УДК 517.977.5

Разработка программного комплекса для решения задач оптимального управления*

Лутошкин И.В., Чекмарев А.Г.

Ульяновский государственный университет

Аннотация: В статье проведен анализ существующих подходов к разработке программных решения, предназначенных для решения задач оптимального управления (ОУ). Описывается метод параметризации – численный метод решения задач ОУ, позволяющий на основе единого подхода решать задачи ОУ достаточно общего вида, в том числе с запаздыванием как по фазовым переменным, так и по управлению. Предлагается концепция разработки программного комплекса, реализующего метод параметризации.

Ключевые слова: оптимальное управление, численные методы, метод параметризации, программный комплекс.

1. Введение

Задачи моделирования управляемых нелинейных динамических систем возникают в разных областях науки, техники и технологии – машиностроении, робототехнике, авиации, химической промышленности, медицине, экономике и др. Наиболее известными и широко применяемыми пакетами программ общего назначения являются `Mathlab`, `Maple`, `GNU Octave`, `Mathematica`, `Scilab`, `SCADE Suite`, `OpenModelica`, `Julia` и другие. Часть пакетов базируется на специализированных высокоуровневых мультипарадигменных интерпретируемых «полных» языках программирования, ориентированных на математические вычисления. Другие пакеты (`OpenModelica`) реализуют декларативные компилируемые объектно-ориентированные языки, поддерживающие прежде всего компонентно-ориентированную парадигму проектирования. Альтернативный подход заключается в расширении существующих языков общего назначения специализированными библиотеками, примером может служить `Python` с библиотеками `SciPy`, `NumPy` и др.

Для моделирования динамических систем, формулируемых в терминах теории оптимального управления (ОУ) [1,2], создан ряд методов и специализированных инструментов численного решения задач ОУ, реализованных как приложения, библиотеки или дополнения к существующим пакетам общего назначения: `CasADi`, `PSOPT`, `PROPT`, `GPOPS`, `ICLOCS2`, `ACADO`, `acados`, `GPOPS-II`, `CGPOPS`, `GEKKO`, `MEOPT`, `OPTCON` и др. Большая часть существующих инструментов решения задач ОУ либо являются библиотеками (например, `CGPOPS`), либо реализуют `eDSL` (например, `GEKKO`, `PROPT`) и базируются на полных языках общего назначения (`Python`, `Matlab`, `Modelica`), наследуя синтаксические решения и парадигмы, что требует от пользователя соответствующих знаний и значительно повышает уровень входа. Кроме этого, постоянно увеличивающая количественная сложность состава пакетов программ общего назначения приводит к усложнению процесса обучения. Таким образом, создание простых,

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда N 24-28-00542, https://rscf.ru/project/24-28-00542/.

удобных и эффективных предметно-ориентированных инструментов является актуальной задачей. Далее рассматривается метод параметризации [3, 4], позволяющий на основе единого концептуального подхода решать задачи ОУ достаточно общего вида.

2. Метод параметризации

Рассмотрим задачу оптимального управления в виде:

$$J = g(x(T)) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \psi\left(t, x(t), u(t), \int\limits_{t_0}^{t} f(t, s, x(s), u(s))ds\right), \\ x(t_0) = x^0; \end{cases} \tag{2}$$

$$u(t) \in U, \ t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{R}$, U замкнуто в $\mathbb{R}^r$. Функции $\psi : \mathbb{R}^{1+n+r+m} \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^{2+n+r} \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывны и непрерывно-дифференцируемы.

Введем разбиение отрезка $[t_0; T]$:

$$t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_N \equiv T; \tag{4}$$

и на каждом отрезке разбиения определим структуру управления:

$$u_\mu(t) = u^k_\mu(t; v^k_\mu), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad \mu = \overline{1, r}. \tag{5}$$

Тогда управление зависит от параметров $v^k_\mu \in R^d$. Введем

$$w^k = (t_k, v^k) \equiv (w^k_{0,0}, w^k_{1,1}, \ldots, w^k_{r,d}).$$

В этом случае решение задачи (2) зависит от введенных параметров:

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \ldots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k. \tag{6}$$

Определим функцию

$$\varphi(w^1, \ldots, w^N) = g(z(T; w^1, \ldots, w^{N-1}, v^N)). \tag{7}$$

Таким образом, получаем задачу нелинейного программирования (НП):

$$\varphi(w^1, \ldots, w^N) \to \min \quad \text{при ограничениях}$$

$$W = \{w^k : \ w^{k-1}_0 \leq w^k_0, \ u^k(t; v^k) \in U, \ w^{k-1}_{0,0} \leq t \leq w^k_{0,0}, \ k = \overline{1, N}; \\ w^0_{0,0} = t_0, \ w^N_{0,0} \equiv T \leq T^*\}. \tag{8}$$

Обозначим $q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(t, s, x(s), u(s))ds$, $h(t, s, x, u) = \dfrac{\partial f(t, s, x, u)}{\partial t}$.

Для применения методов первого порядка к задаче (8) необходимо вычисление первых производных функции $\varphi(w^1, \ldots, w^N)$. Поскольку данная функция задана опосредованно, то вычисление производных нетривиально.

Для решения этой проблемы введем

$$H(t, x, q, u, p_x, p_q) = \langle p_x(t), \psi(t, x, u, q)\rangle + \langle p_q(t), f(t, t, x, u)\rangle + \int\limits_t^T \langle p_q(s), h(s, t, x, u)\rangle\, ds. \tag{9}$$

$$\dot{p}_x(t) = -\left[\frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x}\right]^T p_x(t) - \\ - \left[\frac{\partial f(t, t, x(t), u(t))}{\partial x}\right]^T p_q(t) - \int\limits_t^T \left[\frac{\partial h(s, t, x(t), u(t))}{\partial x}\right]^T p_q(s) ds; \tag{10}$$

$$\dot{p}_q(t) = -\left[\frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q}\right]^T p_x(t). \tag{11}$$

$$p_x(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x}, \quad p_q(T) = 0. \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть функции f, g, ψ, входящие в постановку задачи (1)-(2), непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных целевого функционала задачи (8) верны формулы:*

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial t_k} = H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k - 0), p_x(t_k), p_q(t_k)) - \\ - H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k + 0), p_x(t_k), p_q(t_k)); \tag{13}$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial T} = H(T, x(T), q(T), u(T), p_x(T), p_q(T)); \tag{14}$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, x(\tau), q(\tau), u(\tau), p_x(\tau), p_q(\tau))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u^k_\mu(\tau, v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} d\tau. \tag{15}$$

Таким образом, Теорема 1 дает алгоритм вычисления производных в задаче НП (8). Аналогичные теоремы удалось получить в задачах ОУ с точечным запаздыванием, в задачах ОУ с ОДУ без запаздывания. Реализация алгоритмов, реализующих метод параметризации для задач ОУ как с запаздыванием, так и без запаздывания, проводится в рамках программного комплекса.

3. Концепция программного комплекса

При работе с программным комплексом вводятся роль разработчика (исследователя) модели и роль пользователя модели. Различие ролей определяется набором используемых функций. Разработчик модели описывает: задачу ОУ с ОДУ, с точечным и/или распределенным запаздыванием как в фазовых, так и в управляющих переменных; параметры модели; функционал задачи в терминальной форме;

частные производные функций, входящих в исходную постановку задачи ОУ. В ходе решения задачи ОУ пользователь может: менять параметризацию управляющих функций, тем самым изменяя вид обобщенного сплайна и соответствующую задачу НП; выбирать сценарий решения задачи НП; обрабатывать отчеты, полученные при решении задачи.

В методе параметризации независимо можно применять различные методы решения задачи НП и задачи Коши, так как дискретная схема решения задачи Коши разделена с переменными задачи НП. Это позволяет в структуре ПО использовать не связанные библиотеки: для решения задач НП и для решения задач Коши. Поскольку вычисление производных целевой функции в получаемой задаче НП представляет собой отдельный алгоритм, в рамках программного комплекса реализуется несколько подходов к реализации этого алгоритма: на основе решения задач Коши для прямой и сопряженной систем и последующего численного интегрирования; аппроксимация на основе конечных разностей; комбинация разностного дифференцирования и решения задач Коши для прямой и сопряженной систем.

Таким образом, реализуется единый подход к решению задач ОУ достаточно общего вида.

Литература

1. Lutoshkin I.V., Rybina M.S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 264–273. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273, EDN: BTQTSM

2. Eichmeir P., Nachbagauer K., Lauf T. et al. Time-Optimal Control of Dynamic Systems Regarding Final Constraints // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 16, № 3. article ID: 031003. 12 p. DOI: 10.1115/1.404933476.

3. Горбунов В.К. Метод параметризации задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. Т. 19, № 2. С. 292–303.

4. Лутошкин И. В. Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации // Известия Иркутского государственного университета. Сер. "Математика". 2011. Т. 4, № 1. С. 44-56.

MSC 49M99

Development of a software package for solving optimal control problems

I.V. Lutoshkin, A.G. Chekmarev
Ulyanovsk State University

Abstract: An analysis of existing approaches to the development of software solutions designed to solve OC problems is carried out. The parameterization method is described. It's a numerical method for solving OC problems, including delays in both phase variables and control. A concept for developing a software package that implements the parameterization method is proposed.

Keywords: optimal control, numerical methods, parameterization method, software package.

References

1. Lutoshkin I. V., Rybina M. S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023. V. 23, № 2. P. 264-273. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273, EDN: BTQTSM
2. Eichmeir P., Nachbagauer K., Lauf T. et al. Time-Optimal Control of Dynamic Systems Regarding Final Constraints // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2021. V. 16, № 3. article ID: 031003. 12 p. DOI: 10.1115/1.404933476.
3. Gorbunov V. K. The parameterization method for optimal control problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1979. V. 19, № 2. P. 292–303.
4. Lutoshkin I.V. The parameterization method for optimizing the systems which have integro-differential equations // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2011. V. 4, Iss. 1. P. 44–56 (in Russian). EDN: NQWBZH