УДК 519.65; 517.521

Приближение гёльдеровых функций их коэффициентами Фурье для гармонически модулированного аргумента

Кузьмичев Н.Д.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

Аннотация: В работе приводится доказательство теоремы, согласно которой любую функцию, принадлежащую классу Гёльдера C^{α} (G), можно аппроксимировать с любой наперед заданной точностью конечной суммой её коэффициентов Фурье для гармонически модулированного аргумента.

Ключевые слова: класс Гёльдера, гармонически модулированный аргумент, зависимости коэффициентов Фурье, аппроксимация функции.

1. Введение

Во многих прикладных задачах необходимо иметь в своем арсенале не только исследуемую зависимость, но и её производные. Например, в экспериментальной физике и радиотехнике [1]. Часто на эксперименте измеряют зависимости гармоник исследуемой физической характеристики при одновременном статическом и гармоническом воздействиях на изучаемый объект. В этом случае возникает задача восстановления изучаемой характеристики из ее гармоник. Во многих задачах изучаемая зависимость является нелинейной и имеет особенности, тогда в сигнале отклика имеется много гармоник. На этот случай разработаны основы метода модуляционного Фурье-анализа (МФА) [2–6] с анализом корректности задачи восстановления. Идеи и методы МФА появились давно [1], получили свое развитие в работах [2–6] и используются на практике. Ряд положений метода МФА требуют расширения на более широкий класс функций. В работе приводится теорема обобщающая применение МФА для функций принадлежащих классу Гёльдера-Липшица.

2. Теорема об аппроксимации функции, принадлежащей классу Гёльдера-Липшица её коэффициентами Фурье

Теорема 1. *Любую функцию $f(y)$, принадлежащую классу Гёльдера-Липшица C^{α}, на некотором множестве G можно аппроксимировать с любой наперёд заданной точностью следующей суммой коэффициентов её ряда Фурье для гармонически модулированного аргумента $y = x + h\cos t$*

$$\left| \frac{A_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n A_{2n}(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Здесь $h \leq \dfrac{(b-a)}{2}$, h – амплитуда модуляции, $t \in [-\pi, \pi]$, $x \in [a, b]$, $y \in [a-h, b+h] = G$ и $A_m(x) = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x + h\cos t)\cos(mt)dt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что функция $f(y)$ принадлежит классу Гёльдера-Липшица [7] на некотором множестве G: $f(y) \in C^{\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$. Аргумент y заставим изменяться по гармоническому закону $y(t) = x + h\cos t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда, если $x \in [a, b]$, то $y \in G = [a - h, b + h]$. Здесь h – амплитуда модуляции. Суперпозиция функций $f(y(t))$ удовлетворяет условию: $f(-\pi) = f(\pi)$ для любых $x \in [a, b]$. Из вышеотмеченного следует, что ряд Фурье функции $f(x+h\cos t)$ сходится равномерно для любых $x \in [a, b]$ и $t \in [-\pi, \pi]$ [7–9], т.е.

$$f(x + h\cos t) = \frac{A_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_{2n}(x)\cos(nt).$$

В данной формуле положим $t = \dfrac{\pi}{2}$, получим:

$$f(x) = \frac{A_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_{2n}(x). \tag{1}$$

Действительно. Рассмотрим следующую сумму, составленную из коэффициентов Фурье

$$A_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + h\cos t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x + h\cos t)\cos(nt)dt,$$

$$f_N(x) = \frac{A_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(-1)^n A_{2n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + h\cos t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\cos(2nt)\right]dt. \tag{2}$$

Подынтегральную сумму (2), состоящую из косинусов, просуммируем:

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x + h\cos t)\frac{\sin\left[(2N+1)\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}\, dt. \tag{3}$$

Введем новую переменную $z = t + \dfrac{\pi}{2}$ и, в силу периодичности подынтегрального выражения, сместим пределы интегрирования (3):

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x + h\sin z)\, \frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z}\, dz. \tag{4}$$

Рассмотрим оценку модуля разности $|f_N(x) - f(x)| = R_N$. Учитывая (4) получим:

$$f_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [f(x + h\sin z) - f(x)]\, \frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z}\, dz. \tag{5}$$

Область интегрирования интеграла (5) $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ разобьем на три области: $\left[-\dfrac{\pi}{2}, -\delta\right]$, $[-\delta, \delta]$ и $\left[\delta, \dfrac{\pi}{2}\right]$, выделяя особую точку $z = 0$ [7, 8]. Для оценки остатка R_N выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и по нему $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство:

$\dfrac{M}{\alpha}h^\alpha\delta^\alpha < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Оценим по модулю второй интеграл по области $[-\delta,\delta]$ в указанной сумме:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}[f(x+h\sin z)-f(x)]\frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z}dz\right| \leq$$
$$\leq \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}|f(x+h\sin z)-f(x)|\left|\frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z}\right|dz. \quad (6)$$

В силу того, что $f(x)\in C^\alpha$ следует существование $M>0$ и выполнение неравенства:

$$|f(x+h\sin z)-f(x)| \leq M|h\sin z|^\alpha. \quad (7)$$

Учитывая (7), имеем:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}|f(x+h\sin z)-f(x)|\left|\frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z}\right|dz < Mh^\alpha\int\limits_{0}^{\delta}z^{\alpha-1}dz = \frac{M}{\alpha}h^\alpha\delta^\alpha.$$

Поскольку δ выбрано из условия $\dfrac{M}{\alpha}h^\alpha\delta^\alpha < \dfrac{\varepsilon}{3}$, в итоге получим:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}[f(x+h\sin z)-f(x)]\frac{\sin((2N+1)z)}{\sin z}dz\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8)$$

Первый и третий интегралы разбитого на три интеграла (5) стремятся к нулю при $N\to\infty$ в силу замкнутости тригонометрической системы [7–9]. Для них можно указать такие номера N_1 и N_2, что для $N>N_1$, N_2 каждый из интегралов по модулю будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{3}$. В итоге мы получим, что $|f_N(x)-f(x)| = R_N < \varepsilon$.

Перейдя к переменной t имеем неравенство для любых $x\in[a,b]$:

$$R_N = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}[f(x+h\cos t)-f(x)]\frac{\sin\left[(2N+1)\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]}{\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)}dt\right| < \varepsilon. \quad (9)$$

Другими словами, мы получили, что любую функцию f, принадлежащую классу Гёльдера-Липшица ($f(y)\in C^\alpha(G)$), можно аппроксимировать с любой наперёд заданной точностью следующей конечной суммой зависимостей от x коэффициентов её ряда Фурье:

$$\left|\frac{A_0(x)}{2}+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n A_{2n}(x)-f(x)\right| < \varepsilon.$$

Напомним, что $x\in[a,b]$,$y\in[a-h,b+h]=G$.

Доказательство завершено.

Замечание 1. *Теорему 1 можно обобщить и на кусочно-гёльдеровы функции [7–9], применяя вышеописанный метод доказательства для каждого куска гладкости функции и рассматривая пределы справа и слева в точках разрыва функции.*

Литература

1. Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. М.: Мир, 1974. 430 с.
2. Кузьмичев Н.Д. Поведение намагниченности поликристаллических образцов YBa2Cu3O7-x в слабых магнитных полях// Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17, №7. С. 56 – 60.
3. Кузьмичев Н.Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 12. С. 63 – 74.
4. Кузьмичев Н.Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 1. С. 70 – 80.
5. Кузьмичев Н.Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных // ЖТФ. 1997. Т. 67, № 8. С. 124 – 127.
6. Кузьмичев Н.Д. Применение метода модуляционного Фурье-анализа для задачи восстановления производных // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 44 – 59.
7. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Под. Ред. А.Н. Тихонова. Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.
8. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Государственное изд-во физ. мат. литературы, 1961. 936 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1989. 624 с.

MSC 41A05; 42A10

Approximation of helder functions by its Fourier coefficients for a harmonically modulated argument

N.D. Kuzmichev

National Research Mordovian State University

Abstract: The paper provides a proof of the theorem according to which any function belonging to the Helder class $C^{\alpha}(G)$ can be approximated with any predetermined accuracy by a finite sum of its Fourier coefficients for a harmonically modulated argument.

Keywords: Helder class, harmonically modulated argument, dependences of Fourier coefficients, approximation of function.

References

1. Solymar L. Tunneling effect in superconductors and its application. Mir Publ., Moscow, 1974. 430 p.
2. Kuzmichev N.D. Behavior of the magnetization of polycrystalline YBa2Cu3O7-x samples in weak magnetic fields // Letters to ZhTF. 1991. V. 17, No. 7. P. 56–60.
3. Kuzmichev N.D. Hysteresis magnetization and generation of harmonics by magnetic materials: Analysis of the spectrum of magnetization harmonics on the example of high-temperature superconductors // ZhTF. 1994. V. 64, No. 12. P. 63 – 74.
4. Kuzmichev N.D. Application of the Taylor-Fourier series for the numerical and experimental determination of the derivatives of the dependence under study // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2011. Vol. 13, No 1. P. 70 – 80.
5. Kuzmichev N.D. Estimates of errors in the modulation recovery of the response function and its derivatives // ZhTF. 1997. 37, No. 7. P. 124 – 127.
6. Kuzmichev N.D. Application of the Fourier Modulation Analysis Method to the Problem of Derivatives Recovery // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2024. Vol. 26, No 1. P. 44 – 59.
7. Ilyin V.A., Sadovnichy V.A., Sendov B.Kh. Mathematical analysis. Continuation of the course, Moscow State University Publ., 1987. 358 p.
8. Bari N.K. Trigonometric series. M.: State Publishing House of Physics. mat. literature, 1961. 936 p.
9. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. M.: Nauka, 1989. 624 p.