УДК 517.9

# О вырожденных резонансах в системах, близких к двумерным нелинейным гамильтоновым, при квазипериодических по времени параметрических возмущениях*

Костромина О.С.

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

*Аннотация:* Изучается структура вырожденной резонансной зоны в случае параметрического резонанса на примере уравнения маятникового типа с немонотонным вращением при квазипериодическом по времени неконсервативном возмущении. С помощью анализа усредненных систем определяются условия существования квазипериодических решений в случае, когда порядок вырождения больше единицы. Особое внимание уделяется характерному для параметрических возмущений существованию квазипериодических решений нового типа, отвечающих предельным циклам усредненной системы, не имеющих порождающих предельных циклов в возмущенной автономной системе, соответствующей исходному уравнению.

*Ключевые слова:* вырожденный резонанс, квазипериодические параметрические возмущения, предельный цикл, уравнение маятникового типа, усреднение.

Рассматриваемый в работе круг вопросов относится к области исследования неконсервативных двухчастотных квазипериодических возмущений двумерных нелинейных гамильтоновых систем с немонотонным вращением. Системы такого класса могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon g(x,y,\theta_1,\theta_2), \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \varepsilon f(x,y,\theta_1,\theta_2), \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon$ – малый положительный параметр, $\theta_i = \omega_i t$, $i = 1,2$; функции $g$ и $f$ – непрерывные и $2\pi$-периодические по $\theta_i$; гамильтониан $H$ и функции $g$ и $f$ – достаточно гладкие по переменным $x$ и $y$ в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ или $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$; $\omega_1$ и $\omega_2$ – несоизмеримые над полем рациональных чисел частоты возмущения. Предполагается выполнение условия $g'_x + f'_y \not\equiv 0$ в области $D$, что означает неконсервативность исходной системы (1). Рассматриваются возмущения, содержащие нелинейные параметрические члены вида $p(\theta_1,\theta_2)x^k y^l$, $k + l \geqslant 2$.

Относительно соответствующей невозмущенной системы ($\varepsilon = 0$) предполагается, что она является нелинейной гамильтоновой и имеет ячейку $D_0 \subset D$, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми $H(x,y) = h$, $h \in [h_{min}, h_{max}]$, и не содержащую малых окрестностей состояний равновесия и сепаратрис.

Переходя в $D_0$ от переменных $x$, $y$ к переменным «действие $I$ – угол $\theta$ »:

$$x = X(I,\theta),\ y = Y(I,\theta),$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, грант № 24-21-00050.

где $X, Y$ – решение невозмущенной системы на замкнутых фазовых кривых, система (1) запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon(f(X,Y,\theta_1,\theta_2)X'_\theta - g(X,Y,\theta_1,\theta_2)Y'_\theta), \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon(-f(X,Y,\theta_1,\theta_2)X'_I + g(X,Y,\theta_1,\theta_2)Y'_I), \\ \dot{\theta}_1 = \omega_1, \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что собственная частота $\omega(I)$ невозмущенной системы не является монотонной функцией и не обращается в нуль на интервале

$$(I_{min}, I_{max}) \equiv (I(h_{min}), I(h_{max})).$$

Фазовое пространство системы (2) – декартово произведение $[I_{min}, I_{max}] \times \mathbb{T}^3$, где $\mathbb{T}^3$ – трехмерный тор.

Говорят, что в системе (2) имеет место резонанс, если выполняется условие:

$$n\omega(I) = m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \tag{3}$$

где $n$, $m_1$, $m_2$ – взаимно простые натуральные числа. Вещественные решения $I$ этого уравнения на отрезке $[I_{min}, I_{max}]$ будем обозначать $I_{n\mathbf{m}}, \mathbf{m} = (m_1, m_2)$. Тогда уровни $I = I_{n\mathbf{m}}$ (замкнутые фазовые кривые $H(x,y) = h_{n\mathbf{m}}$ невозмущенной системы) будем называть резонансными уровнями. Окрестность $U_\mu = \{(I,\theta) : I_{n\mathbf{m}} - C\mu < I < I_{n\mathbf{m}} + C\mu,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ C = \text{const} > 0\}$, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, индивидуального резонансного уровня $I = I_{n\mathbf{m}}$ будем называть резонансной зоной.

При условии, что $I = I_{n\mathbf{m}}$ является стационарной точкой функции $\omega(I)$, такой что

$$\frac{d^k\omega}{dI^k}(I_{n\mathbf{m}}) = 0,\ k = \overline{1,j},\ \frac{d^{j+1}\omega}{dI^{j+1}}(I_{n\mathbf{m}}) \neq 0,\ j \geqslant 1,$$

резонансный уровень $I = I_{n\mathbf{m}}$ будем называть вырожденным с порядком вырождения $j$.

В работах [1–3] получены двумерные автономные усредненные системы, описывающие топологию резонансных зон, близких к вырожденным в случае, когда порядок вырождения больше единицы. Простому устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия усредненной системы соответствует двумерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (2), или устойчивое (неустойчивое) квазипериодическое резонансное решение с периодами $\dfrac{2\pi n}{\omega_1}, \dfrac{2\pi n}{\omega_2}$ в системе (1). Грубому устойчивому (неустойчивому) предельному циклу усредненной системы с частотой $\omega_0$ соответствует трехмерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (2).

Установлено существование трехмерных инвариантных торов двух типов [2, 3]. Тор первого типа порождается предельным циклом соответствующей возмущенной автономной системы. Ему соответствует квазипериодическое резонансное решение с периодами $\dfrac{2\pi}{\omega_0}, \dfrac{2\pi n}{\omega_1}, \dfrac{2\pi n}{\omega_2}$ в системе (1). Поскольку возмущение системы содержит параметрические члены, зависящие как от фазовых координат, так и от времени, то дивергенция усредненной системы является знакопеременной функцией, что приводит к возникновению предельных циклов в колебательной области ее фазового пространства. Инвариантные торы, отвечающие таким предельным циклам, будем называть торами второго типа. Движение по таким торам условно периодическое с периодами $\frac{2\pi}{\omega_\varepsilon}, \frac{2\pi n}{\omega_1}, \frac{2\pi n}{\omega_2}$, где $\omega_\varepsilon \sim \varepsilon^{1-s}\omega_0$, $s = \frac{1}{j+2}$, при $\varepsilon \to 0$. В работах [2, 3] полученные результаты проиллюстрированы на примере асимметричного уравнения типа Дуффинга с немонотонным вращением при параметрическом квазипериодическом возмущении.

В настоящей работе изучается задача о воздействии неконсервативных двухчастотных квазипериодических возмущений на уравнение маятникового типа с немонотонным вращением в случае, когда возмущение содержит нелинейные параметрические члены. Проводится анализ двумерных автономных усредненных систем, позволяющий исследовать структуру вырожденной резонансной зоны с порядком вырождения, большим единицы. Для нахождения предельных циклов усредненных систем используется метод построения порождающей функции Пуанкаре–Понтрягина; для определения расстояния между возмущенными сепаратрисами седел применяется метод Мельникова.

## Литература

1. Morozov K.E., Morozov A.D. Degenerate Resonances and Synchronization of Quasiperiodic Oscillations // Journal of Mathematical Sciences. 2023. V. 269, № 6. P. 823–834.

2. Morozov A.D., Morozov K.E. Parametric Perturbations of a Duffing–Type Equation with Nonmonotonic Rotation // Communications in Computer and Information Science 1914 Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. Nizhny Novgorod, Russia, November 13–16, 2023. Revised Selected Papers: Springer, Communications in Computer and Information Science 1914, 318. 2023. P. 86–97.

3. Morozov A.D., Morozov K.E. Quasi-Periodic Parametric Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems with Nonmonotonic Rotation // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. V. 29, № 1. P. 64–76.

MSC 34C15

# On degenerate resonances in systems close to two-dimensional nonlinear Hamiltonian ones under quasi-periodic parametric perturbations

O.S. Kostromina

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

*Abstract:* Using the example of a pendulum-type equation with nonmonotonic rotation under a quasi-periodic nonconservative perturbation, the structure of the degenerate resonance zone in the case of parametric resonance is studied. Using the analysis of averaged systems, the conditions for the existence of quasi-periodic solutions are determined in the case when the order of degeneracy is greater than one. Particular attention is paid to the existence of quasi-periodic solutions of a new type, which are characteristic of parametric perturbations. Such solutions correspond to limit cycles of an averaged system that do not have generating limit cycles in the perturbed autonomous system corresponding to the original equation.

*Keywords:* degenerate resonance, quasi-periodic parametric perturbations, limit cycle, pendulum-type equation, averaging.

## References

1. Morozov K.E., Morozov A.D. Degenerate Resonances and Synchronization of Quasiperiodic Oscillations // Journal of Mathematical Sciences. 2023. V. 269, № 6. P. 823–834.

2. Morozov A.D., Morozov K.E. Parametric Perturbations of a Duffing–Type Equation with Nonmonotonic Rotation // Communications in Computer and Information Science 1914 Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. Nizhny Novgorod, Russia, November 13–16, 2023 Revised Selected Papers: Springer, Communications in Computer and Information Science 1914, 318. 2023. P. 86–97.

3. Morozov A.D., Morozov K.E. Quasi-Periodic Parametric Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems with Nonmonotonic Rotation // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. V. 29, № 1. P. 64–76.