УДК 519.642.5

# О методе коллокации при построении решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с использованием многочленов Чебышева*

Попов В.Н., Гермидер О.В.

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

*Аннотация:* С использованием метода последовательных приближений и свойств систем ортогональных полиномов Чебышева первого рода предложена матричная реализация метода коллокации для построения решений нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Подынтегральная функция в рассматриваемых уравнениях представляется в виде частичной суммы ряда по этим многочленам. В качестве точек коллокации выбираются корни полиномов Чебышева. Искомые решения находятся путем полиномиальных интерполяций полученных значений функций в точках коллокации с использованием обратных матриц, элементы которых записываются на основе ортогональных соотношений для этих полиномов.

*Ключевые слова:* метод коллокации, метод последовательных приближений, многочлены Чебышева, интегральные уравнения

## 1. Введение

Интегральные уравнения Фредгольма имеют важное значение при моделировании физических процессов в кинетической теории газов [1], физике плазмы [2], теории упругости [3]. Поскольку для подавляющего числа нелинейных задач математической физики получение аналитического решения не представляется возможным, то важным аспектом при моделировании является разработка эффективных численных методов решения нелинейных интегральных уравнений. В течение последних десятилетий предложены различные методы нахождения численного решения уравнений Фредгольма и их реализация [4–6]. В представленной работе предложен новый подход к построению решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, основанный на методах последовательных приближений и коллокации при использовании полиномов Чебышева первого рода.

## 2. Постановка задачи. Общие положения

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) + \lambda \int_a^b K(x, y, u(y))\mathrm{d}y = f(x), \tag{1}$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00381 «Развитие методов полиномиальной аппроксимации Чебышева для решения нелинейных задач математической физики»

где $u(x)$ – неизвестная функция ($a \le x \le b$), $K(x, y, u(y))$ – ядро интегрального уравнения (1), $f(x)$ – свободный член этого уравнения. Полагаем, что функция $f(x)$ ограничена, т.е. $|f(x)| \le R$ ($a \le x \le b$), ядро $K(x, y, u(y))$ интегрируемо, ограничено: $|K(x, y, u(y))| \le M$ ($a \le x$, $y \le b$), и удовлетворяет условию Липшица [7]

$$|K(x, y, u) - K(x, y, z)| \le L|u - z|, \tag{2}$$

где $L$ – постоянная Липшица, $a \le x$, $y \le b$.

## 3. Построение решения уравнения

Решение уравнения (1), ищем, используя метод последовательных приближений [7], полагая

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty}(u_i(x) - u_{i-1}(x)), \tag{3}$$

где $u_i(x)$ удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$u_i(x) = f(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x, y, u_{i-1}(y))\mathrm{d}y, \quad i \ge 1. \tag{4}$$

Для построения решения (4) применяем метод коллокации с использованием полиномов Чебышева первого рода и корней этих полиномов в качестве точек коллокации. В результате решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода находятся путем полиномиальных интерполяций полученных значений функций в точках коллокации с использованием обратных матриц, элементы которых записываются на основе ортогональных соотношений для этих полиномов.

## 4. Заключение

В работе предложена реализация метода коллокации для построения решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с использованием последовательных приближений и корней полиномов Чебышева первого рода в качестве точек коллокации. Для построения решений используются свойства этих полиномов и операций над матрицами. Результаты вычислительных экспериментов показывают эффективность предложенного подхода к построению решений интегральных уравнений.

## Литература

1. Cercignani C. Theory and Application of the Boltzmann Equation. Edinburgh, London Scottish Academic Press, 1975.

2. Вовченко Е.Д., Григорьева И.Г., Кушин В.В., Макаров А.А., Мелехов А.П., Рамакоти Р.Ш., Салахутдинов Г.Х. Измерение энергетического спектра мягкого рентгеновского излучения для вакуумной искры с лазерным инициированием // Физика плазмы. 2022. Т. 48, № 11. С. 1149–1152.

3. Боган Ю.А. Регулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи изгиба анизотропной упругой пластины // Прикл. мех. техн. физ. 2005. V. 46, № 3. С. 108-–119.

4. Bazm S., Hosseini A., Azevedo J.S., Pahlevani F. Existence, uniqueness, and numerical approximation of solutions of a nonlinear functional integral equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. V. 439. P. 115602.

5. Torkaman S., Heydari M. An iterative Nyström-based method to solve nonlinear Fredholm integral equations of the second kind // Applied Numerical Mathematics. 2023. V. 194. P. 59–81.

6. Karamollahi N., Heydari M., Loghmani G.B. Approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using a class of Hermite interpolation polynomials // Mathematics and Computers in Simulation 2021. V. 187. P. 414–432

7. Wazwaz A.M. Linear and Nonlinear Integral Equations, Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2011.

MSC 45B05, 65R20

# On the collocation method for constructing a solution to the nonlinear Fredholm integral equation of the second kind using Chebyshev polynomials

V.N. Popov, O.V. Germider

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov

*Abstract:* Using the method of successive approximations and properties of systems of orthogonal Chebyshev polynomials of the first kind, a matrix implementation of the collocation method for constructing solutions of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind is proposed. The integral function in the equations under consideration is represented as a partial sum of a series over these polynomials. The roots of Chebyshev polynomials are chosen as collocation points. The desired solutions are found by polynomial interpolation of the obtained function values at the collocation points using the properties of inverse matrices, the elements of which are written based on orthogonal relations for these polynomials.

*Keywords:* collocation method, sequential approximation method, Chebyshev polynomials, integral equations.

## References

1. Cercignani C. Theory and Application of the Boltzmann Equation. Edinburgh, London Scottish Academic Press, 1975.
2. Vovchenko Ye.D., Grigor'yeva I.G., Kushin V.V., Makarov A.A., Melekhov A.P., Ramakoti R.SH., Salakhutdinov G.KH. Izmereniye energeticheskogo kondensatora myagkogo rentgenovskogo izlucheniya dlya vakuumnoy iskry s lazernym initsiirovaniyem // Fizika izlucheniya. 2022. V. 48, No. 11. P. 1149–1152.
3. Bogan Yu. A. Regular integral equations for the second boundary-value problem of the bending of an anisotropic elastic plate // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2005. V. 46. P. 395-–404.
4. Bazm S., Hosseini A., Azevedo J.S., Pahlevani F. Existence, uniqueness, and numerical approximation of solutions of a nonlinear functional integral equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. V. 439. P. 115602.
5. Torkaman S., Heydari M. An iterative Nyström-based method to solve nonlinear Fredholm integral equations of the second kind // Applied Numerical Mathematics. 2023. V. 194. P. 59–81.
6. Karamollahi N., Heydari M., Loghmani G.B. Approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using a class of Hermite interpolation polynomials // Mathematics and Computers in Simulation 2021. V. 187. P. 414–432.
7. Wazwaz A.M. Linear and Nonlinear Integral Equations, Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2011.