УДК 512.64

Об алгебро-геометрических свойствах суммы циклических подпространств относительно линейного оператора

Никонов В.И.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: Исследуются алгебраические и геометрические свойства суммы циклических подпространств относительно линейного оператора, возникающих при исследовании линейных систем управления. Полученные свойства выражены в терминах минимальных аннулирующих многочленов суммы и пересечения соответствующих циклических подпространств. Рассматриваются канонические формы линейного оператора как в частично согласованных базисах подпространств так и в циклическом базисе суммы этих подпространств.

Ключевые слова: линейный оператор, циклическое подпространство, минимальный аннулирующий многочлен.

1. Канонические формы линейного оператора относительно суммы двух циклических подпространств

В данной работе представлены результаты исследований, начатых в [1–3], а также развитие результатов [4, 5]. Так, в работе [3] исследованы взаимосвязи базисов двух циклических подпространств с минимальными аннулирующими многочленами этих подпространств относительно заданного линейного оператора в предположении, что базис пересечение подпространств содержит векторы циклического базиса. В этой работе рассматривается обобщение полученных результатов.

Рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{D} : \mathcal{L} \to \mathcal{L},$$

где $\mathcal{L}$ – конечномерное действительное линейное пространство. Пусть $\dim \mathcal{L} = n$.

Пусть a и b заданные ненулевые элементы линейного пространства $\mathcal{L}$.

Рассмотрим циклические подпространства U_a и U_b линейного оператора $\mathcal{D}$, порождаемые элементами a и b:

$$U_a = \left\langle a, \mathcal{D}a, \ldots, \mathcal{D}^{m-1}a \right\rangle, \dim U_a = m,$$

$$U_b = \left\langle b, \mathcal{D}b, \ldots, \mathcal{D}^{n-1}b \right\rangle, \dim U_b = p.$$

Таким образом, минимальные аннулирующие многочлены элементов a и b имеют, соответственно, вид

$$\sigma_a(\lambda) = \lambda^m + \alpha_m \lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_2 \lambda + \alpha_1,$$

$$\sigma_b(\lambda) = \lambda^p + \beta_p \lambda^{p-1} + \cdots + \beta_2 \lambda + \beta_1.$$

Рассмотрим подпространства $U_a + U_b$ и $U_a \cap U_b$. Построим базис пространства, который был бы частично согласован с базисом подпространства $U_a + U_b$.

Предположение 1. *Линейное подпространство $U_a \cap U_b$, является инвариантным подпространством линейного оператора $\mathcal{D}$ в подпространстве $U_a + U_b$.*

Доказательство. $\forall x \in U_a \cap U_b \Rightarrow x \in U_a, x \in U_b \Rightarrow \mathcal{D}x \in U_a, \mathcal{D}x \in U_b \Rightarrow \mathcal{D}x \in U_a \cap U_b \Rightarrow \mathcal{D}(U_a \cap U_b) \subset U_a \cap U_b$.

Доказательство завершено.

Предположение 2. *Если $\dim(U_a \cap U_b) = k > 0$, то в линейном пространстве $\mathcal{L}$ можно выбрать частично согласованный базис относительно подпространства $U_a + U_b$ в котором матрица оператора ограничения на это подпространство принимает канонический вид:*

$$D'_{U_a+U_b} = \left(\begin{array}{cccc|ccc|cccc}
0 & \cdots & 0 & -\theta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & \cdots & 0 & -\theta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & -\theta_{m-k} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & \chi_1 & \eta_{11} & \cdots & \eta_{1k} & 0 & \cdots & 0 & \xi_1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \chi_k & \eta_{k1} & \cdots & \eta_{kk} & 0 & \cdots & 0 & \xi_k \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mu_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\mu_2 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\mu_{p-k}
\end{array}\right),$$

где

$$\sigma_a(\lambda) = \left(\lambda^{m-k} + \theta_{m-k}\lambda^{m-k-1} + \cdots + \theta_2\lambda + \theta_1\right) \cdot \det(\eta - \lambda E_k),$$

$$\sigma_b(\lambda) = \left(\lambda^{p-k} + \mu_{p-k}\lambda^{p-k-1} + \cdots + \mu_2\lambda + \mu_1\right) \cdot \det(\eta - \lambda E_k),$$

$$D'_{U_a \cap U_b} = \eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \cdots & \eta_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_{k1} & \cdots & \eta_{kk} \end{pmatrix}, \quad E_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположение 3. *Если $\exists\, i(j) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{D}^i a \in U_a \cap U_b$ $(\mathcal{D}^j b \in U_a \cap U_b)$, то $\mathcal{D}^{i+s} a \in U_a \cap U_b$ $(\mathcal{D}^{j+s} b \in U_a \cap U_b)$ $\forall s \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $\exists\, i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mathcal{D}^i a \in U_a \cap U_b$. По предложению 1 подпространство $U_a \cap U_b$ инвариантно относительно линейного оператора $U_a \cap U_b$ инвариантное подпространство относительно $\mathcal{D}$. Следовательно, $\mathcal{D}^s \mathcal{D}^i a = \mathcal{D}^{s+i} a \in U_a \cap U_b$ $\forall s \in \mathbb{N}$.

Доказательство завершено.

Следствие 1. *Если* $a \in U_a \cap U_b$, *то* $U_a \cap U_b = U_a$.

Следствие 2. *Если* $b \in U_a \cap U_b$, *то* $U_a \cap U_b = U_b$.

Предположение 4. U_{a+b} *является циклическим инвариантным подпространством относительно линейного оператора* $\mathcal{D}$, *причем*

$$1)\ \sigma_{a+b}(\lambda) = \left(\lambda^{m-k} + \theta_{m-k}\lambda^{m-k-1} + \cdots + \theta_2\lambda + \theta_1\right) \cdot \\ \cdot \det(\eta - \lambda E_k) \cdot \left(\lambda^{p-k} + \mu_{p-k}\lambda^{p-k-1} + \cdots + \mu_2\lambda + \mu_1\right), \quad (1)$$

$$2)\ U_{a+b} = \left\langle a+b, \mathcal{D}(a+b), \ldots, \mathcal{D}^{m+p-k}(a+b)\right\rangle, \quad \dim U_{a+b} = m+p-k. \quad (2)$$

$$3)\ D''_{U_{a+b}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\omega_1 \\ 1 & \cdots & 0 & -\omega_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\omega_{m+p-k} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

2. Пример

Пусть матрица оператора $\mathcal{D}$ в некотором базисе пространства $\mathbb{R}^5$ имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 6 & -6 & -2 \\ -\frac{6}{5} & \frac{13}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{14}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} \\ 6 & 6 & -5 & 10 & 1 \\ \frac{41}{5} & \frac{32}{5} & -\frac{34}{5} & \frac{53}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}.$$

Пусть векторы $a = \left(2, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{3}{2}, -\frac{21}{10}\right)$ и $b = \left(2, \frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{3}{2}, -\frac{29}{10}\right)$ являются образующими векторами инвариантных циклических подпространств

$$U_a = \left\langle \left(2, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{3}{2}, -\frac{21}{10}\right), \left(3, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, -2, -\frac{9}{5}\right), \left(5, \frac{8}{5}, \frac{13}{5}, -3, -\frac{8}{5}\right) \right\rangle,$$

$$U_b = \left\langle \left(2, \frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{3}{2}, -\frac{29}{10}\right), \left(5, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -3, -\frac{19}{5}\right) \right\rangle$$

линейного оператора $\mathcal{D}$.

Минимальные аннулирующие многочлены элементов a и b имеют, соответственно, вид

$$\sigma_a(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6, \sigma_b(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Таким образом, $\dim U_a = 3$, $\dim U_b = 2$, $\dim(U_a + U_b) = 4 \Rightarrow \dim(U_a \cap U_b) = 1$. Находим инвариантное подпространство $U_a \cap U_b = \langle e \rangle = \langle(-5, -3, 2, 5, 13)\rangle$.

Выбираем канонический базис подпространства $U_a + U_b$ частично согласованный с базисами подпространств U_a и U_b:

$$U_a + U_b = \langle a, \mathcal{D}a, e, b \rangle.$$

Тогда матрица оператора в новом базисе принимает вид:

$$D'_{U_a+U_b} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{5} & 1 & \dfrac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$D'_{U_a} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}, \quad D'_{U_b} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{3}{5} \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D'_{U_a \cap U_b} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем другой канонический (циклический) базис в подпространстве $U_a + U_b = U_{a+b}$:

$$U_{a+b} = \left\langle (4, 1, 0, -3, -5), \left(8, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, -5, -\frac{28}{5}\right), (22, -1, 7, -12, -9), \left(74, -\frac{39}{5}, \frac{131}{5}, -38, -\frac{121}{5}\right) \right\rangle.$$

Матрица ограничения линейного оператора $\mathcal{D}$ на подпространство $U_a + U_b$ принимает другой канонический вид в новом базисе, не согласованном с базисами подпространств U_a и U_b:

$$D''_{U_a+U_b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -24 \\ 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Никонов В.И. К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 23, № 1. С. 43–57.

2. Никонов В.И. Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 2. С. 95–99.

3. Никонов В.И. Об алгебро-геометрических свойствах циклических подпространств линейных операторов [Электронный ресурс] // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: X Международная научная молодежная школа-семинар имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 14-18 июля 2022 г.). С. 145-148.

4. Воротников В. И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. Научный мир, 2001. 320 с.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц М.: Наука, 1967. 576 с.

MSC 15A21

On algebraic-geometric properties of the sum of cyclic subspaces with respect to a linear operator

V.I. Nikonov

National Research Mordovia State University

Abstract: The algebraic and geometric properties of the sum of cyclic subspaces with respect to a linear operator, which arise in the study of linear control systems, are investigated. The resulting properties are expressed in terms of minimal annihilating polynomials of the sum and intersection of the corresponding cyclic subspaces. The canonical forms of the linear operator are considered both in partially consistent bases of subspaces and in the cyclic basis of the sum of these subspaces.

Keywords: linear operator, cyclic subspace, minimal annihilating polynomial.

References

1. Nikonov V.I. On the partial stability of linear systems with respect to a given component of the phase vector // Journal of the Middle Volga Mathematical Society. 2017. 23. 1. P. 43-57.

2. Nikonov V.I. Geometric aspect of stability of linear systems with respect to part of the variables // Journal of the Middle Volga Mathematical Society. 2011. 13. 2. P. 95-99.

3. Nikonov V.I. On the algebraic-geometric properties of cyclic subspaces of linear operators [Electronic resource] // Mathematical modeling, numerical methods and program complexes: X International scientific youth school-seminar named after E.V. Voskresensky (Saransk, July 14-18, 2022). P. 145-148.

4. Vorotnikov V.I., Rumyantsev V.V. Stability and control with respect to the coordinates of the phase vector of dynamical systems: theory, methods and applications. Scientific world. M. 2001. 320 p.

5. Gantmakher F.R. The theory of matrices. Nauka. M. 1967. 576 p.