, debt, and invested capital. This framework provides a financially intuitive and mathematically sound foundation for proactive liquidity management, bridging theoretical control theory with practical corporate finance.

Keywords: ordinary differential equations, cash management, optimal control.

1. Introduction

Effective liquidity management is paramount for corporate stability and growth. A firm must continuously balance its cash reserves to cover operational expenses, mitigate risks, and seize investment opportunities. An optimized cash balance is crucial for covering operational costs, financing investments, and hedging against uncertainties. Traditional, discrete-time financial models often fail to capture the high-frequency dynamics of cash flows, limiting their utility to historical analysis or long-term forecasting rather than real-time decision support. These methods primarily offer historical snapshots, serving as reactive or forecasting tools rather than real-time control instruments.

To address this gap, a continuous-time modeling approach is proposed, utilizing a system of Ordinary Differential Equations (ODEs). This allows for a granular representation of the interplay between operational cash flows, short-term borrowing, and investment activities. The central challenge lies in determining the optimal timing and magnitude of these financial interventions to achieve a specific corporate objective, such as minimizing costs or maximizing terminal value. This shifts financial management from reactive to proactive, providing a strategic advantage in dynamic economic environments.

This problem is naturally formulated as one of optimal control. By defining the company's financial state with a set of state variables and its actions (borrowing, investing) as control variables, a policy can be sought that optimizes a predefined objective functional. Pontryagin's Maximum Principle provides the mathematical machinery to solve such problems, yielding a set of necessary conditions that the optimal policy must satisfy. Thus, an ODE-based model is proposed for a company's daily cash balance.

2. The Dynamic System Model

To accurately model the system, a clear distinction between stocks and flows is essential. The financial state of the company at any given time t is comprehensively

described by three state variables:

- $C(t)$: The cash balance.
- $B(t)$: The total outstanding short-term debt.
- $I(t)$: The total capital allocated to short-term investments.

The company can influence these states through four control variables:

- $u_B(t) \geq 0$: The rate of new borrowing.
- $u_P(t) \geq 0$: The rate of debt repayment.
- $u_I(t) \geq 0$: The rate of new investment.
- $u_S(t) \geq 0$: The rate of selling/liquidating investments.

The system's dynamics are governed by the following system of ODEs:

$$\frac{dC}{dt} = R(t) - E(t) - r_B B(t) + r_I I(t) + u_B(t) - u_P(t) - u_I(t) + u_S(t) \quad (1)$$

$$\frac{dB}{dt} = u_B(t) - u_P(t) \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = u_I(t) - u_S(t) \quad (3)$$

where:

- $R(t)$ and $E(t)$ are the exogenous rates of revenue and expenses.
- r_B is the interest rate on outstanding debt (a cost).
- r_I is the rate of return on invested capital (a gain).

This formulation correctly applies interest rates r_B and r_I to the stocks of debt $B(t)$ and investments $I(t)$, respectively. The controls are subject to constraints, such as non-negativity and upper bounds, and the state variables must also satisfy constraints (e.g., $C(t) \geq 0$, $B(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$).

3. The Optimal Control Problem

The objective is to manage liquidity over a finite horizon $[0, T]$ to maximize the terminal value of the firm, which we can equate to maximizing net assets. This is equivalent to minimizing a cost functional J :

$$J = \int_0^T (r_B B(t) - r_I I(t)) dt - C(T) \quad (4)$$

The integrand $L = r_B B(t) - r_I I(t)$ represents the net financing cost at time t . The terminal cost $\Phi(C(T)) = -C(T)$ ensures the objective is to maximize the final cash balance, assuming terminal debt and investments can be settled.

4. Application of the Pontryagin's Maximum Principle

To derive the optimal control policy, the Hamiltonian H is defined:

$$H = L + \lambda_C \frac{dC}{dt} + \lambda_B \frac{dB}{dt} + \lambda_I \frac{dI}{dt} \quad (5)$$

where $\lambda_C(t)$, $\lambda_B(t)$, and $\lambda_I(t)$ are the adjoint variables (or shadow prices) associated with cash, debt, and investments.

Substituting the dynamics from Equations (1)-(3) and the cost function L :

$$\begin{aligned}
 H = & (r_B B(t) - r_I I(t)) \\
 & + \lambda_C (R(t) - E(t) - r_B B(t) + r_I I(t) + u_B - u_P - u_I + u_S) \\
 & + \lambda_B (u_B - u_P) + \lambda_I (u_I - u_S). \quad (6)
 \end{aligned}$$

The adjoint equations are given by $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ for each state x :

$$\frac{d\lambda_C}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial C} = 0 \implies \lambda_C(t) = \text{const}, \quad (7)$$

$$\frac{d\lambda_B}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial B} = -(r_B - \lambda_C r_B) = -r_B(1 - \lambda_C), \quad (8)$$

$$\frac{d\lambda_I}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I} = -(-r_I + \lambda_C r_I) = r_I(1 - \lambda_C), \quad (9)$$

with the transversality conditions at time T :

$$\lambda_C(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial C(T)} = -(-1) = 1,$$

$$\lambda_B(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial B(T)} = 0,$$

$$\lambda_I(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial I(T)} = 0.$$

From $\lambda_C(T) = 1$ and $\dot{\lambda}_C = 0$, we have $\lambda_C(t) = 1$ for all $t \in [0, T]$. This simplifies the other adjoint equations: $\dot{\lambda}_B = 0$ and $\dot{\lambda}_I = 0$. With their terminal conditions, we get $\lambda_B(t) = 0$ and $\lambda_I(t) = 0$. This result is an artifact of the simplified cost function. A more complex model with transaction costs or non-linear rates would yield dynamic shadow prices.

Let's re-group the Hamiltonian by controls to find the optimal policies:

$$H = \dots + (\lambda_C + \lambda_B)u_B - (\lambda_C + \lambda_B)u_P + (\lambda_I - \lambda_C)u_I - (\lambda_I - \lambda_C)u_S \quad (10)$$

To minimize H , the controls must be chosen based on the signs of their respective coefficients (the switching functions):

- **Borrowing** (u_B): The coefficient is $(\lambda_C + \lambda_B)$. To minimize H , if $\lambda_C + \lambda_B < 0$, means borrowing at the maximum rate. If $\lambda_C + \lambda_B > 0$, means refraining from borrowing ($u_B = 0$). This means borrowing only if the marginal value of cash ($-\lambda_C$) is greater than the marginal cost of debt (λ_B).
- **Repayment** (u_P): The coefficient is $-(\lambda_C + \lambda_B)$. To minimize H , if $-(\lambda_C + \lambda_B) < 0$, means repayment at the maximum rate. This is the opposite condition to borrowing.
- **Investment** (u_I): The coefficient is $(\lambda_I - \lambda_C)$. Investment ($u_I > 0$) if $\lambda_I - \lambda_C < 0$, i.e., if $\lambda_C > \lambda_I$. This means investment only if the marginal value of cash is greater than the marginal value of the investment. This is financially logical: cash is converted to an investment if the investment is "cheaper" (has a lower shadow price) than cash.
- **Liquidation** (u_S): The coefficient is $-(\lambda_I - \lambda_C)$. Investment liquidation ($u_S > 0$) if $-(\lambda_I - \lambda_C) < 0$, i.e., if $\lambda_I > \lambda_C$. Investments should be converted back into cash when their value exceeds that of holding cash.

5. Conclusion

This short communication paper demonstrates the utility of an ODE-based optimal control framework for dynamic cash management via formulation of a mathematically sound and financially intuitive optimal control model for corporate cash management. By accurately defining the state dynamics and objective function, control policies that align with fundamental economic principles are derived. The framework demonstrates that decisions regarding borrowing, investment, and repayment should be governed by the relative shadow prices of cash, debt, and invested capital. Pontryagin's Maximum Principle yields necessary conditions for these policies, often leading to dynamic threshold strategies, providing a robust foundation for corporate financial engineering.

While this deterministic model provides a strong foundation, future work should incorporate stochastic elements for revenues, expenses, and market rates. This would lead to a stochastic optimal control problem, likely requiring solution via Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations. Nonetheless, the presented ordinary differential equation (ODE)-based framework serves as a crucial first step in building quantitative, proactive tools for corporate financial engineering. Future work could integrate this model with broader corporate finance decisions (e.g., capital budgeting, dividend policy) for a holistic financial management framework.

References

1. Butcher J. C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Chichester: Wiley, 2016. 512 p. DOI: 10.1002/9781119121534
2. Décamps J.-P., Villeneuve S. Learning about profitability and dynamic cash management // Journal of Economic Theory. 2022. Vol. 205. P. 105522. DOI: 10.1016/j.jet.2022.105522
3. Duffy D. J. Finite Difference Methods in Financial Engineering. Chichester: Wiley, 2006. 480 p. DOI: 10.1002/9781118673447
4. Lakner P., Reed J. Optimal cash management using impulse control // Indagationes Mathematicae. 2023. Vol. 34, no. 5. P. 1181-1205. DOI: 10.1016/j.indag.2023.06.008
5. Lee C.-F., Shi J. Application of Alternative ODE in Finance and Economics Research // Handbook of Quantitative Finance and Risk Management. Boston: Springer US, 2010. P. 1293-1300. DOI: 10.1007/978-0-387-77117-5_85

Научное электронное издание

**Дифференциальные уравнения и их приложения
в математическом моделировании**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XVII МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

Саранск
29 — 31 июля 2025 г.

Редакторы: Язовцева О. С., Пескова Е. Е.
Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 14.29
Подписано в печать 28.07.2025

Средне-Волжское математическое общество
Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
430005, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68

