XI Международная научная молодежная школа-семинар
"Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" имени Е.В. Воскресенского
Саранск, 26-28 июля 2024

УДК 519.86

Ценовые волны в информационной микроэкономике

Рассадин А.Э., Рубцов М.И.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Аннотация: В работе рассмотрена модель математической геоэкономики, описывающая линейную эквидистантную цепочку идентичных торговых точек эвансовского типа, продающий некий продукт, причём между этими точками осуществляется информационный обмен о цене продукта, приводящий к дополнительному её локальному изменению. Показано, что этот обмен информацией порождает распространение волны цены продукта по этой цепочке.

Ключевые слова: спрос и предложение, метод характеристик, эйлерова и лагранжева координаты.

В конце XX века в экономической теории сформировался новый раздел – геоэкономика, изучающий влияние географических факторов на экономические процессы [1]. К началу второй четверти XXI века в ходе развития геоэкономики стала очевидной необходимость её математизации. Кроме того, ясно, что при этом надо принимать во внимание интенсивное развитие информационных технологий. В данной работе исследуется пример такой задачи математической геоэкономики.

Рассмотрим линейную цепочку, состоящую из $2\,N+1$ одинаковых торговых точек, продающих некий продукт. Пусть цена этого продукта в n-й точке в момент времени t равна $p_n(t)$ $(n = -N, \ldots, N)$, тогда она удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению [2]:

$$\frac{dp_n}{dt} = \gamma\,[\Phi(p_n) - \Psi(p_n)]\,, \qquad \gamma > 0\,, \tag{1}$$

где $\Phi(p)$ – спрос на этот продукт, а $\Psi(p)$ – предложение этого продукта [2].

Далее, введём теперь в модель (1) механизм обратной связи, обусловленный информационной составляющей современного общества, а именно, будем считать, что цена продукта в каждой торговой точке оперативно выставляется в сети Internet, причём превышение цены $p_{n+1}(t)$ продукта в $n+1-$й точке над ценой продукта $p_n(t)$ в $n-$й точке приводит к уменьшению цены в этой точке:

$$\frac{dp_n}{dt} = \gamma\,[\Phi(p_n) - \Psi(p_n)] - \mu_n\,(p_{n+1} - p_n)\,, \tag{2}$$

где μ_n – коэффициент обратной связи, меняющийся, вообще говоря, от точки к точке.

Пусть $\mu_n = \dfrac{V(n\,\delta)}{\delta}$, где δ – расстояние между двумя ближайшими торговыми точками, а $V(x)$ – фиксированная функция.

Далее, пусть $N \gg 1$, тогда, обозначив $P(n\,\delta, t) = p_n(t)$, можно свести систему (2) из $2\,N+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений к одному уравнению в частных производных на прямой:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V(x)\,\frac{\partial P}{\partial x} = \gamma\,[\Phi(P) - \Psi(P)]\,, \qquad P(x,0) = P_0(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \tag{3}$$

где $P_0(x)$ – распределение начальной цены продукта вдоль цепочки торговых точек.

Для того, чтобы решить задачу Коши (3), надо конкретизировать функции спроса и предложения.

Выберем их такими же, как в модели Эванса [2]:

$$\Phi(P) = a - b\,P\,, \qquad a > 0\,, \qquad b > 0\,, \tag{4}$$

и

$$\Psi(P) = \alpha + \beta\,P\,, \qquad \alpha > 0\,, \qquad \beta > 0\,, \tag{5}$$

причём $a > \alpha$.

Подставляя функции (4) и (5) в уравнение (3), получим:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V(x)\,\frac{\partial P}{\partial x} = -\Gamma\,(P - P_*)\,, \qquad P(x,0) = P_0(x)\,, \tag{6}$$

где $\Gamma = \gamma\,(b+\beta)$ и $P_* = \dfrac{a-\alpha}{b-\beta}$.

Задача Коши (6) решается с помощью метода характеристик [3].

Уравнения её характеристик имеют вид:

$$\frac{dP}{dt} = -\Gamma\,(P - P_*)\,, \qquad P|_{t=0} = P_0(y)\,, \tag{7}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = V(x)\,, \qquad x|_{t=0} = y\,, \tag{8}$$

где $y \in \mathbb{R}$ – лагранжева координата [4].

Решение задачи Коши (7) имеет вид:

$$P = P_* + (P_0(y) - P_*)\,\exp(-\Gamma\,t)\,. \tag{9}$$

Решение задачи Коши (8) записывается следующим образом:

$$t = \int\limits_y^x \frac{d\xi}{V(\xi)}\,. \tag{10}$$

Из формулы (10) можно найти связь между лагранжевой координатой y и эйлеровой координатой x:

$$y = Y(x,t)\,. \tag{11}$$

Подставив выражение (11) в формулу (9), получим решение задачи Коши (6):

$$P(x,t) = P_*\,(1 - \exp(-\Gamma\,t)) + P_0(Y(x,t))\,\exp(-\Gamma\,t)\,. \tag{12}$$

Если $V(x) = V_m = const$, то из формулы (10) получим, что $y = x - V_m\,t$, значит, распределение цены продукта вдоль цепочки торговых точек равно:

$$P(x,t) = P_*\,(1 - \exp(-\Gamma\,t)) + P_0(x - V_m\,t)\,\exp(-\Gamma\,t)\,. \tag{13}$$

Из выражения (13) видно, что вдоль цепочки со скоростью V_m бежит экспоненциально затухающая ценовая волна, а при $t \gg 1/\Gamma$ по всей цепочке устанавливается однородное распределение цены продукта: $P(x,t) \approx P_*$.

В докладе также представлены графики функции (12), соответствующие другим выражениям для скорости волны $V(x)$. Однако в этих случаях волны цены продукта уже будут неоднородными.

Литература

1. Кочетов Э.Г. Геоэкономика (Освоение мирового экономического пространства). М.: Издательство БЕК, 1999. 480 с.

2. Колемаев В.А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 1998. 240 с.

3. Лерман Л.М. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2016. 280 с.

4. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 496 с.

MSC 91B72

Price waves in information microeconomics

A.E. Rassadin, M.I. Rubtsov

HSE University

Abstract: The paper considers a model of mathematical geoeconomics describing a linear equidistant chain of identical Evans-type retail outlets selling a certain product, and information exchange about the price of the product is carried out between these points, leading to an additional local change. It is shown that this information exchange generates the propagation of a wave of product prices along this chain.

Keywords: supply and demand, method of characteristics, Eulerian and Lagrangian coordinates.

References

1. Kochetov E.G. Geoeconomika (Osvoyeniye mirovogo ekonomicheskogo prostranstva). M., Izdatelstvo BEK, 1999. 480 p.
2. Kolemaev V.A. Matematicheskaya ekonomika. M., UNITY, 1998. 240 p.
3. Lerman L.M. Lektsii po obiknovennim differentsialnim uravneniyam. M.-Izhevsk, NITs "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika Institut kompyuternih issledovanii, 2016. 280 p.
4. Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Saichev A.I. Volni i strukturi v nelineinih sredah bez dispersii. Prilozhenie k nelineinoi akustike. M., FIZMATLIT, 2008. 496 p.