

УДК 519.63

О точности модифицированного метода Галеркина с разрывными базисными функциями, зависящими от времени*

Кочурова И.Д.¹, Ладонкина М.Е.^{1,2}, Тишкин В.Ф.²

МФТИ¹, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН²

Аннотация: В работе исследуется модификация разрывного метода Галеркина, где в качестве альтернативы применению процедуры лимитирования используются базисные функции, подстраивающиеся под решение задачи, и в случае нарушения энтропийного неравенства в ячейке, локально переводящие исходный метод в метод Годунова первого порядка, но на измельченной вдвое сетке. В работе показана возможность использования данного метода без подключения лимитирующих функций при решении задач, содержащих сильные ударные волны. Исследованы порядки точности метода на задаче о прохождении простой волны до момента времени пока газодинамические функции сохраняют гладкость.

Ключевые слова: метод Галеркина с разрывными базисными функциями, уравнения Эйлера, метод Годунова, ударные волны.

1. Базисные функции, зависящие от времени

При применении классического разрывного метода Галеркина [1] к решению задач газовой динамики, содержащих области высоких градиентов, для сохранения монотонности решения возникает необходимость использования лимитирующих функций. Применение таких лимитеров может повлиять на точность полученного решения, понижая ее. Возможной причиной необходимости применения процедуры лимитирования может оказаться невыполнение разностного аналога энтропийного неравенства. В настоящей работе в качестве альтернативы применению процедуры лимитирования используются базисные функции, подстраивающиеся под решение задачи, и, в случае нарушения энтропийного неравенства в ячейке, локально переводящие исходный метод в метод первого порядка [2], но на измельченной вдвое сетке. Для метода первого порядка энтропийное неравенство гарантировано выполнено. Это достигается автоматической заменой кусочно-линейной базисной функции на кусочно-постоянную в конкретной ячейке.

Рассмотрим одномерную систему уравнений Эйлера:

$$\partial_t U + \nabla \cdot F(U) = 0, \quad (1)$$

дополненную подходящими начально-краевыми условиями, вид которых зависит от конкретной задачи. Консервативные переменные U и компоненты потоковых функции $F(U)$, заданы в виде:

$$\begin{aligned} U &= (\rho, \rho u, E)^T, \\ F(U) &= (\rho u, \rho u^2 + p, (E + p)u)^T. \end{aligned} \quad (2)$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, проект № 22-11-00060

Приближенное решение системы (1) в классическом разрывном методе Галеркина ищется как решение следующей системы [1]:

$$\frac{d}{dt} \int_{T_j} \phi_k(x) \cdot U_h(x, t) d\Omega + \oint_T \phi_k(x) \cdot h_F(U_h^+, U_h^-, n) d\sigma - \int_{T_j} \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} F(U_h(x, t)) d\Omega = 0. \quad (3)$$

Базис пространства выберем в виде ортогональных полиномов, где первая функция равна единице, вторая базисная функция представляет собой кусочно-линейную функцию, вид которой зависит от времени (рис. 1) [3].

$$\phi_0 = 1, \phi_1(x, t) = \begin{cases} (x - x_c)(1 - \alpha(t)) + \frac{\alpha(t)\Delta x}{2}, & x \in [x_c, x_{i+1/2}] \\ (x - x_c)(1 - \alpha(t)) - \frac{\alpha(t)\Delta x}{2}, & x \in [x_{i-1/2}, x_c] \end{cases}, \quad (4)$$

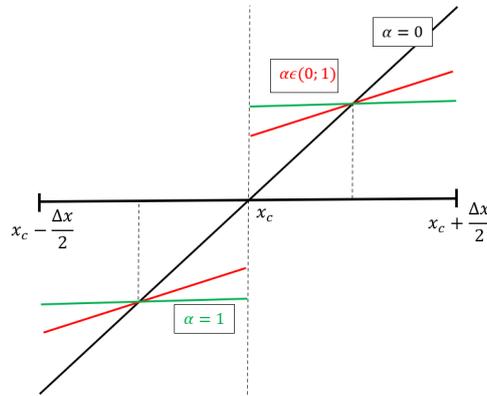


Рис. 1. Базисная функция $\varphi_1(x, t)$

Основные формулы (3) в одномерном случае переписутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_c - \frac{\Delta x}{2}}^{x_c + \frac{\Delta x}{2}} U(x, t) \phi_k(x, t) dx &= (F(x, t) \phi_k(x, t)) \Big|_{x_c + \frac{\Delta x}{2}} - (F(x, t) \phi_k(x, t)) \Big|_{x_c - \frac{\Delta x}{2}} - \\ &- \int_{x_c - \frac{\Delta x}{2}}^{x_c + \frac{\Delta x}{2}} \left(F(x, t) \frac{\partial \phi_k(x, t)}{\partial x} + U(x, t) \frac{\partial \phi_k(x, t)}{\partial t} \right) dx, \quad k = 0, 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Второе уравнение при $k = 1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1(t)}{\partial t} \frac{\Delta x^3}{12} (1 + \alpha(t) + \alpha^2(t)) + U_1(t) \frac{\partial \alpha}{\partial t} (1 + 2\alpha) \frac{\Delta x^3}{24} - \int_{x_c - \frac{\Delta x}{2}}^{x_c} F(x, t) (1 - \alpha) dx - \\ - \int_{x_c}^{x_c + \frac{\Delta x}{2}} F(x, t) (1 - \alpha) dx - F^*(x_c) \alpha \Delta x + F^*(x_{i-1/2}) \alpha \frac{\Delta x}{2} + F^*(x_{i+1/2}) \alpha \frac{\Delta x}{2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения α в i -ой ячейке будем использовать следующий алгоритм:

1. Определяем границы: $MMAX$ и $MMIN$ для каждой конкретной задачи.
2. Вычисляем: $Mmax_i$ и $Mmin_i$, интенсивность ударных волн, образующихся при решении задач распада произвольного разрыва на границах i -ой ячейки сетки и в точке x_i .
3. Определяем α_i :

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & Mmin_i > MMAX, \\ 0, & Mmax_i < MMIN, \\ \frac{Mmax_i - Mmin}{Mmax - Mmin}, & MMIN < Mmax_i, Mmin_i < MMAX \end{cases}, \quad (7)$$

При решении задачи приведенным методом возможно возникновение мелкомасштабных осцилляций. С целью получения монотонного решения применим схему сглаживания:

$$U_i^{sm} = U_i + \beta_{i+\frac{1}{2}}(U_{i+1} - U_i) + \beta_{i-\frac{1}{2}}(U_i - U_{i-1}),$$

$$\beta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{B_{i+1} + 2B_i + B_{i-1}}{4},$$

$$B_i = \frac{(C_i + C_{i+1}) |\rho_{i+1} - \rho_i| \Delta t}{2 \rho_i \Delta x},$$

$$C_i = \sqrt{\frac{\gamma p_i}{\rho_i}}.$$

2. Численные эксперименты

В работе проведена серия расчётов прохождения ударных волн с различными числами Маха от $M = 2$ до $M = 10$ по однородному фону. На рис. 2 представлены результаты расчета ударной волны с числом Маха $M = 2$ (задача 1) на момент времени $T = 1, 2$: синяя линия – начальное положение ударной волны, красная линия – решение модифицированным РМГ без усреднения.

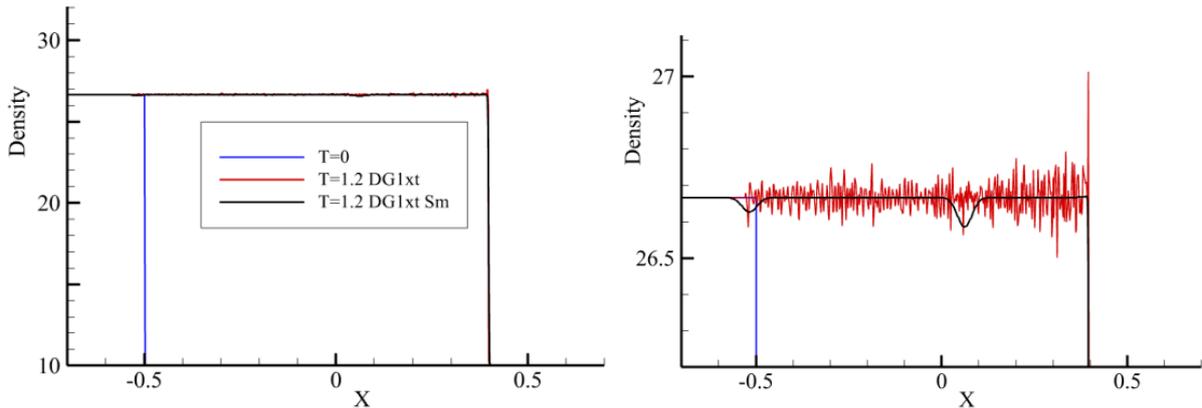


Рис. 2. Профили плотностей в задаче 1 о прохождении ударной волны с числом Маха $M = 2$, слева – в обычном масштабе, справа – при сильном увеличении

При численном моделировании проходящих ударных волн различной интенсивности до числа Маха $M = 10$, также как и для $M = 2$ (рис. 2) наблюдалось наличие

мелкомасштабных осцилляций. Черная линия – решение модифицированным РМГ с усреднением (8). Как видно из рис. 2, применение процедуры усреднения (8) полностью гасит нефизичные осцилляции и позволяет получить четкий профиль ударной волны с наличием небольших энтропийных следов.

В качестве тестовой задачи, на которой проводилось исследование порядка точности метода, использовали задачу о прохождении простой волны, в которой энтропия $\frac{p}{\rho^\gamma}$ и инвариант Римана $R^+ = u + \frac{2}{\gamma - 1}$ являются постоянными (задача 2). Вычисления проводились до момента времени $t = 0.07$ пока газодинамические функции (плотность, давление, скорость) сохраняют гладкость. При решении данной задачи использовалось усреднение (8). Зная аналитическое решение задачи [4], для получения порядка точности метода, достаточно провести два численных расчета с шагами h и $h/3$. Значения порядков точности метода вычислялись локально в каждой ячейке по правилу Рунге.

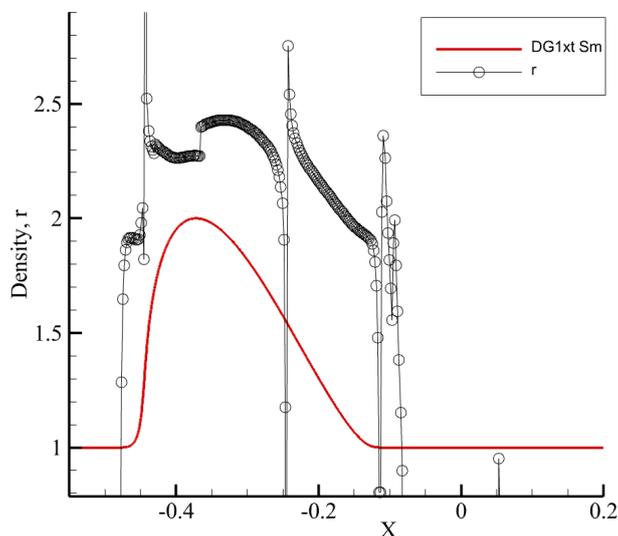


Рис. 3. Профиль плотности в задаче 2 о прохождении простой волны и локальные порядки точности метода

Как видно из рис. 3, использование осреднения такого вида позволяет сохранить повышенный порядок точности метода, не понижая его до первого, как при использовании лимитирующих функций.

Литература

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. Lecture Notes in Mathematics. Cetraro: Springer, 1997. P. 150–268.
2. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
3. Краснов М.М. [и др.]. Обобщение метода Годунова, использующее кусочно-полиномиальные аппроксимации // Труды XVI Международной

конференции «Супервычисления и математическое моделирование» / под ред. Р. М. Шагалиева. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ». 2017. С. 168–183.

4. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Препринт ИПМ № 34. Москва, 2012 г.

MSC 65M22

On the accuracy of the modified Godunov method with discontinuous time-dependent basis functions

I.D. Kochurova¹, M.E. Ladonkina^{1,2}, V.F. Tishkin²

MIPT¹, Keldysh Institute of Applied Mathematics, KIAM²

Abstract: The paper explores the modification of the Godunov method using discontinuous basis functions. Instead of applying the traditional procedure, these basis functions are used, which adapt to the solution of the problem. In case of a violation of the entropy inequality in a cell, the original method is locally translated into a first-order method on a grid that has been halved. The paper shows that this method can be used without limiting functions when solving problems that contain strong shock waves. The accuracy of the method is investigated by solving a problem involving a simple wave, until the gas dynamic functions become smooth.

Keywords: the Godunov method with discontinuous basis functions, Euler's equations, the Godunov method, shock waves.

References

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. Lecture Notes in Mathematics. Cetraro: Springer, 1997. P. 150–268.
2. Godunov S.K. The difference method of numerical calculation Discontinuous solutions to hydrodynamic equations // Mat. collection of materials. 1959. V. 47, № 3. P. 271–306.
3. Krasnov M.M. [и др.]. .]. A generalization of the Godunov method based on piecewise polynomial approximations // Proceedings of the XVI International Conference "Supercomputations and Mathematical Modeling" / edited by R. M. Shagaliev. Sarov: FSUE «RFNC- VNIIEF». 2017. P. 168–183.
4. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V. F. Investigation of the Limiter Effect on the Order of Accuracy of the Solution by the Discontinuous Galerkin Method //IPM Preprint No. 34. Moscow, 2012.