УДК 517.977.56

Математическая модель волнового процесса с сетевым носителем

Перова И.В.

Воронежский государственный университет

Аннотация: В работе представлен подход построения математической модели волнового процесса упругой сетевой конструкции и достаточные условия слабой разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. Доказательство теоремы существования слабого решения использует метод Фаэдо-Галеркина со специальным базисом, определяемым системой обобщенных собственных функций эллиптического оператора задачи. Полученные результаты могут быть использования при решении задач оптимального управления дифференциальными системами в различных направлениях прикладного характера.

Ключевые слова: волновое уравнение, начально-краевая задача, слабое решение.

1. Основные понятия и предложения.

В работе используются обозначения, понятия и определения, введенные в работе [1]: Γ – ориентированный геометрический граф; $\partial\Gamma$ – множество граничных и $J(\Gamma)$ – множество внутренних узлов графа Γ; Γ_0 – множество всех рёбер, не содержащих концевых точек, $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0,T)$ $(\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0,t))$, $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0,T)$.

Введем необходимые пространства:

$\cdot$ $L_2(\Gamma)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом на Γ (аналогично определяется пространство $L_2(\Gamma_T)$), $\cdot$ $W_2^1(\Gamma)$ – пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из $L_2(\Gamma)$, норма в $W_2^1(\Gamma)$ определяется скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^1(\Gamma)} = \int_\Gamma (u(x)v(x) + u'(x)v'(x))\, dx;$$

$\cdot$ $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой

$$\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left(\int_\Gamma^2 u^2(x,t)\, dx\right)^{1/2} dt;$$

$\cdot$ $W_2^1(\Gamma_T)$ – пространство функций $u(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные 1-го порядка по x и t, принадлежащих $L_2(\Gamma_T)$, норма в $W_2^1(\Gamma_T)$ определяется соотношением

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Gamma_T)} = \int_{\Gamma_T} \left(u(x,t)^2 + u_x(x,t)^2\right)\, dx\, dt.$$

Пусть далее $V_2(\Gamma_T)$ — множество всех функций $u(x,t) \in W_2^1(\Gamma_T)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \operatorname{vrai}\max_{0\le t\le T} \|u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)}.$$

Рассмотрим билинейную форму

$$\ell(\mu, v) = \int_{\Gamma} \left(a(x)\mu'(x)v'(x) + b(x)\mu(x)v(x)\right)\, dx,$$

где $a(x)$, $b(x)$ – фиксированные измеримые ограниченные на Γ_0 функции, суммируемые с квадратом: $0 < a_* \le a(x) \le a^*$, $b_* \le b(x) \le b^*$, $x \in \Gamma_0$ (a_*, a^*, b_*, b^*– фиксированные постоянные). В пространстве $W_2^1(\Gamma)$ есть множество Ω функций $u(x) \in C(\Gamma)$ ($C(\Gamma)$ – пространство непрерывных на Γ функций), удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} u'(1)_{\gamma_j} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} u'(0)_{\gamma_j}$$

во всех узлах $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «к узлу ξ», $r(\xi)$ – множество ребер ориентированных «от узла ξ»). Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества функций из Ω, равных нулю во всех узлах $\xi \in \partial\Gamma$, обозначим через $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$.

Пусть далее $\Omega_0\left(a, \Gamma_T\right)$ – множество функций $u(x,t) \in V_2\left(\Gamma_T\right)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0, T]$) как функции класса $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$, т.е. для каждого элемента $u \in \Omega_0\left(a, \Gamma_T\right)$ при фиксированном $t \in [0, T]$ существует последовательность $\{u_n\}$ функций $u_n(x,t) \in \Omega$, сходящаяся в норме $W_2^1(\Gamma)$ к следу v, при этом $u_n(x,t)$ равны нулю во всех узлах $\xi \in \partial\Gamma$, непрерывны на Γ и удовлетворяют соотношениям согласования

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} u_x(1,t)_{\gamma_j} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} u_x(0,t)_{\gamma_j}$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$.

Пусть $W_a^1\left(\Gamma_T\right)$ – замыкание в норме $W_2^{1,0}\left(\Gamma_T\right)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям согласования для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$ и для любого $t \in [0, T]$, а также равных нулю вблизи $\partial\Gamma \times [0, T]$.

2. Постановка задачи

В пространстве $W_a^1\left(\Gamma_T\right)$ изучается третья начально-краевая задача, граничные условия которой сведены к однородным:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

$$\left.\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \sigma u(x,t)\right)\right|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Здесь σ – заданная постоянная, $\varphi(x) \in W_a^1(\Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}\left(\Gamma_T\right)$. Для коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ имеют место предположения

$$0 < a_* \le a(x) \le a^*, \; b_* \le b(x) \le b^*. \tag{4}$$

Определение 1. *Слабым решением класса $W_2^1(\Gamma_T)$ начально-краевой задачи* (1)-(3) *называется функция $u(x,t) \in W_a^1(\Gamma_T)$, равная $\varphi(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int_{\Gamma_T} \left(-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} + b(x)u(x,t)\eta(x,t) \right) dx\,dt +$$
$$+ \int_0^T \sum_{\zeta\in\partial\Gamma}^{T} \sigma u(x,t)\eta(x,t)\,dt\Bigg|_{x=x_\zeta\subset\zeta} = \int_\Gamma \psi(x)\eta(x,0)\,dx + \int_{\Gamma_T} f(x,t)\eta(x,t)\,dx\,dt$$

при любых $\eta(x,t) \in \overline{W}_a^1(\Gamma_T)$ (элементы пространства $\overline{W}_a^1(\Gamma_T)$ принадлежат $W_a^1(\Gamma_T)$ и удовлетворяют равенству $\eta(x,T) = 0$).

Рассмотрим $W_a^2(\Gamma_T)$ – пространство функций $u(x,t)$ из $W_a^1(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ из $L_2(\Gamma_T)$.

Для решений $u(x,t)$ начально-краевой задачи (1)-(3) в пространстве $W_a^2(\Gamma_T)$ можно дать априорную оценку через начальные данные $\varphi(x), \psi(x), f(x,t)$ задачи (1)-(3). А именно, для любых $t \in [0,T]$ установлена априорная оценка решения $u(x,t)$ задачи (1)-(3), принадлежащего пространству $W_a^2(\Gamma_T)$:

$$\sqrt{\int_\Gamma \left(u^2 + u_t^2 + u_x^2\right) dx} \le C_1(t)\omega^{1/2}(0) + C_2(t)\mathrm{P} f \mathrm{P}_{2,\Gamma_t}, \qquad (5)$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяются постоянными a_*, a^*, b^* и временем t.

Теорема 1. *Для решений $u(x,t) \in W_a^2(\Gamma_T)$ начально-краевой задачи* (1)-(3) *при выполнении предположений* (4) *имеет место априорная оценка* (5) *для любого $t \in [0,T]$.*

Замечание 2. *Соотношение* (5) *является аналогом энергетического неравенства для гиперболической системы* (1) *с распределенными параметрами на графе Γ, позволяющее оценить норму решения $u(x,t)$ в пространстве $W_a^1(\Gamma_T)$ через начальные данные $\varphi(x), \psi(x)$ и внешнюю силу $f(x,t)$. Нетрудно получить аналогичную оценку энергетической нормы решения $u(x,t)$.*

Условия существования слабого решения начально-краевой задачи (1)-(3) представлены следующей теоремой.

Теорема 2. *Для любых $\varphi(x) \in W_a^1(\Gamma), \psi(x) \in L_2(\Gamma), f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ при выполнении предположений* (4) *начально-краевая задача* (1)-(3) *имеет по меньшей мере одно слабое решение из пространства $W_a^1(\Gamma_T)$.*

Для доказательства утверждения теоремы используется метод Фаэдо-Галеркина со специальным базисом, определяемым системой обобщенных собственных функций эллиптического оператора задачи (1)-(3).

Представленные результаты могут быть использования при решении задач оптимального управления дифференциальными системами в различных направлениях прикладного характера.

Литература

1. Махинова О.А., Волкова А.С. Устойчивость разностной схемы для эллиптического уравнения с распределенными параметрами на графе // Системы управления и информационные технологии. 2014. № 1. С. 23–29.

2. Игонина Е.В., Перова И.В., Приходько И.В., Абреимов М.П. Оптимизация волновых процессов в пространственной сети // Системы управления и информационные технологии. 2024. № 1-1 (95). С. 10–15.

3. Провоторов В.В. К вопросу построения граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы «мачта-растяжки» // Системы управления и информационные технологии. 2008. № 2-2 (32). С. 293–297.

MSC 74J30

A mathematical model of the wave process with a network carrier

I.V. Perova

Voronezh State University

Abstract: The paper presents an approach to constructing a mathematical model of the wave process of an elastic network structure and sufficient conditions for weak solvability of the corresponding initial boundary value problem. The proof of the theorem of the existence of a weak solution uses the Faedo-Galerkin method with a special basis determined by a system of generalized eigenfunctions of the elliptic operator of the problem [1]. The results obtained can be used in solving problems of optimal control of differential systems in various directions of an applied nature.

Keywords: wave equation, initial boundary value problem, weak solution.

References

1. Makhinova O.A., Volkova A.S. Ustoichivost' raznostnoi skhemy dlya ehllipticheskogo uravneniya s raspredelennymi parametrami na grafe // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. 2014. № 1. P. 23–29.

2. Igonina E.V., Perova I.V., Prikhod'ko I.V., Abreimov M.P. Optimizatsiya volnovykh protsessov v prostranstvennoi seti // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. 2024. № 1-1 (95). P. 10–15.

3. Provotorov V.V. K voprosu postroeniya granichnykh upravlenii v zadache o gashenii kolebanii sistemy «machta-rastyazhkI» // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. 2008. № 2-2 (32). P. 293–297.