УДК 517.93

Проективизация трехмерных линейных квазипериодических систем

Сахаров А.Н.

Нижегородский государственный аграрно-технологический университет

Аннотация: Для описания динамики линейных расширений квазипериодических потоков используется метод группового расширения, позволяющий привести систему к треугольному виду. В случае компактной группы это расширение эквивалентно проективизации линейной системы. Динамика проективного расшиения системы описывается в терминах множества вращения, основанного на понятии асимптотических циклов С. Шварцмана.

Ключевые слова: линейные расширения, групповое расширение, проективное расширение, вектор вращения, асимптотические циклы.

1. SO(3)-расширение линейной системы

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{x}} = A(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ – угловые координаты на торе $\mathbb{T}^m$, $A(\boldsymbol{\varphi})$ – матрица-функция на торе, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор с рационально независимыми компонентами, порождает поток на $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^3$, который называется линейным расширением квазипериодического потока.

Динамика системы (1) легко описывается, когда $A(\boldsymbol{\varphi})$ – треугольная матрица. Систему, не являющуюся треугольной, с помощью минимального группового расширения можно привести к треугольному вилу. Абстрактная теорема о приведении к треугольному виду произвольног линейного расширения минимального потока принадлежит И.У. Бронштейну ([1], теорема 5.8).

В нашем случае эта процедура выглядит так. Пусть $A(\boldsymbol{\varphi}) = S(\boldsymbol{\varphi}) + R(\boldsymbol{\varphi})$ разложение матрицы $A(\boldsymbol{\varphi})$ на симметрическую и антисимметрическую части. Будем искать такую матрицу $Q \in \mathrm{SO}(3)$, чтобы замена $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$ приводила систему (1) к треугольному виду:

$$Q'\dot{Q} \ = \ Q'A(\boldsymbol{\varphi})Q - T(\boldsymbol{\varphi}, Q).$$

Здесь $T(\boldsymbol{\varphi}, Q)$ – верхнетреугольная матрица, а символ $'$ обозначает транспонирование. Поскольку матрица $Q'S(\boldsymbol{\varphi})Q$ симметрическая, то справедливо представление

$$Q'S(\boldsymbol{\varphi})Q = D(\boldsymbol{\varphi}, Q) + P(\boldsymbol{\varphi}, Q) + P'(\boldsymbol{\varphi}, Q),$$

где $D(\boldsymbol{\varphi}, Q)$ – диагональная матрица, $P(\boldsymbol{\varphi}, Q)$ – верхняя треугольная матрица с нулевой диагональю. Положив

$$T(\boldsymbol{\varphi}, Q) = D(\boldsymbol{\varphi}, Q) + 2P(\boldsymbol{\varphi}, Q),$$

получаем следующую систему уравнений на $\mathbb{T}^m \times \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ для матрицы Q:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} \ = \ \boldsymbol{\omega}, \quad Q'\dot{Q} \ = \ Q'R(\boldsymbol{\varphi})Q + P'(\boldsymbol{\varphi}, Q) - P(\boldsymbol{\varphi}, Q). \tag{2}$$

Поток, определяемый системой (2), имеет минимальные множества. Взяв сужение этого потока на какое-либо минимальное множество, получим рекуррентное преобразование, приводящее исходную систему к треугольному виду.

Преобразование Q определяется с точностью до произвольного множителя из подгруппы стабильности $\mathrm{SO}(2)$ группы $\mathrm{SO}(3)$. Так как $S^2 = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$, то система (2) однозначно определяет поток на $\mathbb{T}^m \times S^2$, который называется *проективным расширением квазипериодического потока*, построенным по системе (1).

Допустим, что $A(\boldsymbol{\varphi}) = \Lambda(\boldsymbol{\varphi}) + R(\boldsymbol{\varphi})$, где $\Lambda(\boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{diag}(\lambda_1(\boldsymbol{\varphi}), \lambda_2(\boldsymbol{\varphi}), \lambda_3(\boldsymbol{\varphi}))$, а

$$R(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{pmatrix} 0 & -r_1(\boldsymbol{\varphi}) & -r_2(\boldsymbol{\varphi}) \\ r_1(\boldsymbol{\varphi}) & 0 & -r_3(\boldsymbol{\varphi}) \\ r_2(\boldsymbol{\varphi}) & r_3(\boldsymbol{\varphi}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2) в сферических координатах $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ выглядит так

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\theta}_1 = r_1(\boldsymbol{\varphi}) - \dfrac{\lambda_1(\boldsymbol{\varphi}) - \lambda_2(\boldsymbol{\varphi})}{2} \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2 = f_1(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 = r_3(\boldsymbol{\varphi}) \cos\theta_1 - r_2(\boldsymbol{\varphi}) \sin\theta_1 + \dfrac{\sin 2\theta_2}{2} (\cos^2\theta_1(\lambda_1(\boldsymbol{\varphi}) - \lambda_2(\boldsymbol{\varphi})) - \lambda_1(\boldsymbol{\varphi}) + \lambda_3(\boldsymbol{\varphi})) = \\ \qquad = f_2(\boldsymbol{\varphi}, \theta_1, \theta_2), \quad 0 \le \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \le \theta_2 < \pi. \end{cases} \tag{3}$$

Ясно, что правые части системы определяют векторное поле, которое определено на торе $\mathbb{T}^{m+2}$. Такой же вывод можно сделать, рассматривая матрицу $A(\boldsymbol{\varphi})$ с произвольной симметрической частью.

Число минимальных множеств оценивается так. Система

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{x}} = A(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2 \tag{4}$$

приводится к треугольному виду с помощью замены $\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{y}$, где $U \in \mathrm{SU}(2)$, если U является решением системы.

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \quad U^*\dot{U} = U^*R(\boldsymbol{\varphi})U + P^*(\boldsymbol{\varphi}, U) - P(\boldsymbol{\varphi}, U),$$

которая определяет поток на $\mathbb{T}^m \times \mathrm{SU}(2)$. Здесь $R^*(\boldsymbol{\varphi}) = -R(\boldsymbol{\varphi})$, $P(\boldsymbol{\varphi}, U)$ – верхнетреугольная матрица с чисто мнимой главной диагональю. Сужение этого потока на $\mathbb{T}^m \times S^2$ – проективный поток. Согласно теореме 2 из [2] он имеет либо одно, либо два, либо континуум минимальных множеств. Аналогично заключение справедливо и для потока, определяемого (3), так как группа $\mathrm{SO}(3)$ изоморфна фактор-группе $\mathrm{SU}(2)/\{\pm E\}$.

2. Множество вращения слоя

Пусть $\boldsymbol{\theta}(t, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\theta}_0)$ – решение (3), тогда для любой инвариантной меры μ по эргодической теореме Биркгофа-Хинчина для почти всех $\boldsymbol{\theta}_0$ существует предел

$$\boldsymbol{\rho}_\mu = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t F(\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\omega}s, \boldsymbol{\theta}(s, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\theta}_0))ds = \int_{\mathbb{T}^{m+2}} F(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})d\mu, \tag{5}$$

где $F(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})$ – вектор правых частей (3). Так как F – непрерывное векторное поле на торе, то предел в (5) существует для всех $\boldsymbol{\theta}_0$. Легко показать, что $\boldsymbol{\rho}_\mu = (\rho_\mu, 0)$. Множество вращения слоя определяется как объединение всех таких векторов $\mathcal{R} = \bigcup_\mu \boldsymbol{\rho}_\mu$.

Численный эксперимент показывает, что множество $\mathcal{R}$ состоит из одного вектора. На рис. 1 показан график линейной зависимости от параметра ε вектора вращения системы (3) с полиномиальной зависимостью от $\boldsymbol{\varphi}$. Если система (1) блочно-диагональна, то множество вращения слоя действительно состоит из одного вектора $(\rho, 0)$, не зависящего от начальных данных [3].

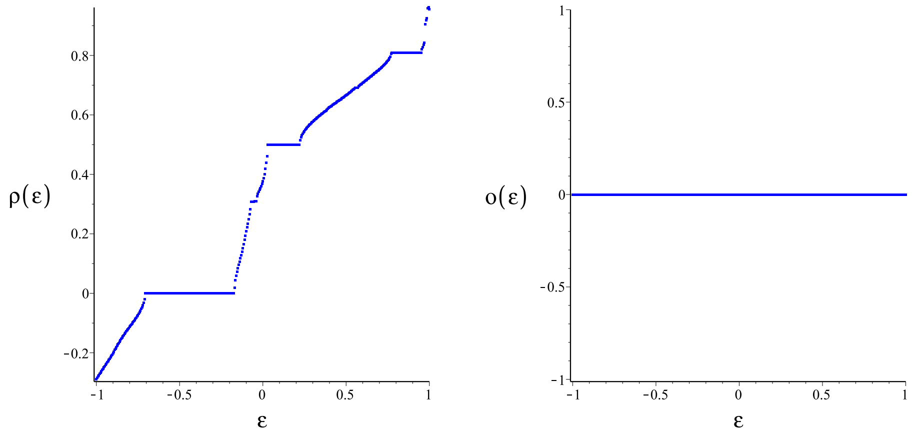

Рис. 1. Вектор вращения слоя системы (3).

Теорема 1. *Множество вращения $\mathcal{R}$ состоит из одного вектора* $(\rho, 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теории С. Шварцмана [4], множество вращения системы (2) состоит из матриц максимальной торической подалгебры алгебры SO(3), которые имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, учитывая, что определение Шварцмана чисел вращения совпадает с обычным в случае потоков на торе, получаем

$$\rho = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t f_1(\boldsymbol{\omega} s, \theta_1(s), \theta_2(s)ds, \quad 0 = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t f_2(\boldsymbol{\omega} s, \theta_1(s), \theta_2(s)ds.$$

Таким образом, $\theta_2(t) = o(t)$, откуда $\cos 2\theta_2(t) = O(1)$. Теперь существование числа вращения ρ, не зависящего от начальных данных, можно доказать, следуя, например, работе [5].

Д о к а з а т е л ь с т в о   з а в е р ш е н о.

3. Заключительные замечания

Если матрица $A(\boldsymbol{\varphi})$ кососимметрична, система (3) является интегрирумой в квадратурах. В этом случае справедливо следующее утверждение: существует множество $\mathcal{M}$ типа G_δ в пространстве $C^0(\mathbb{T}^m, \mathrm{SO}(3))$ такое, что при $A(\boldsymbol{\varphi}) \in \mathcal{M}$ поток, порождаемый системой (3), минимален [6]. Доказательство этого факта существенно упрощается, если предположить, что интегралы от квазипериодических функций $r_1(\boldsymbol{\omega}t)$, $r_2(\boldsymbol{\omega}t)$, $r_3(\boldsymbol{\omega}t)$ не являются квазипериодическими функциями.

Используя известное предсталение матриц из SU(2), можно записать уравнения проективного расширения системы (4) в сферических координатах. Они являются уравнениями на торе $\mathbb{T}^{m+2}$. Поскольку максмальная торическая подалгебра алгебры SU(2) имеет размерность 1, множество вращения слоя состоит из векторов вида $(\rho, 0)$. Оптимистическая гипотеза: множество вращения слоя содержит единственный вектор. В вещественном случае это действительно так.

Литература

1. Бронштейн И.У. Расширения минимальных групп преобразований. Кишенев. Штиница, 1975. 311 с.

2. Коломиец М.Л., Сахаров А.Н. Классификация проективных расширений квазипериодических потоков. Труды VII всероссийской научной конференции “Нелинейные колебания механических систем”. Нижний Новгород, 2008. Т. 1. С. 295–299.

3. Сахаров А.Н. Структурно устойчивые линейные расширения квазипериодических потоков на торе. Сборник материалов XVI международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании”. Саранск, 2023. С. 213–219.

4. Schwartzman S. Asymptotic cycles // Ann. of Math. 1957. V. 66. P. 270–284.

5. Веременюк В.В. Существование числа вращения уравнения $\dot{x} = \lambda(t, x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 6. С. 1073–1076.

6. Tkachenko V.I. On reducibility of linear quasiperiodic systems with bounded solutions // EJQTDE, Proc. 6th Coll. QTDE. 2000. No. 29. 11 p.

MSC 34D20

Projectivization of three-dimensional linear quasiperiodic systems

A.N. Sakharov

Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University

Abstract: To describe the dynamics of linear extensions of quasiperiodic flows, the group expansion method is used to bring system to a triangular form. In the case of a compact group this extension is equivalent to the projectivization of a linear system. Dynamics of the projective system is described in terms of rotation numbers based on the concept of asymptotic cycles by S. Shvartsman.

Keywords: linear extensions, projective extensions, rotation numbers, asymptotic cycles.

References

1. Bronshtein I.U. Extensions of minimal transformation groups. Kishenev. Shtinitsa, 1975. 311 p.
2. Kolomiets M.L., Sakharov A.N. Classification of projective extensions of quasiperiodic flows. Proceedings of the VII All-Russian scientific conference "Nonlinear oscillations of mechanical systems". Nizhny Novgorod. 2008. T. 1. P. 295–299.
3. Sakharov A.N. Structurally stable linear extensions of quasiperiodic flows on a torus. Collection of materials of the XVI international scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling". Saransk. 2023. P. 213–219.
4. Schwartzman S. Asymptotic cycles // Ann. of Math. 1957. V. 66. P. 270–284.
5. Veremenyuk V.V. Existence of a rotation number for the equation $\dot{x} = \lambda(t, x)$ with right-hand side periodic in x and almost periodic in t // Differ. equations. 1991. T. 27, No. 6. P. 1073–1076.
6. Tkachenko V.I. On reducibility of linear quasiperiodic systems with bounded solutions // EJQTDE, Proc. 6th Coll. QTDE. 2000. No. 29. 11 p.