УДК 517.977.56, 519.71

Оптимальное управление процессом осесимметричного нелинейного нагрева неограниченной пластины с учетом ограничений

Морозкин Н.Д., Ткачев В.И., Морозкин Н.Н.

Уфимский университет науки и технологий

Аннотация: Исследуется задача оптимального по быстродействию нагрева хрупкой пластины с учетом ограничений на термонапряжения и максимальную температуру, а также с учетом зависимости коэффицииента теплопроводности и пределов хрупкой прочности от температуры. Разработан и реализован в виде компьютерной программы итерационный метод поиска оптимального управления в случае, когда зависимость пределов хрупкой прочности от температуры аппроксимируется экспоненциальными функциями, а зависимость коэффициента теплопроводности от температуры линейной функцией. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: оптимальный нагрев, термонапряжения, быстродействие, неограниченная пластина.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу осессиметричного нагрева внешними тепловыми источниками неограниченной пластины. Процесс нагрева описывается следующими уравнениями

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(t)\frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad 0 < x < \bar{x}, \quad 0 < t \leq \bar{t} < \infty, \tag{1}$$

$$T(x,0) = T^0 = const, \quad x \in [0,\bar{x}], \tag{2}$$

$$\lambda(t)\frac{\partial T(\bar{x},t)}{\partial x} = \alpha(\nu(t) - T(\bar{x},t)), \quad t \in [0,\bar{t}], \tag{3}$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0,\bar{t}], \tag{4}$$

где $T = T(x,t)$ – температура, t – время, c – коэффициент теплоемкости, ρ – плотность, α – коэффициент теплообмена, $v(t)$ – управление (температура внешней среды), $v(t) \in V$, $V = \{v = v(t),\ v(t) \in L_2[0,\bar{t}],\ 0 \leq \bar{v}(t) \leq v(t) \leq v^+\}$

Пусть $\lambda(t) > 0$, имеет ограниченную производную и

$$0 < \beta_1 \leq \lambda(T) \leq \beta_2. \tag{5}$$

При указанных условиях система уравнений (1)-(4) имеет обобщенное решение из пространства $V_2^{1,0}(G)$ [1], где $G = \{(x,t) : x \in (0,\bar{x}),\ t \in (0,\bar{t})\}$.

Ограничения на термонапряжения в рассматриваемом случае, записываются в виде

$$\frac{\alpha\tau E}{1-\nu}\left(-T(0,t)+\frac{1+3\Gamma}{\bar{x}}\int_0^{\bar{x}}T(\xi,t)d\xi-\frac{6\Gamma}{\bar{x}^2}\int_0^{\bar{x}}\xi T(\xi,t)d\xi\right)\le\sigma_p(T(0,t))), \quad (6)$$

$$\frac{\alpha\tau E}{1-\nu}\left(T(l,t)-\frac{1-3\Gamma}{\bar{x}}\int_0^{1}T(\xi,t)d\xi-\frac{6\Gamma}{\bar{x}^2}\int_0^{1}\xi T(\xi,t)d\xi\right)\le\sigma_c(T(\bar{x},t))). \quad (7)$$

Здесь α_T – коэффициент линейного расширения, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, $\sigma_p(T)$ и $\sigma_c(T)$ – пределы прочности на растяжение и сжатие соответственно, $\Gamma\in[0,1]$ характеризует степень защемления от поворотов краёв пластины,

Ограничение на максимальную температуру в случае внешнего нагрева достигается на поверхности и имеет вид

$$T(\bar{x},t)\le T^*,\quad 0\le t\le\bar{t} \quad (8)$$

Задача. Найти управление $v^0(t)\in V$, переводящее за минимальное время $t^0\le\bar{t}$, систему (1)-(4) в заданное конечное положение $\hat{T}(x)$ с фиксированной точностью

$$\int\limits_0^{\bar{x}}(T(x,t^0,v^0)-\hat{T}(x))^2\le\varepsilon, \quad (9)$$

так, чтобы при всех $t\in[0,\bar{t}]$ были бы выполнены неравенства (6)-(8).

2. Линеаризация

Решение нелинейной системы уравнений (1)-(4) при фиксированном управлении будем искать методом последовательных приближений, изложенном в работе [2].

Системе уравнений (1)-(4) поставим в соответствие итерационный процесс

$$c\rho\frac{\partial T_{k+1}}{\partial t}-\lambda_0\frac{\partial^2T_{k+1}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda(T_k)-\lambda_0)\frac{\partial T_k}{\partial x}\right], \quad (10)$$

$$T_{k+1}(x,0)=T^0,\quad x\in[0,\bar{x}], \quad (11)$$

$$\lambda_0\frac{\partial T_{k+1}(\bar{x},t)}{\partial x}-\alpha(v(t)-T_{k+1}(\bar{x},t))=[\lambda_0-\lambda(T_k)]\frac{\partial T_k(\bar{x},t)}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_{k+1}(0,t)}{\partial x}=0, \quad (13)$$

где

$$\lambda_0=\frac{\beta_1+\beta_2}{2}. \quad (14)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть функция $\lambda(T)$ положительна, удовлетворяет соотношению (5) и имеет ограниченную по T производную. Тогда при любом фиксированном управлении $v(t)\in V$ решения T_{k+1} системы уравнений* (10)-(13) *сходится к решению системы уравнений* (1)-(4) *в соответствующей норме.*

Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса решение поставленной задачи сводится к поиску оптимального управления для линейной системы (10)-(13) с нелинейными ограничениями (6)-(8).

3. Решение задачи быстродействия с линейным уравнением состояния и с фазовыми ограничениями

Для удобства дальнейших выкладок система уравнений (10)-(13) и ограничений (6)-(8) записывается в безразмерных переменных.

Далее после применения конечных интегральных преобразований Фурье решение полученной системы запишется в виде ряда [3]:

$$\theta(r,\tau,u) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n^k(u,r)\cos(\mu_n r). \tag{15}$$

Здесь

$$D_n = \frac{2B_i}{(\mu_n^2 + B_i^2 + B_i)\cos(\mu_n)}, \tag{16}$$

где $\mu_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ – корни уравнения

$$B_i\cos(\mu_n) - \mu_n\sin(\mu_n) = 0, \tag{17}$$

а $x_n^k(u,\tau)$, $n \in \mathbb{N}$ – компоненты вектора решений бесконечной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x_n^{(k)}}{\partial x} = -\mu_n^2 x_n^{(k)} + \mu_n^2(u + I_n^{(k-1)}), \quad I_n^{(k-1)} = \int\limits_0^1 \left(\frac{\lambda(\theta_{k-1})}{\lambda_0} - 1\right)\frac{\partial(\theta_{k-1})}{\partial r}\frac{\sin(\mu_n r)}{\sin(\mu_n)}dr. \tag{18}$$

Здесь $x_n^k = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $B_i = \alpha\dfrac{\bar{x}}{\lambda_0}$ – критерий Био.

Ограничения (5)-(7) запишутся в виде неравенств

$$\sum\sum_{n=1}^{\infty} C_{in}x_n^{(k)} - l_i \leq 0, \quad i = \overline{1,3}. \tag{19}$$

Таким образом, исходная задача на каждой k-ой итерации эквивалентна следующей: найти управление $u^{(k)}(\tau)$, переводящее систему (18) из нулевого начального положения в конечное положение $(\hat{x}_1^{(k)}, ..., x_1^{(k)}, ...)$ за минимальное время с соблюдением ограничений (19).

Ограничившись первыми N членами ряда, заменим бесконечномерную задачу оптимального управления конечномерной, которая на каждой k-ой итерации решается с использованием модифицированного метода поворота опорной гиперплоскости [4].

4. Результаты вычислительных экспериментов

Предложенный подход к решению нелинейных задач теплопроводности с фазовыми ограничениями был апробирован на следующей задаче: нагреть неограниченную пластину из сплава ЖС6У толщиной $2\bar{x} = 0.46$ с начальной температурой 20°C до конечной (постоянной по сечению) температуры 920°C за минимальное время с учетом ограничений на термонапряжения и температуру поверхности, которая, по условию, не должна была превышать 1100°C. Материал ЖС6У является хрупким.

Таблица 1. Зависимость предела прочности от температуры

Температура, ^oC	20	975	1050	1100	1150
Предел прочности, сжатие, МПа	1500	700	470	310	210
Предел прочности, растяжение, МПа	980	540	370	200	140

Температура греющей среды менялась в диапазоне [800°C, 1600°C]. Зависимость предела прочности от температуры задана в таблице 1.

После перехода к безразмерным величинам аппроксимировалась с использованием метода наименьших квадратов нелинейными соотношениями

$$\sigma_c(\theta) = (-0.023e^{0.00303\ \theta} + 0.747), \quad \sigma_p(\theta) = (-0.003e^{0.00460\ \theta} + 0.476)$$

Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры после перехода к безразмерным величинам аппроксимировалась линейной функцией $\lambda(\theta) = 10.68 + 9.74\ \theta$.

На каждом k-ом шаге итерационного процесса задача решалась для $N = 6$. Требуемая точность решения тепловой задачи была достигнута за 7 итераций. Время оптимального по быстродействию нагрева получилось равным 3.98 ч.

На рис. 1 в размерных единицах приведены:

1. Зависимость оптимального управления от времени. Оптимальное управление имеет 135 переключений.
2. Зависимость температуры поверхности тела от времени.
3. Зависимость температуры центра тела от времени.

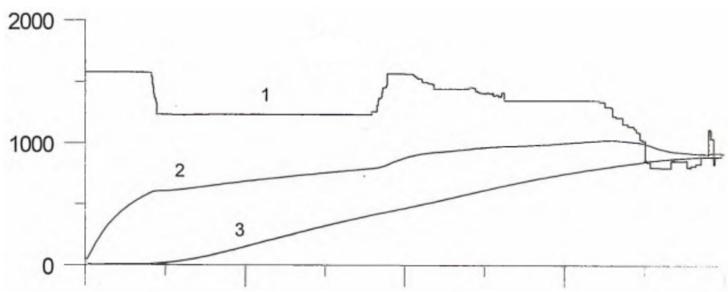

Рис. 1. Графики для управления и температуры тела

Отметим также, что обычно в научной литературе активными считались растягивающие термонапряжения. В рассматриваемом же случае скорость нагрева ограничивают сжимающие напряжения. Выбор размерности конечномерной системы $N = 6$ обусловлен обеспечением сходимости рядов, входящих в ограничения на термонапряжения.

Литература

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. Голичев И.И. Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1989.

3. Морозкин Н.Д. Оптимальное управление процессом нагрева с учетом фазовых ограничений. Учебное пособие. Уфа, 1997.

4. Морозкин Н.Д. Многошаговый двойственный алгоритм Н.Е. Кирина //Кирин Николай Ефимович. Сборник статей. Санкт-Петербург, АССПИН, 2003. С. 198–217.

MSC 58E25

Optimal control of the process of axisymmetric nonlinear heating of an unbounded plate taking into account restrictions

N.D. Morozkin, V.I. Tkachev, Y.N. Morozkin
Ufa University of Science and Technology

Abstract: The problem of optimal heating of a brittle plate in terms of speed is studied, taking into account restrictions on thermal stress and maximum temperature, as well as taking into account the dependence of the thermal conductivity coefficient and brittle strength limits on temperature. An iterative method for searching for optimal control has been developed and implemented in the form of a computer program in the case where the dependence of the brittle strength limits on temperature is approximated by exponential functions, and the dependence of the thermal conductivity coefficient on temperature by a linear function. The results of computational experiments are presented.

Keywords: optimal heating, thermal stress, speed, unlimited plate.

References

1. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linear and quasilinear equations of parabolic type. M.: Science, 1967.

2. Golichev I.I. Solving some problems for parabolic equations by the method of successive approximations. Ufa: BSC Ural Branch of the USSR Academy of Sciences, 1989.

3. Morozkin N.D. Optimal control of the heating process taking into account phase restrictions. Tutorial. Ufa, 1997.

4. Morozkin N.D. Multi-step dual algorithm N.E. Kirin //Kirin Nikolay Efimovich. Collection of articles. St. Petersburg, ASSPIN, 2003. P. 198–217.