УДК 519.63

Сравнительный анализ некоторых итерационных процессов для реализации полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера

Ладонкина М.Е.[1,2], Повещенко Ю.А.[1,2], Чжан Х.[1,2]
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН[1], МФТИ[2]

Аннотация: В итерационных алгоритмах для полностью консервативных разностных схем (ПКРС) для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера разработанны новые методы выбора адаптивной искусственной вязкости (АИВ), применяемые как в явных итерационных процессах, так и в методе раздельных прогонок. Проведен их сравнительный анализ на примере расчётов задачи Сода.

Ключевые слова: полностью консервативные разностные схемы, метод опорных операторов, газовая динамика, задача Сода.

1. Полностью консервативная разностная схема

В предыдущей работе [1] численно исследовались газодинамические течения идеального газа в эйлеровых переменных, моделируемые полностью консервативными разностными схемами (ПКРС) [2-6]. На рис. 1 представлена соответствующая разностная сетка, где ω – узлы разностной сетки, а Ω – ячейки. Термодинамические величины ρ, ε, P и также внутренняя энергия $E = \rho\varepsilon$ относятся к узлам ω. Будем также относить скорость $\vec{u}$, объём v и приузловую массу $m = \rho v$ к узлам ω, а объём V – к ячейкам.

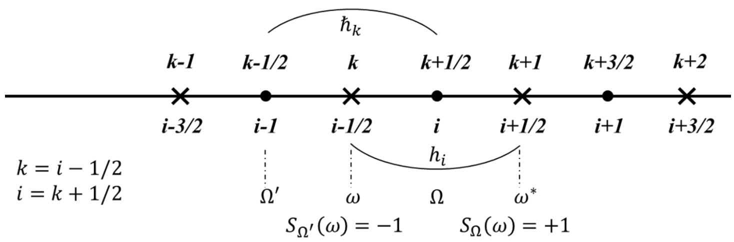

Рис. 1. Разностная сетка.

Очевидно, что

$$v_\omega = \hbar_k = \frac{h_{k+1/2} + h_{k-1/2}}{2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2},\ V_\Omega = h_i,\ \rho_\omega = \frac{m_\omega}{v_\omega} = \rho_k.$$

Выпишем полностью консервативную разностную схему (ПКРС) в переменных

Эйлера [6]:

$$m_t = -\nu DIN_D \vec{\mu}_D^{\sim} \tag{1}$$

$$(mu)_t = -\nu GRAD_\sigma \pi^{\sim} - \nu DIT_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \cdot \vec{u}_D^{\sim}) \tag{2}$$

$$(m\varepsilon)_t = -\frac{1}{2}\sum_{\Omega(\omega)}(\pi^{\sim} VDIV_\sigma \vec{u}^{\sim})_\Omega - \nu DIN_D(\vec{\mu}_{ED}^{\sim} + \vec{\chi}_D^{\sim}) \tag{3}$$

$$(m\frac{\vec{u}^2}{2})_t = -\nu(u^{\sim}, GRAD_\sigma \pi^{\sim}) - \nu DIN_D(\vec{\mu}_D^{\sim}\frac{\vec{u}_D^{2\sim}}{2}) \tag{4}$$

Здесь величины обозначим следующим образом:

$$\vec{\mu} = \rho\vec{u},\ \vec{\mu}_E = \varepsilon\vec{\mu} = E\vec{u},\ E = \rho\varepsilon,\ \rho^{\sim} = \rho^{(\psi_\rho)},\ \psi_\rho = const;$$

$$M_D^{\sim} = \frac{1}{2}\sum_{\omega(\Omega)}(\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)},\ \mu_D^{\sim} = M_D^{\sim} - \nu^{\sim} GRAN_D \rho^{\sim};$$

$$\pi_\Omega^{\sim} = P_\Omega^{(0.5)} - v_u^{\sim} DIV_\sigma(\rho^{\sim} u^{(\psi_u)}),\ P_\Omega = \frac{1}{2}\sum_{\omega(\Omega)} P_\omega,\ \psi_u = const;$$

$$\vec{\chi}_D^{\sim} = \{\vec{\chi}_{\varepsilon D}^{\sim} | \vec{\chi}_{ED}^{\sim}\},\ \vec{\chi}_{\varepsilon D}^{\sim} = -k_\varepsilon GRAN_D \hat{\varepsilon},\ \vec{\chi}_{ED}^{\sim} = -k_E GRAN_D \hat{E};$$

$$M_{ED}^{\sim} = \frac{1}{2}\sum_{\omega(\Omega)}(E_\omega u_\omega)^{(0.5)},\ \mu_{ED}^{\sim} = M_{ED}^{\sim} - \nu_E^{\sim} GRAN_D(\rho^{\sim}\varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}),\ \psi_\varepsilon = const.$$

Используемые обозначения аналогичны работе [6].

2. Метод вычисления ПКРС

В предыдущей работе [6] для реализации нелинейной неявной ПКРС применялся метод явных итераций. На каждой явной итерации использовался внутренний итерационный процесс для выбора адаптивной искусственной вязкости (АИВ). При решении тестовой задачи Сода [7] были получены удовлетворительные результаты, однако, процессорное время, потраченное на итерационные процессы оказалось значительным. В данной работе для оптимизации вычислительного процесса реализации ПКРС и выбора АИВ предложен метод совместных итераций, одновременно уточняющих итерационное разностное решение и корректирующих АИВ. Также наряду с явным итерационным процессом (реализующим неявную ПКРС) применялся и метод раздельных прогонок для разностных балансов (1)-(3).

Для задачи Сода проведены численные эксперименты, представленные на рис. 2 и рис. 3. Из графиков следует, что применение новых итерационных методик существенно улучшает разностные решения и сокращает процессорное время, затрачиваемое на расчёты.

На рис. 2 представлены профили плотностей в задаче Сода для аналитического решения. Первый профиль получен новым разрабатываемым методом прогонки (совместными итерациями с одновременной коррекцией АИВ) – линия Метод 1. Второй профиль (линия Метод 2) – ранее предложенным методом явных итераций (с внутренним итерационным процессом АИВ без её оптимизации во внутренних структурах волны разрежения, ударной волны и контактного разрыва).

Аналогичная кривая (Метод 1), полученная новым разрабатываем методом, представлена на рис. 3, сравнение приведено с методом явных итераций, выполненным с оптимизацией выбора АИВ в структурах волны разрежения, ударной волны и контактного разрыва – линия Метод 3.

Рис. 2. Профили плотностей в задаче Сода: Метод 1 – разрабатываемый метод, Метод 2 – ранее используемый

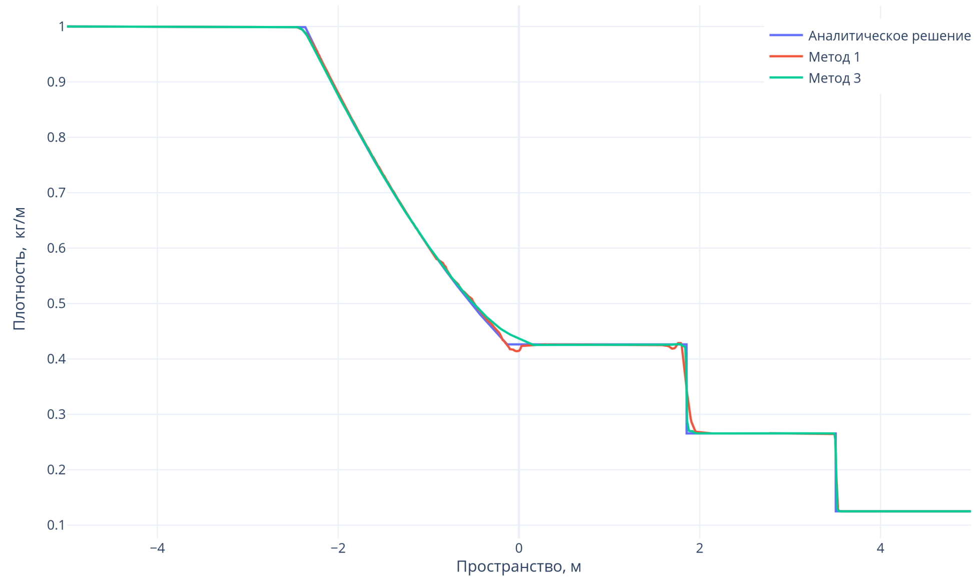

Рис. 3. Профили плотностей в задаче Сода: Метод 1 – разрабатываемый метод, Метод 3 – ранее используемый

Литература

1. Ladonkina M.E., Poveschenko Y.A., Zhang H. Application of viscous-filled nodal completely sonservative difference schemes to the gas dynamics equations in Euler variables on the Soda problem [Electronic resource]. Proceedings of the XVI International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling". (Saransk, July 17-20, 2023). Saransk: SVMO Publ, 2023. P. 129-134. Available at: https://conf.svmo.ru/files/2023/papers/paper19.pdf. - Date of access: 04.07.2024.

2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. Москва, наука, 1980.

3. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики при наличии источников массы // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша, АНСССР. 1982. № 160.

4. Повещенко Ю.А., Ладонкина М.Е., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Шарова Ю.С. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша АН. 2019. № 14. 23 с.

5. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. Two-Layer Completely Conservative Difference Scheme of Gas Dynamics in Eulerian Variables with Adaptive Regularization of Solution. In: Lirkov I., Margenov S. (eds) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science, 2020. Vol 11958. Springer.

6. Ладонкина М.Е., Повещенко Ю.А., Рагимли О.Р., Чжан Х. Теоретическое исследование устойчивости узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 317–330.

7. Sod G.A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // IJournal of Computational Physics. Elsevier. 1978. 27, 1. P. 1–31.

MSC 65M22

Comparative analysis of serval iterative processes for realisation of fully conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables

M.E. Ladonkina[1,2], Yu.A. Poveschenko[1,2], H. Zhang[1,2]

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS[1],
Moscow Institute of Physics and Technology[2]

Abstract: In iterative algorithms for fully conservative difference schemes (FCDS) for the equations of gas dynamics in Euler variables, new methods of selecting adaptive artificial viscosity (AAV) applied in the tridiagonal matrix algorithm on the example of calculation of the Sod problem as in explicit iterative processes are developed.

Keywords: completely conservative difference scheme, method of reference operators, gas dynamics, Sod problem.

References

1. Ladonkina M.E., Poveschenko Y.A., Zhang H. Application of viscous-filled nodal completely sonservative difference schemes to the gas dynamics equations in Euler variables on the Soda problem [Electronic resource]. Proceedings of the XVI International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling". (Saransk, July 17-20, 2023). Saransk: SVMO Publ, 2023. P. 129-134. Available at: https://conf.svmo.ru/files/2023/papers/paper19.pdf. - Date of access: 04.07.2024.

2. Samarsky A.A., Popov Yu.P. Difference methods for solving problems of gas dynamics. Moscow, Science, 1980.

3. Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A. Completely conservative difference schemes for gas dynamics equations in the presence of mass sources // Preprints of the KIAM, ANSSR. 1982. № 160.

4. Poveshchenko Yu.A., Ladonkina M.E., Podryga V.O., Rahimli O.R., Sharova Yu.S. On one two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Euler variables with adaptive regularization// Preprints of the KIAM, AN. 2019. № 14. 23 p.

5. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. Two-Layer Completely Conservative Difference Scheme of Gas Dynamics in Eulerian Variables with Adaptive Regularization of Solution. In: Lirkov I., Margenov S. (eds) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notesin Computer Science. 2020. Vol. 11958. Springer.

6. Ladonkina M.E., Poveschenko Yu.A., Rahimly O.R., Zhang H. Theoretical study of stability of nodal completely conservative difference schemes with viscous filling for gas dynamics equations in Euler variables // Zhurnal SVMO. 2022. Vol. 24, № 3. P. 31–330.

7. Sod G.A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // IJournal of Computational Physics. Elsevier. 1978. Vol. 27, № 1. P. 1–31.