

УДК 519.64

Итерационные методы решения квадратичных интегральных уравнений I рода

Тында А.Н.

ФГБОУ ВО Пензенский государственный университет

Аннотация: Работа посвящена построению численных методов решения квадратичных интегральных уравнений Вольтерра. Предложены два итерационных численных метода, один из которых основан на линеаризации интегрального оператора по модифицированной схеме Ньютона-Канторович, а второй содержит параметр регуляризации и обладает сглаживающими свойствами.

Ключевые слова: квадратичные интегральные уравнения, численные метод, линеаризация, регуляризация.

В начале прошлого столетия итальянским математиком Вито Вольтерра было введено [1] понятие интегро-степенного ряда

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t K_n(t, s_1, s_2, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

В развернутом виде

$$y(t) = \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 + \\ + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3 + \cdots, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Запись (1) можно рассматривать как математическую модель вида «вход-выход» для нелинейной динамической системы. В этом случае ядра $K_1(t, s)$, $K_2(t, s_1, s_2)$, ... играют роль переходных характеристик, учитывающих динамические нелинейности системы с одним входом $x(t)$ и одним выходом $y(t)$.

Моделирование различных нелинейных динамических объектов с помощью полиномов Вольтерра основывается на теореме Фреше, которая является континуальным аналогом теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами.

Основные направления исследований:

- задачи идентификации;
- исследование полилинейных интегральных уравнений.

Частные случаи:

1. $N = 1$. Классическое линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода.

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

2. $N = 2$. Квадратичное (билинейное) интегральное уравнение Вольтерра.

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Классические уравнения вида (3) с различного рода ядрами в различных пространствах достаточно хорошо изучены, разработан широкий спектр методов с регуляризацией [2].

Уравнения с ядрами, терпящих разрывы вдоль семейства гладких кривых (слабо-регулярные уравнения Вольтерра I рода), классифицированы Д.Н. Сидоровым [3,4] и активно изучались многими авторами в течение последнего десятилетия [5,6]. Модели Вольтерра с такими ядрами находят применение при моделировании различных динамических процессов, включая системы накопителей энергии [6].

Среди работ, посвященных изучению интегральных уравнений вида (4), необходимо отметить серию работ А.С. Апарцина [7,8].

Настоящая работа посвящена разработке численных схем решения квадратичного интегрального уравнения Вольтерра (4). Предлагается два итерационных численных метода, один из которых основан на линеаризации интегрального оператора, а второй обладает сглаживающими свойствами.

Литература

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1982. 304 с.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986. 543 с.
3. Sidorov D.N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel // Diff. Equat. 2013. 49. P. 210–216.
4. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In:L. O. CHUA, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 2015.
5. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. 313. P. 119–128.
6. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation // Mathematics. 2020. 8, 1257.
7. Апарцин А.С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы // Известия Иркутского гос. ун-та. Серия Математика. 2007. № 1. С. 13–41.
8. Апарцин А.С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // ЖВМиМФ. 2007. Т. 47, № 8. С. 1380–1388.
9. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional Analysis. Pergamon, 2nd edition, 1982. 589 p.

MSC 65R20

Iterative methods for solving quadratic integral equations of the first kind

A.N. Tynda

Penza State University

Abstract: The paper is devoted to the construction of numerical methods for solving quadratic integral Volterra equations. Two iterative numerical methods are proposed, one of which is based on the linearization of the integral operator according to the modified Newton-Kantorovich scheme, and the second contains a regularization parameter and has smoothing properties.

Keywords: quadratic integral equations, numerical method, linearization, regularization

References

1. Volterra V. Theory of functionals, integral and integro-differential equations. Moscow: Nauka, 1982. 304 p. (in Russ.)
2. Verlan A.F., Sizikov V.S. Integral equations: methods, algorithms, programs. Handbook. Kiev: Naukova Dumka, 1986. 543p. (in Russ.)
3. Sidorov D.N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel // Diff. Equat. 2013. 49. P. 210–216.
4. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In: L. O. CHUA, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 2015 .
5. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. 313. P. 119–128.
6. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation // Mathematics. 2020. 8, 1257.
7. Apartsin A.S. Polilinear Integral Volterra Equations of the First Kind: Elements of the Theory and Numerical Methods // Izv. Irkut. Gos. Univ., Ser. Mat. 2007. 1. P. 13–42 (in Russ.)
8. Apartsin A.S. On the convergence of numerical methods for solving a Volterra bilinear equations of the first kind // Comput. Math. and Math. Phys. 2007. Vol. 47. P. 1323–1331. <https://doi.org/10.1134/S0965542507080106>
9. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional Analysis. Pergamon, 2nd edition, 1982. 589 p.