УДК 517.9

К вопросу об исследовании вынужденных колебаний цепочки трех связанных осцилляторов вблизи резонанса

Шаманаев П.А., Катин Д.А., Ошина Н.В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В настоящей работе методом Ляпунова-Шмидта исследуется математическая модель колебаний в цепочке трех связанных осцилляторов вблизи резонанса с малым параметром при условии, что на систему действует внешняя периодическая сила с двумя соизмеримыми частотами. Разработанный на основе метода Ляпунова-Шмидта алгоритм реализован в математической библиотеке SymPy Python. Приведен пример, который показывает, что если специальным образом подобрать параметры малого возмущения, то компоненты решения возмущенной системы имеет полюс в точке $\varepsilon = 0$.

Ключевые слова: цепочка связанных осцилляторов, вынужденные колебания, периодические решения, малый параметр, метод Ляпунова-Шмидта, резонанс.

В работах [1–3] приведены результаты исследования вынужденных колебаний одного и двух связанных осцилляторов вблизи резонанса с малым параметром методом Ляпунова-Шмидта [4].

В настоящей работе исследуется математическая модель колебаний в цепочке трех связанных осцилляторов [5]

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -(k_1+k_2)q_1 + k_2q_2 + F(t), \\ m\ddot{q}_2 = k_2q_1 - (k_2+k_3)q_2 + k_3q_3, \\ m\ddot{q}_3 = k_3q_2 - (k_3+k_4)q_3, \end{cases} \tag{1}$$

где q_i $(i = 1, ..., 3)$ – обобщенные координаты, $k_i > 0$ $(i = 1, ..., 4)$ – коэффициенты жесткости пружин, m – масса каждого осциллятора, $F_1(t)$ – внешняя периодическая сила, действующая по следующему закону

$$F(t) = r_1 \sin(p_1 t + \theta_1) + r_2 \sin(p_2 t + \theta_2), \tag{2}$$

где r_i, θ_i, $p_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2)$, $p_1 = \alpha p_2$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Предполагая, что в системе (1) для коэффициентов жесткости пружин справедливы формулы

$$k_i = k + m d_i \varepsilon, \quad i = 1, ..., 4,$$

где d_i – некоторые вещественные параметры, ε – малый вещественный параметр, и вводя новую переменную

$$\omega_0^2 = 4\frac{k}{m},$$

систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\left(\dfrac{\omega_0^2}{2} + (d_1+d_2)\varepsilon\right) q_1 + \left(\dfrac{\omega_0^2}{4} + d_2\varepsilon\right) q_2 + \dfrac{1}{m}F(t), \\ \ddot{q}_2 = -\left(\dfrac{\omega_0^2}{4} + d_2\varepsilon\right) q_1 - \left(\dfrac{\omega_0^2}{2} + (d_1+d_2)\varepsilon\right) q_2 + \left(\dfrac{\omega_0^2}{4} + d_3\varepsilon\right) q_3, \\ \ddot{q}_3 = -\left(\dfrac{\omega_0^2}{4} + d_2\varepsilon\right) q_1 - \left(\dfrac{\omega_0^2}{4} + d_3\varepsilon\right) q_2 - \left(\dfrac{\omega_0^2}{2} + (d_3+d4)\varepsilon\right) q_3. \end{cases} \tag{3}$$

Сформулируем задачу для системы (3) [4]: при достаточно малых вещественных ε найти $\frac{2\pi}{p_1}$ – периодическое решение $\{q_i(t,\varepsilon)\}_{i=1}^3$ системы (3). Если найденное решение удовлетворяет условию $q_i(t,0) = Q_i(t)$, где $\{Q_i(t)\}_{i=1}^3$ есть $\frac{2\pi}{p_1}$ – периодическое решение системы

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 = -\dfrac{\omega_0^2}{2}Q_1 + \dfrac{\omega_0^2}{4}Q_2 + \dfrac{1}{m}F(t), \\ \ddot{Q}_2 = \dfrac{\omega_0^2}{4}Q_1 - \dfrac{\omega_0^2}{2}Q_2 + \dfrac{\omega_0^2}{4}Q_3, \\ \ddot{Q}_3 = \dfrac{\omega_0^2}{4}Q_2 - \dfrac{\omega_0^2}{2}Q_3, \end{cases} \tag{4}$$

то поставленную задачу будем называть задачей Пуанкаре, а найденное решение – решением задачи Пуанкаре.

Будем предполагать, что для системы (4) выполняется условие резонанса, а, именно, одна из собственных частот совпадает с одной из внешних частот колебаний.

Для нахождения $\frac{2\pi}{p_1}$–периодического решения к системе (3) применен метод Ляпунова-Шмидта, изложенный в [3]. В качестве примера рассмотрена система (3) со следующими параметрами

$$\begin{gathered} k = 2, \quad m = 1, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 4, \\ d_1 = -1, \quad d_2 = 2, \quad d_3 = -2, \quad d_4 = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

В этом случае частоты собственных колебаний системы (4) равны

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \sqrt{4+2\sqrt{2}}, \quad \omega_3 = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

и выполняется условие резонанса $\omega_1 = p_1 = 2$.

В результате проведения вычислительного эксперимента в математической библиотеке SymPy Python для системы (1) с параметрами (5) получены следующие компоненты π-периодического решения

$$\begin{aligned} q_1(t,\varepsilon) &= -\frac{1}{8\,\varepsilon^2}\left(2\sqrt{2}\,\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon + \sqrt{2}\right) r_1 \sin(2t+\theta_1) + r_2\,\eta_1(\varepsilon)\sin(4t+\theta_2), \\ q_2(t,\varepsilon) &= -\frac{1}{8\,\varepsilon}\left(\sqrt{2}\,\varepsilon + 1\right) r_1 \sin(2t+\theta_1) + r_2\,\eta_2(\varepsilon)\sin(4t+\theta_2), \\ q_3(t,\varepsilon) &= \frac{\sqrt{2}}{8\,\varepsilon^2}\left(1 - 2\varepsilon^2\right) r_1 \sin(2t+\theta_1) + r_2\,\eta_3(\varepsilon)\sin(4t+\theta_2), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\eta_i(\varepsilon)$ $(i = 1, ..., 3)$ – некоторые непрерывные функции аргумента ε в достаточно малой окрестности нуля.

Из формул (6) следует, что компоненты $q_i(t,\varepsilon)$ π-периодического решения системы (1) удовлетворяют следующим условиям:

1) компоненты $q_i(t,\varepsilon)$ непрерывно зависят от параметров r_k, θ_k $(k = 1, 2)$ внешних сил (2);

2) компоненты $q_1(t,\varepsilon)$ и $q_3(t,\varepsilon)$ имеет полюс второго порядка в точке $\varepsilon = 0$;

3) компонента $q_2(t,\varepsilon)$ имеет полюс первого порядка в точке $\varepsilon = 0$.

Литература

1. Кадрякова М. Р., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О периодических решениях одного класса линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром в резонансном случае // Огарев-online. 2017. № 13. С. 8–17 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/operiodicheskix-resheniyax-odnogo-klassa-linejnyx-neodnorodnyx-sistemobyknovennyx-differencialnyx-uravnenij-s-malym-parametrom-v-rezonansnomsluchae (дата обращения: 10.07.2024).

2. Шаманаев П. А., Прохоров С. А. Исследование вынужденных колебаний линейной системы с двумя степенями свободы и малым параметром методом Ляпунова–Шмидта // Огарев-online. 2021. № 12. С. 83–91 [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-linejnoj-sistemy-s-dvumya-stepenyami-svobody-i-malym-parametrom-metodom-lyapunovashmidta (дата обращения: 30.07.2023).

3. Шаманаев П. А., Осипов Д. А. К вопросу об исследовании вынужденных колебаний линейной системы двух связанных осцилляторов вблизи резонанса [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: сборник материалов XVI Международной научной конференции. (Саранск, 17-20 августа 2023 г.). Саранск: СВМО, 2023. С. 256–261. Режим доступа: https://conf.svmo.ru/files/2023/papers/paper41.pdf. - Дата обращения: 10.07.2024.

4. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 1. С. 45–53.

5. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1997. 495 с.

MSC 34C10, 34C25

Study of forced oscillations of a chain of three coupled oscillators near resonance

P.A. Shamanaev, D.A. Katin, N.V. Oshina
National Research Mordovia State University

Abstract: The Lyapunov-Schmidt method is used to study a mathematical model of oscillations in a chain of three coupled oscillators near a resonance with a small parameter, provided that the system is acted upon by an external periodic force with two commensurate frequencies. The algorithm developed based on the Lyapunov-Schmidt method is implemented in the SymPy Python mathematical library. An example is given that shows that if the parameters of a small perturbation are selected in a special way, then the solution components of the perturbed system have a pole at the point $\varepsilon = 0$.

Keywords: chain of coupled oscillators, forced oscillations, periodic solutions, small parameter, Lyapunov-Schmidt method, resonance.

References

1. Kadryakova M. R., Loginov B. V., Shamanaev P. A. [On periodic solutions for a class of linear inhomogeneous systems of ordinary differential equations with small parameter in resonance case] // Ogarev-online. 2017. Issue 13. P. 8–17. URL: http://journal.mrsu.ru/arts/operiodicheskix-resheniyax-odnogo-klassa-linejnyx-neodnorodnyx-sistemobyknovennyx-differencialnyx-uravnenij-s-malym-parametrom-v-rezonansnomsluchae (access date: 30.07.2023). (In Russian).

2. Shamanaev P. A., Prokhorov S. A. [Investigation of forced vibrations of a linear system with two degrees of freedom and a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method] // Ogarev-online. 2021. Issue 12. P. 83–91. URL: https://journal.mrsu.ru/arts/issledovanie-vynuzhdennyx-kolebanij-linejnoj-sistemy-s-dvumya-stepenyami-svobody-i-malym-parametrom-metodom-lyapunovashmidta (access date: 30.07.2023). (In Russian).

3. Shamanaev P. A., Osipov D. A. [On the question of studying forced vibrations of a linear system of two coupled oscillators near resonance] Electronic resource. Proceedings of the XVI International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling". (Saransk, July 17-20, 2023). Saransk: SVMO Publ, 2023. P. 256–261. Available at: https://conf.svmo.ru/files/2023/papers/paper41.pdf. Date of access: 22.07.2024. (In Russian).

4. Kyashkin A. A., Loginov B. V., Shamanaev P. A. [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator in the derivative and the disturbance in the form of small linear term] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2016. Vol. 18, No. 1. P. 45–53 (In Russian).

5. Landa P. S. Nonlinear oscillations and waves [Nonlinear oscillations and waves]. Moscow: Nauka, FIZMATLIT, 1997. 495 p. (In Russian).