УДК 517.588

Двусторонние оценки гипергеометрических функций с соотношениями на параметры

Марусеев И.А., Писарев М.А., Рассадин А.Э.

Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики»

Аннотация: В работе с помощью прямого и обратного неравенств Гёльдера в интегральной форме найдены оценки снизу и сверху для гипергеометрической функции с линейной связью между её параметрами. Кроме этого, для выяснения эффективности полученных оценок были подобраны такие значения параметров гипергеометрических функций, при которых они выражаются через элементарные функции.

Ключевые слова: символ Похгаммера, теорема Чебышёва, относительная погрешность.

Гипергеометрическая функция встречается в различных разделах математики, а особенно часто в её разнообразных приложениях. Хорошо известно [1], что эта функция в круге $|z| < 1$ задаётся степенным рядом:

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \tag{1}$$

где a, b и c — это параметры гипергеометрической функции, а величины вида $(a)_n$ — это символы Похгаммера от её параметров: $(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)$, причём по умолчанию считается, что $(a)_0 = 1$ [1].

Как оказалось, работать с этой неэлементарной функцией с помощью ряда (1) далеко не всегда удобно, поэтому при $|\arg(1-z)| < \pi$ и $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ было установлено её представление в виде интеграла [1]:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{\,b-1}(1-t)^{\,c-b-1}}{(1-tz)^{\,a}} dt, \tag{2}$$

где $\Gamma(\ldots)$ — гамма-функция Эйлера [1].

В приложениях часто возникают ситуации, когда на параметры a, b и c гипергеометрической функции накладываются некие соотношения. Например, в работе [2] параметры b и c были связаны условием: $c = b + 1$.

Далее будут рассматриваться гипергеометрические функции только с этим условием на параметры. Кроме того, параметр a будет считаться вещественным, параметр b — положительным, а $z \in (0, 1)$. В этом случае формула (2) не только остаётся справедливой, но и заметно упрощается:

$$F(a, b; b+1; z) = b \int_0^1 \frac{t^{\,b-1}}{(1-tz)^{\,a}} dt. \tag{3}$$

Однако, работа с этим подмножеством гипергеометрических функций не становится легче, потому что подинтегральное выражение в интеграле (3) является биномиальным дифференциалом, и, следовательно, по теореме П. Л. Чебышёва функция

(3) выражается через элементарные функции только когда либо $a \in \mathbb{Z}$, либо когда $b \in \mathbb{N}$, либо когда $b - a \in \mathbb{Z}$ [3]. Тем не менее, составить некоторое представление о поведении функции (3) на интервале (0,1) оказывается возможным, так как справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть два действительных числа p_- и p_+ выбраны таким образом, что при $b > 1$ $0 < p_- < 1 < p_+$, а при $0 < b < 1$ $0 < p_- < 1 < p_+ < \dfrac{1}{1-b}$, тогда для гипергеометрической функции $F(a, b; b+1; z)$ при $z \in (0, 1)$ справедлива следующая двусторонняя оценка:*

$$F^-(a, b; z) \le F(a, b; b+1; z) \le F^+(a, b; z)\,, \tag{4}$$

где

$$F^+(a, b; z) = \begin{cases} \dfrac{b}{(p_+(b-1)+1)^{\frac{1}{p_+}}} \left(\dfrac{1-(1-z)^{1-aq_+}}{(1-aq_+)z}\right)^{\dfrac{1}{q_+}}, & aq_+ \ne 1 \\ b\left(\dfrac{1-a}{b-a}\right)^{1-a} (-\dfrac{\ln(1-z)}{z})^a, & aq_+ = 1 \end{cases}\,, \tag{5}$$

$$F^-(a, b; z) = \begin{cases} \dfrac{b}{(p_-(b-1)+1)^{\frac{1}{p_-}}} \left(\dfrac{1-(1-z)^{1-aq_-}}{(1-aq_-)z}\right)^{\dfrac{1}{q_-}}, & aq_- \ne 1 \\ b\left(\dfrac{1-a}{b-a}\right)^{1-a} \left(-\dfrac{\ln(1-z)}{z}\right)^a, & aq_- = 1 \end{cases}\,, \tag{6}$$

$$\frac{1}{q_+} = 1 - \frac{1}{p_+}. \tag{7}$$

Для того, чтобы выяснить, какова эффективность оценки (4), выберем параметры a и b гипергеометрической функции (3) так, чтобы они удовлетворяли условиям теоремы П.Л. Чебышёва [3], а именно, рассмотрим сначала случай, когда $b > 1$.

Пусть $a = \dfrac{1}{2}$ и $b = \dfrac{3}{2}$, тогда:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; z\right) = \frac{3}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-tz}}dt\,. \tag{8}$$

Интеграл (7) вычисляется с помощью подстановки $\xi = t^{\frac{1}{2}}(1-tz)^{-\frac{1}{2}}$:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; z\right) = \frac{3}{2z}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\arctan\sqrt{\frac{z}{1-z}} - \sqrt{1-z}\right)\,. \tag{9}$$

Далее, пусть $p_+ = 2$, тогда $q_+ = 2$, и, согласно формуле (5), получим:

$$F^+\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z\right) = \frac{3}{2}\sqrt{-\frac{\ln(1-z)}{2z}}\,. \tag{10}$$

Аналогично, если выбрать $p_- = \dfrac{1}{2}$, то $q_- = -1$, и, по формуле (6) вычислим:

$$F^-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z\right) = \frac{36}{25}\frac{z}{1-(1-z)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{11}$$

Случай $0 < b < 1$ рассматривается аналогично.

Возьмём $a = \dfrac{1}{2}$ и $b = \dfrac{1}{2}$, тогда:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-tz)}}\,. \tag{12}$$

Интеграл (11) вычисляется с помощью той же подстановки, что и интеграл (7):

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right) = \frac{1}{\sqrt{z}}\arctan\sqrt{\frac{z}{1-z}}\,. \tag{13}$$

Далее, пусть $p_+ = \dfrac{3}{2}$, тогда $q_+ = 3$, и, согласно формуле (5), получим:

$$F^+\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) = \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-z}}{z\sqrt{1-z}}}\,. \tag{14}$$

Аналогично, если выбрать $p_- = \dfrac{1}{2}$, то $q_- = -1$, и, по формуле (6) вычислим:

$$F^-\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) = \frac{4}{3}\frac{z}{1-(1-z)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{15}$$

Для того, чтобы оценить количественно, насколько хорошо приближают гипергеометрическую функцию $F(a,b;b+1;z)$ её оценки сверху (5) и снизу (6), введём относительные погрешности этих аппроксимаций:

$$\delta F^+(a,b;z) = \frac{F^+(a,b;z) - F(a,b;b+1;z)}{F(a,b;b+1;z)} \tag{16}$$

и

$$\delta F^-(a,b;z) = \frac{F(a,b;b+1;z) - F^-(a,b;z)}{F(a,b;b+1;z)}\,. \tag{17}$$

В докладе приведены графики функций (8)-(10) и (12)-(14) на интервале $(0,1)$, а также графики соответствующих им относительных погрешностей (15) и (16).

Перспективой развития данной работы является исследование, насколько заметно влияют на полученные оценки небольшие вариации величин p_- и p_+ вблизи их фиксированных значений.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.

2. Писарев М.А., Подолин Д.А., Рассадин А.Э. Точное решение одного обобщения модели Солоу // В сборнике: Наука и реальный мир: пути реализации научных идей. Материалы VII Всероссийской научной студенческой конференции НИУ ВШЭ – Нижний Новгород / Под ред. Е.А. Сергеевой. 2023. С. 94–96.

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 1. М.: Высшая школа, 1988. 712 с.

MSC 33C05

Double-sided bounds for hypergeometric functions with relations on parameters

I.A. Maruseev, M.A. Pisarev, A.E. Rassadin
HSE University

Abstract: In the work, using the direct and reverse Hölder inequalities in integral form, estimates from below and from above for a hypergeometric function with a linear relationship between its parameters are found. In addition, to determine the effectiveness of estimates obtained, such values of the parameters of hypergeometric functions were selected, in which they are expressed in terms of elementary functions.

Keywords: Pochhammer symbol, Chebyshev theorem, relative error.

References

1. Bateman G., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Volume 1. New York – Toronto – London, Mc Graw-hill book company, Inc, 1953.

2. Pisarev M.A., Podolin D.A., Rassadin A.E. Tochnoye resheniye odnogo obobsheniya modeli Solou, *V sbornike: Nauka i realnii mir: puti realizatsii nauchnih idei. Materiali VII Vserossiiskoi nauchnoi studencheskoi konferentsii NIU VShE – Nizhny Novgorod / Pod red. E.A. Sergeevoi*, 2023. P. 94–96.

3. Kudryavtsev L.D. Kurs matematicheskogo analiza. V 3h tomah. Tom 1. M., Visshaya shkola, 1988. 712 p.