УДК 517.9

Анализ устойчивости модели Хиндмарша-Роуза по части переменных

Мамедова Т.Ф., Кутыркина М.А.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В статье описывается применение метода сравнения Е.В. Воскресенского к анализу устойчивости математической модели Хиндмарша-Роуза по части переменных. Сделан вывод, что модель устойчива по всем переменным и применима для дальнейших прогнозов.

Ключевые слова: модель Хиндмарша-Роуза, метод сравнения, эталонные функции.

Модель Хиндмарша-Роуза задается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + (-ax_1^3 + bx_1^2) - x_3 + I, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = c - dx_1^2 - x_2, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = r(s(x_1 - x_R) - x_3), \end{cases} \tag{1}$$

где x_1 – потенциал мембраны; x_2 – переменная восстановления; x_3 – переменная адаптации; I – величина стимулирующего тока (эта переменная отвечает экспериментальному подключению тока к мембране); x_R – пороговое значение мембранного потенциала; параметры a, b, c, d, r, s определяют форму модели и могут быть настроены для воспроизведения различных динамических режимов нейрона.

Проведем анализ устойчивости этой системы по части переменных, используя метод сравнения, разработанный Е.В. Воскресенским [2]. Описание алгоритма приведено ниже.

Рассмотрим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \tag{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x) \tag{3}$$

где $A : [T, +\infty) \to Hom(R^n, R^n)$ – непрерывное отображение.

Пусть

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \overline{M_0} \subseteq N,$$
$$|f_j(t, x_1, x_2, ..., x_n)| \le \lambda_j(t, |x_{j_1}|, ..., |x_{j_q}|), \quad \forall j \in N,$$
$$f(t,x) = f(t, x_1, x_2, ..., x_n) = \mathrm{colon}(f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n)),$$

где $\lambda_j(t, r_1, ..., r_i, ..., r_q) \le \lambda_j(t, \overline{r_1}, ..., \overline{r_i}, ..., \overline{r_q}), \quad r_i \le \overline{r_i}, i = \overline{1, q}, \quad \forall t \in [T, +\infty).$

Будем считать, что фундаментальная матрица $Y(t) = (y_{ij}(t))$, $i, j \in \overline{1, n}$ уравнения (1) нормирована в точке $t_0 \in [T, +\infty)$ и $Y^{-1}(t) = (y^{ji}(t))$.

Непрерывные функции

$$\mu_i : [T, +\infty) \to R^1_+, \quad m_i : [T, +\infty) \to R^1_{+^1},$$

удовлетворяющие неравенствам:

$$\mu_i \geq \max_{j \in N_0}(|y_{ij}(t)|, m_i(t)) \geq \max\{\max_{j \in M_0}(|y_{ij}(t)|, \mu_i(t))\},$$

где $T \leq t < +\infty$, $i \in M_0$ будем называть эталонными функциями сравнения.

Считаем, что $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, ..., $i_q = q$.

Пусть при любом $c \geq 0$ функции

$$P_i = \sum_{k \in M_0} |y_{ik}(t)| + \int_{t_0}^{t} \left| \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) \right| \lambda_j(s, Cm(s))) \, ds + \\ + \int_{t}^{+\infty} \left| \sum_{j \in N, k \in M} y_{ik}(t) y^{jk}(s) \right| \lambda_j(s, Cm(s))) \, ds,$$

где $i = \overline{q + 1, n}$ существует при всех $t \geq t_0 \geq T$, $B = N \backslash M$.

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{\phi : \phi \in C^{(p)}([T, +\infty), R^n), |\phi_i(t)| \leq c_1 m_i(t), i = \overline{1, q}, |\phi_i(t)| \leq c_2 p_i(t), i = \overline{1, q + 1}, \\ c_1, c_2 \in\to R^1_{+^1}, p \geq 0\},$$

где c_1, c_2 – фиксированные положительные числа.

Пусть

$$I_i(t, \phi) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j \in N,\ k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \phi(s)) \, ds - \int_{t}^{+\infty} \sum_{j \in N,\ k \in M} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \phi(s)) \, ds \quad (4)$$

существует при любых $i \in N$, $c \to R^1_{+1}$ Несобственные интегралы в этом выражении сходятся равномерно по t при $t \in [T, +\infty)$.

Теорема 1. *Пусть для уравнений (2)-(3) выполняется условие (4). Тогда при достаточно большом t_0 для решения $y(t\colon t_0, y_0)$, $y_0 \in R_0$, $R_0 = \{x\colon x \in R^n\}$ существует решение $x(t\colon t_0, x_0)$, $x_0 \in R_0$, для которого следует выполнение асимптотического равенства:*

$$x_i(t) = \sum_{j \in M_0} y_{ij}(t) \gamma_j + o(\mu_i(t)), \quad t \to +\infty, \quad \forall i \in M_0. \quad (5)$$

Теорема 2. *Пусть при условиях (4) для каждого решения уравнения (3) $x(t\colon t_0, x_0)$, $x_0 \in R_0$ справедливо асимптотическое равенство:*

$$x(t\colon t_0, x_0), \quad x_0 \in R_0 = o(m_i(t)),$$

где $t \to +\infty$, $\forall i \in M_0$. Следовательно, для каждого решения $x(t\colon t_0, x_0), x_0 \in R_0$ существует решение $y(t\colon t_0, y_0)$, $y_0 \in R_0$ такое, что справедливо асимптотическое равенство (5).

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы 2 и условие* (4) *имеет место равномерно относительно* $0 < c \leq c_0$, $\dfrac{I_i(t,c)}{\mu_i(t)} \to 0$, $\mu_i(t) \leq k$, $k > 0$, $\forall i \in M_0$ *при* $A \to 0$, *то, если уравнение* (2) *устойчиво по части переменных* $\forall i \in M_0$, *то тривиальное решение уравнения* (3) *также устойчиво по части переменных и, если уравнение* (2) *неустойчиво по части переменных* i, $i \in M_0$, *то тривиальное решение уравнения* (3) *также неустойчиво по части переменных.*

Применим алгоритм, изложенный в теоремах 1-3, к модели (1).

Для численной реализации системы выберем следующие параметры $I = 10$; $a = -1$; $b = 3$; $c = 1$, $d = 5$; $r = 0,001$; $s = 4$; $x_R = -1,6$. Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 - ax_1^3 + 3x_1^2 - x_3 + 10, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 1 - 5x_1^2 - x_2, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 0,001(4(x_1 - 1,6) - x_3) \end{cases} \tag{6}$$

Точка $(x_1, x_2, x_3) = (0,756; -1,858; 9,424)$ является положением равновесия системы (6). Перейдем к исследованию соответствующего первого линейного приближения:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 6,251y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -7,56y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = 0,004y_1 - 0,001y_3. \end{cases} \tag{7}$$

Фундаментальная матрица системы (7) и обратная к ней имеют следующий вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -0,621e^{4,988t} & -0,165e^{0,266t} & 0,129e^{-0,004t} \\ -0,784e^{4,988t} & -0,986e^{0,266t} & 0,977e^{-0,004t} \\ 0 & 0,002e^{0,266t} & 0,172e^{-0,004t} \end{pmatrix},$$

$$Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} -5,855e^{-0,262s} & 7,392e^{-0,262s} & 0 \\ -1,556e^{-4,984s} & 9,297e^{-4,964s} & -0,019e^{-4,984s} \\ 1,216e^{-5,254s} & -9,212e^{-5,254s} & -1,622e^{-5,254s} \end{pmatrix}.$$

Множество $N = \{1, 2, 3\}$, поскольку $\overline{M_0} = N$. Тогда справедлива оценка:

$$||f_1(t,x)|| \leq |-x_1^3 + 0,732x_1^2 + 0,29| \leq |x_1^5| = \lambda_1(t, |x_1^5|),$$

$$||f_2(t,x)|| \leq |-5x_1^2 - 0,002| \leq |x_1^2| = \lambda_2(t, |x_1^2|),$$

$$||f_3(t,x)|| = |-0,0048| = const,$$

поэтому $M_0 = \{1, 2, 3\}$, $M = M_0$, $B = N - M = 0$.

Эталонные функции сравнения будут иметь вид:

$$\mu_1 = \max_{j \in N_0}\{|y_{11}|, |y_{12}|, |y_{13}|\} = 0,129e^{-0,004t},$$
$$\mu_2 = \max_{j \in N_0}\{|y_{21}|, |y_{22}|, |y_{23}|\} = 0,977e^{-0,004t},$$
$$\mu_3 = \max_{j \in N_0}\{|y_{31}|, |y_{32}|, |y_{33}|\} = 0,172e^{-0,004t},$$
$$m_1 = \max_{j \in M_0}\{|y_{11}|, |y_{12}|, |y_{13}|, \mu_1(t)\} = 0,129e^{-0,004t},$$
$$m_2 = \max_{j \in M_0}\{|y_{21}|, |y_{22}|, |y_{23}|, \mu_2(t)\} = 0,977e^{-0,004t},$$
$$m_3 = \max_{j \in M_0}\{|y_{31}|, |y_{32}|, |y_{33}|, \mu_3(t)\} = 0,172e^{-0,004t}.$$

Рассмотрим

$$J_i(t, \phi) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \phi(s))\, ds - \int_{t}^{+\infty} \sum_{j \in N, k \in M} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \phi(s))\, ds.$$

Выражение $J_i(t, \varphi)$ существует $\forall i \in N$, $c \in -R^1_+$ и $J_i(t, \phi) = o(\mu_i(t))$ при $t \to +\infty$. Несобственные интегралы сходятся по t на любом компакте $[T, +\infty)$.

$$J_1(t, \phi) = -\int_{t}^{+\infty} (y_{11}y^{11}f_1 + y_{12}y^{12}f_1 + y_{13}y^{13}f_1 + y_{11}y^{21}f_2 + y_{12}y^{22}f_2 + y_{13}y^{13}f_2 + y_{11}y^{31}f_3 +$$
$$+ y_{13}y^{33}f_3 + y_{12}y^{32}f_3)\, ds = (1,464e^{0,266t} - 0,922e^{4,988t} + 0,002e^{-0,004t}) \int_{t}^{+\infty} e^{-4,984s} ds < +\infty;$$

$$J_2(t, \phi) = -\int_{t}^{+\infty} (y_{21}y^{12}f_1 + y_{22}y^{12}f_1 + y_{23}y^{13}f_1 + y_{21}y^{21}f_2 + y_{22}y^{22}f_2 + y_{23}y^{23}f_2 + y_{23}y^{33}f_3 +$$
$$+ y_{21}y^{31}f_3 + y_{22}y^{32}f_3) ds = -4,382e^{4,988t} \int_{t}^{+\infty} e^{-0,266s} ds + 8,75e^{0,266t} \int_{t}^{+\infty} e^{-4,984s} ds < +\infty;$$

$$J_3(t, \phi) = -\int_{t}^{+\infty} (y_{31}y^{11}f_1 + y_{32}y^{12}f_1 + y_{33}y^{13}f_1 + y_{31}y^{21}f_2 + y_{32}y^{22}f_2 + y_{33}y^{23}f_2 + y_{31}y^{31}f_3 +$$
$$+ y_{32}y^{32}f_3 + y_{33}y^{33}f_3) ds = (0,003e^{-0,004t} - 0,018e^{0,266t}) \int_{t}^{+\infty} e^{-0,984s} ds < +\infty; \quad (8)$$

Из справедливости неравенств (8) следует выполнение условий теорем 1-3, а следовательно, модель Хиндмарша-Роуза устойчива по всем переменным при наложенных допущениях, что делает ее применимой для дальнейших прогнозов.

Литература

1. Hindmarsh J.L., Rose R.M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences. 1984. V. 221 (1222). P. 87–102.

2. Воскресенский Е.В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО, 2000. 300 с.

MSC 34D05

Stability analysis of the Hindmarsh-Rose model for some variables

T.F. Mamedova, M.A. Kutyrkina
National Research Mordovia State University

Abstract: The article describes the application of the comparison method of E.V. Voskresensky to the stability analysis of the Hindmarsh-Rose mathematical model for some variables. It is concluded that the model is stable for all variables and is applicable for further forecasts.

Keywords: Hindmarsh-Rose model, comparison method, reference functions.

References

1. Hindmarsh J.L., Rose R.M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences. 1984. V. 221 (1222). P. 87–102.
2. Voskresensky E.V. Asymptotic Methods: Theory and Applications. Saransk: SVMO, 2000. 300 p.