УДК 519.6

Стохастическое моделирование хрупкого разрушения материалов с рывковой динамикой трещин*

Сибатов Р.Т.[1,2], Морозова Е.В.[2], Тимкаева Д.А.[2]

НПК «Технологический центр»[1],
Ульяновский государственный университет[2]

Аннотация: Многочисленные эксперименты продемонстрировали, что хрупкое разрушение материалов обладает масштабно-инвариантными свойствами. Наблюдается рывковая динамика трещин со случайным импульсным выделением энергии, распределенной по степенному закону в широком диапазоне значений. Для описания хрупкого разрушения материалов с масштабно-инвариантными свойствами предложен случайный процесс, представляющий собой смесь процесса Орнштейна-Уленбека и односторонних полетов Леви, где первый – соответствует пуассоновскому потоку событий деградации, а второй – описывают перемежаемую динамику роста трещины. Поток событий приращения длины трещины управляется дробным пуассоновским процессом, а вклад этих событий в разрушение системы следует степенному закону распределения. Предложен критерий для прогноза гарантированного срока службы материала без разрушения.

Ключевые слова: хрупкое разрушение, случайный процесс, дробная производная, полёты Леви, перемежаемость.

1. Введение

Множество экспериментов показали, что хрупкое разрушение в материалах проявляет масштабно-инвариантные свойства [1]. В частности, системы разрушения проявляют рывковую динамику трещин со случайным импульсным высвобождением энергии. Распределение энергии этих дискретных событий имеет степенной вид, который охватывает множество порядков величины. Эти наблюдения являются общими для многих материалов. Они не могут быть описаны стандартной теорией непрерывных сред. На динамику роста трещины оказывают влияние множество физических процессов, таких как диффузия, пластическая деформация, диссипация энергии и взаимодействие с окружающей средой. В статье [1] представлен критический обзор экспериментов и результатов моделирования кинетики роста трещины. Ключевым результатом является обнаружение универсальных масштабных закономерностей, независимых как от конкретного материала, так и от условий нагружения, что напоминает область критических явлений.

Часто наблюдается [2] также, что подкритический рост трещины носит перемежаемый характер. Существуют периоды покоя, во время которых кончик трещины закрепляется и не движется, а также моменты, когда трещина внезапно открывается и продвигается на определенное расстояние s. Трещина продвигается скачками, пока не достигнет критической длины L_c, после чего лист материала разрушается. Подкритический рост трещины наблюдают путем приложения постоянной силы F

*Работа выполнена в рамках проекта РНФ (грант 22-11-00036).

так, чтобы значение фактора интенсивности напряжений $K(L_i)$ было меньше критического порога разрушения материала K_c, при превышении которого происходит быстрое распространение трещины [2].

В данной работе для описания хрупкого разрушения материалов с масштабно-инвариантными свойствами предложен случайный процесс, который является смесью процесса Орнштейна–Уленбека и односторонних полетов Леви. Первый из них соответствует пуассоновскому потоку событий деградации, а второй описывает перемежаемую динамику роста трещины. Поток событий, вызывающих увеличение длины трещины, управляется дробным пуассоновским процессом, а влияние этих событий на разрушение системы подчиняется степенному закону распределения. Также предложен критерий, позволяющий прогнозировать гарантированный срок службы материала без разрушения.

2. Перемежаемая динамика трещин и полёты Леви

Дифференциальное уравнение для динамики деградации может быть записано в следующей форме:

$$dE = -\gamma E(t)dt - S(t)dt + G(t)dt. \tag{1}$$

Здесь $E(t)$ – функция состояния системы (например, прочности), $S(t)$ – функция мощности нагрузки, приводящей к деградации материала, $G(t)$ – функция восстановления, γ — параметр деградации. Для описания процесса деградации необходимо учитывать стохастическую природу процессов разрушения.

Деградация часто может быть описана случайным процессом, описываемым следующим стохастическим дифференциальным уравнением в смысле Ито:

$$dE_t = -\gamma E_t\, dt + \sigma_0 dW_t. \tag{2}$$

Здесь W_t – винеровский процесс, и второе слагаемое подразумевает влияние случайных факторов на деградацию, σ_0 – параметр интенсивности шума. Уравнение (3) соответствует стохастическому процессу Орнштейна–Уленбека, который является гауссовским, марковским и однородным во времени.

Распределение микротрещин в материале с неупорядоченной структурой может быть статистически описано с использованием функции плотности распределения $p(L, \theta, \varphi)$ общего размера трещин L, с учетом направления микротрещин. Для простоты, часто предполагается равномерное макроскопическое пространственное распределение. Положение совместных трещин определяется их центрами масс. Фрактальная размерность трещины составляет $2 < D < 3$. Для максимального размера трещины обычно выполняется масштабирующее соотношение $L_{max} \propto s^{\delta}$, где s – линейный размер самого тела, $\delta < 1$ [3]. В работе Карпинтери и др. обосновано, что функция плотности вероятности $p(L)$ должна иметь степенную зависимость.

$$p(L) \sim L^{-1-\gamma}, \quad \gamma = \frac{D}{\delta}.$$

Таким образом, количество дефектов, превышающих размер L, определяется соотношением $N(> L) \propto L^{-\gamma}$. Последнее выражение идентично функции Гутенберга–Рихтера. Карпинтери и соавторы отмечают, что значения параметров D и δ могут изменяться в процессе повреждения материала.

Важным представляется случай аномальных событий деградации, связанных с большими скачками. Такие скачки можно описать с помощью распределения Леви

[7]. Для такого процесса мы используем одномерную версию «расцепленной» модели CTRW [4] с длинами переходов R_j и временем ожидания T_j, распределенными по законам с тяжелыми хвостами:

$$\mathrm{P}\{\xi > \xi\} \propto \xi^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad r \to \infty; \qquad \mathrm{P}\{\tau > t\} \propto t^{-\beta}, \quad \beta > 0, \quad t \to \infty.$$

Асимптотическая ($t \to \infty$) функция плотности вероятности $p(\xi, t)$ подчиняется уравнению дробной диффузии (см., например, [8, 9])

$$\frac{\partial^\beta p(\xi,t)}{\partial t^\beta} = C\frac{\partial^\alpha p(\xi,t)}{\partial \xi^\alpha} p(\xi,t) + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\delta(\xi), \quad 0 < \alpha \le 2, \quad 0 < \beta \le 1, \tag{3}$$

где дробная производная Римана–Лиувилля порядка β имеет вид:

$$\frac{\partial^\beta p(\xi,t)}{\partial t^\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{p(\xi,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\beta}.$$

Записанное дробное уравнение в частных производных соответствует односторонним полетам Леви и имеет следующее решение [9], выраженное через дробно-устойчивую плотность:

$$p_{LF}(\xi,t) = \left(Ct^\beta\right)^{-1/\alpha} q_+\left(\xi(Ct^\beta)^{-1/\alpha}; \alpha, \beta\right). \tag{4}$$

Выражение можно записать через односторонние устойчивые плотности Леви

$$p_{LF}(\xi,t) = \left(Ct^\beta\right)^{-1/\alpha} \int_0^\infty g_+^{(\alpha)}\left(\left(Ct^\beta\right)^{-1/\alpha} \xi\tau^{\beta/\alpha}\right) g_+^{(\beta)}(\tau)\tau^{\beta/\alpha} d\tau. \tag{5}$$

Здесь $g_+^{(\beta)}(\tau)$ – односторонняя устойчивая плотность Леви, определяемая ее преобразованием Лапласа $\tilde{g}_+^{(\beta)}(s) = \exp(-s^\beta)$.

3. Смесь процесса Орнштейна–Уленбека и односторонних полетов Леви

Мы рассматриваем процесс деградации как смесь процесса Орнштейна–Уленбека (соответствующего нормальной деградации) и односторонних полетов Леви (связанных с редким потоком экстремальных деструктивных событий). Из-за степенного распределения временных интервалов между резкими приращениями длины усталостной трещины мы предлагаем заменить управляющий процесс на дробный пуассоновский процесс, что приводит к односторонним полетам Леви. Вклад этих событий в разрушение системы следует степенному закону распределения. В интервалах между этими событиями процесс деградации описывается марковским процессом – процессом Орнштейна–Уленбека.

Для процесса Орнштейна–Уленбека распределение имеет вид:

$$\rho_{OU}(E,t) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi\sigma_0^2(1-e^{-2\gamma t})}} \exp\left[-\frac{\gamma}{\sigma_0^2}\frac{\left(E - \mu(1-e^{-\gamma t}) - E_0 e^{-\gamma t}\right)^2}{1-e^{-2\gamma t}}\right]. \tag{6}$$

Распределение для смешанного процесса будет задано свёрткой распределений (5) и (6) с учётом соответствующих весов.

В работе обоснован критерий гарантированного срока службы t_f, который можно записать в виде уравнения

$$E_{\min} = E_0 e^{-\gamma t_f} + \frac{g}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t_f}\right) - \eta_\theta \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\gamma}\left(1 - e^{-2\gamma t_f}\right)} - \Delta_\theta(t_f).$$

Здесь η_θ – коэффициент, определяемый уровнем вероятности θ обнаружить гауссову случайную величину ϕ в интервале с границами $\bar{\phi} \pm \eta_\theta \sqrt{\mathrm{Var}(\phi)}$, $\Delta_\theta(t_f)$ – ширина одностороннего дробного устойчивого распределения (4), соответствующего вероятности $\theta = P(\xi < \Delta_\theta(t_f))$. Величина $E_{\min}$ соответствует минимальному значению допустимой прочности материала.

4. Заключение

Многочисленные экспериментальные исследования продемонстрировали, что хрупкое разрушение материалов проявляет масштабно-инвариантные свойства, например, характеризуется рывковым характером трещин со случайным импульсным высвобождением энергии со степенным распределением. Для описания хрупкого разрушения материалов с рывковой динамикой трещин предложена модель стохастической смеси процесса Орнштейна–Уленбека и односторонних полетов Леви, где первый из них соответствует пуассоновскому потоку «мелких» событий деградации, а второй описывает перемежаемую динамику роста трещины. Введён критерий для гарантированного срока службы системы.

Литература

1. Bonamy D. Intermittency and roughening in the failure of brittle heterogeneous materials // J. of Physics D: Applied Physics. 2009. Vol. 42. P. 214014.
2. Santucci S., Vanel L., Ciliberto S.. Slow crack growth: models and experiments // The European Phys. J. Special Topics. 2007. Vol. 146. P. 341.
3. Spagnoli A., Carpinteri A., Terzano M. Mode II fracture toughness for non-planar frictional cracks // Procedia Structural Integrity. 2018. Vol. 9. P. 159.
4. Montroll E.W., Weiss G.H. Random walks on lattices. II // J. of Math. Physics. 1965. Vol. 6. P. 167.
5. Repin O.N., Saichev A.I. Fractional Poisson law // Radiophysics and Quantum Electronics. 2000. Vol. 43. P. 738.
6. Uchaikin V.V., Cahoy D.O., Sibatov R.T. Fractional processes: from Poisson to branching one // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18. P. 2717.
7. Yin Shu et al. Lévy-driven non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck processes for degradation-based reliability analysis // IIE Transactions. 2016. Vol. 48. P. 993.
8. Dubkov A.A., Spagnolo B., Uchaikin V.V. Lévy flight superdiffusion: an introduction // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18. P. 2649.
9. Sibatov R.T. Fractal generalization of the Scher–Montroll model for anomalous transit-time dispersion in disordered solids // Mathematics. 2020. Vol. 8. P. 1991.

MSC 82D20

Stochastic modeling of brittle fracture of materials with jerky crack dynamics

R.T. Sibatov[1,2], E.V. Morozova[2], D.A. Timkaeva[2]

Scientific Manufacturing Complex «Technological Centre»[1]
Ulyanovsk State University[2]

Abstract: Numerous experiments have demonstrated that brittle fracture of materials exhibits scale-invariant properties. There is a jerky dynamics of cracks with random impulsive energy releases. The energies of these individual events follow a power law distribution, covering a wide range of values. A stochastic process has been proposed to describe brittle fracture of materials with scale-invariant properties, representing a mixture of the Ornstein–Uhlenbeck process and one-sided Lévy flights. The former corresponds to a Poisson flow of degradation events, while the latter describes the intermittent dynamics of crack growth. The flow of crack length increment events is governed by a fractional Poisson process, and the contribution of these events to the failure of the system follows a power law distribution. A criterion has been proposed to predict the guaranteed service life of the material without failure.

Keywords: brittle fracture, random process, fractional derivative, Lévy flights, intermittency.

References

1. Bonamy D. Intermittency and roughening in the failure of brittle heterogeneous materials // J. of Physics D: Applied Physics. 2009. Vol. 42. P. 214014.
2. Santucci S., Vanel L., Ciliberto S.. Slow crack growth: models and experiments // The European Phys. J. Special Topics. 2007. Vol. 146. P. 341.
3. Spagnoli A., Carpinteri A., Terzano M. Mode II fracture toughness for non-planar frictional cracks // Procedia Structural Integrity. 2018. Vol. 9. P. 159.
4. Montroll E.W., Weiss G.H. Random walks on lattices. II // J. of Math. Physics. 1965. Vol. 6. P. 167.
5. Repin O.N., Saichev A.I. Fractional Poisson law // Radiophysics and Quantum Electronics. 2000. Vol. 43. P. 738.
6. Uchaikin V.V., Cahoy D.O., Sibatov R.T. Fractional processes: from Poisson to branching one // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18. P. 2717.
7. Yin Shu et al. Lévy-driven non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck processes for degradation-based reliability analysis // IIE Transactions. 2016. Vol. 48. P. 993.
8. Dubkov A.A., Spagnolo B., Uchaikin V.V. Lévy flight superdiffusion: an introduction // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18. P. 2649.
9. Sibatov R.T. Fractal generalization of the Scher–Montroll model for anomalous transit-time dispersion in disordered solids // Mathematics. 2020. Vol. 8. P. 1991.